



# P2P1 유한요소를 이용한 비압축성 Navier-Stokes 방정식 해법들의 행렬 특성

조명환,<sup>1</sup> 최형권,<sup>2</sup> 유정열,<sup>1,\*3</sup>

## CHARACTERISTICS OF MATRICES IN THE P2P1 FINITE ELEMENT METHODS FOR SOLVING THE INCOMPRESSIBLE NAVIER-STOKES EQUATION

Myung H. Cho,<sup>1</sup> Hyoung G. Choi<sup>2</sup> and Jung Y. Yoo<sup>1,\*3</sup>

*Numerical algorithms for solving the incompressible Navier-Stokes equations using P2P1 finite element are compared regarding the eigenvalues of matrices. P2P1 element allocates pressure at vertex nodes and velocity at both vertex and mid nodes. Therefore, compared to the P1P1 element, the number of pressure variables in the P2P1 element decreases to 1/4 in the case of two-dimensional problems and to 1/8 in the three-dimensional problems. Fully-implicit-integrated, semi-implicit-integrated and semi-segregated finite element formulations using P2P1 element are compared in terms of elapsed time, accuracy and eigenvalue distribution (condition number). For the comparison, they have been applied to the well-known benchmark problems. That is, the two-dimensional unsteady flows around a fixed circular cylinder and decaying vortex flow are adopted to check spatial accuracy.*

**Key Words** : Semi-Splitting FEM(반-분리 유한요소법), Decaying Vortex (감쇠와류), Strouhal Number(스트로홀수), Spatial Accuracy(공간정확도), Eigenvalue(고유치)

### 1. 서 론

유한요소법은 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 해를 수반하는 많은 공학문제의 해결에 있어서 매우 유용한 도구로 사용되고 있다. Tezduyar 등[1,2]은 속도벡터에 대해서는 선형보간을, 압력에 대해서는 상수를 사용한 Q1P0와 속도벡터에 대해서는 2차보간을, 압력에 대해서는 1차 보간을 사용하는 Q2P1 4각형 요소를 사용하여 그 성능을 조사하였으며, Brooks와 Hughes[3]는 수정된 가중합수를 유도하여 대류항이 지배적인 유동에 대하여 성공적으로 적용하였다. 또한 Codina 등[4]은 2차요소(quadratic element)를 가지고 유선상류 Petrov-Galerkin(SUPG) 방법을 사용하여 1차원 정상 대류-확산 방정식에 대한 상류도식을 유도하였다. 유한요소법의 주요한

이점은 임의의 형상에 대하여 쉽게 적용할 수 있으며, 부가적인 노력 없이도 비정렬 격자를 사용할 수 있다는 것이다[5]. 유한요소법의 분리 공식화(segregated formulation)에서는 속도장과 압력장을 따로 풀게 되므로 각 단계에서 얻어지는 행렬은 속도장과 압력장을 동시에 푸는 통합 공식화(integrated formulation)의 행렬보다 더 작고 예조건화(pre-conditioning) 하기가 쉽다. 반면에, 별개의 타원형 압력방정식을 풀어야 하므로 이에 대한 추가적인 경계조건이 필요한 단점이 존재한다. 일반적으로 개방 경계(open boundary) 문제들의 경우에 출구에서의 압력과 압력구배가 모두 미지수인 경우가 있다. 따라서 적당한 출구 경계조건을 부과하는 문제는 쉽지 않을 뿐만 아니라 분리 계열의 수치해법에 있어서 중요한 관심사이다.

Ramaswamy와 Jue[6]는 개방 경계에서 압력에 대한 경계조건을 처리하기 위해서 경계를 포함하는 유한요소로부터 별개의 방정식을 유도하여 이를 경계조건으로 대체하였다. 한편, Tabarrok 과 Su[7]는 P1P1 분리 유한요소법에서 압력 경계조건을 과잉 제한조건(over constraint)으로 인하여 정확한 압력 경계조건이 부여되기 위해서는 압력방정식의 반복해법이 필

1 정회원, 서울대학교 정밀기계설계공공연구소

2 정회원, 서울산업대학교 기계공학과

3 정회원, 서울대학교 기계항공공학부

\* Corresponding author, E-mail: jyyoo@snu.ac.kr

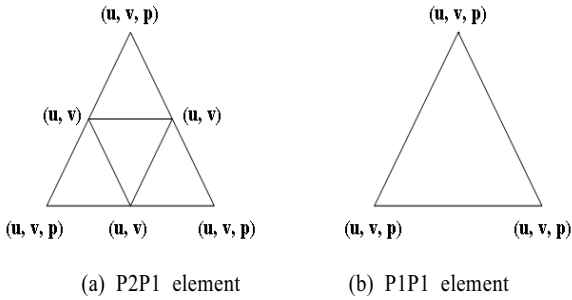


Fig. 1 The velocity-pressure elements used

요함을 지적하였다. 한편, Choi 등[5]은 개방 경계조건과 접착 경계조건에 공통으로 적용할 수 있는 압력 경계조건을 제안 하였다. 반면, 통합 유한요소법은 별도의 압력방정식을 풀지 않고 압력장과 속도장을 동시에 계산하므로, 분리 알고리즘에서 압력방정식의 경계조건으로 인하여 생기는 문제를 근본적으로 피할 수 있고 모든 변수들이 내재적으로 결합되어 있기 때문에 분리 유한요소법에 비해 유동장이 복잡한 경우 좀더 견고한 수렴이력을 보인다는 장점이 있다[8]. 그렇지만, 통합 공식화할 경우 생성된 전체행렬의 예조건화는 분리해법의 그것보다 상당히 복잡하고 많이 알려져 있지 않으며 매 시간단계마다 전체 행렬의 조립(assembly)과 예조건화를 해야 하는데 따른 계산시간의 증가를 피할 수 없다[9]. 이와 같이 분리 알고리즘과 통합 알고리즘을 기반으로 한 유한요소 공식화는 각각 장단점을 가지고 있다. 본 연구에서는 분리 유한요소법의 장점을 유지하면서 동시에 통합 유한요소법의 장점을 취할 수 있는 ‘반-분리 유한요소법(semi-splitting FEM)’을 제안하고 그 성능을 평가하고자 한다.

Fig. 1은 P2P1 유한요소와 P1P1 유한요소를 나타낸다. P2P1 요소를 사용할 경우에 속도 변수는 삼각형 요소의 꼭지점과 각 변의 중간점에서 정의되는 반면, 압력 변수는 3개의 꼭지점에서만 정의되므로 압력변수의 개수가 P1P1 요소에 비해 2차원 문제의 경우는 약 1/4로, 3차원의 경우는 약 1/8로 줄어든다.

본 논문에서는 기존의 P2P1 요소를 사용한 완전-내재적 통합 유한요소법 및 운동방정식의 대류항을 외재적으로 처리함으로써 비선형항의 반복계산이 필요치 않는 반-내재적 통합 유한요소법과 반-분리 유한요소법을 잘 알려진 표준문제(원형 실린더 주위에서의 비정상 유동, 감쇠와류)에 적용함으로써 그 정확도 및 계산시간을 비교하고자 한다.

## 2. 이 론

### 2.1 지배방정식

지배방정식은 비정상 비압축성 유체에 대한 Navier-Stokes 방정식이며 다음과 같다.

$$u_{i,i} = 0, \tag{1}$$

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} + (\tau_{ij})_{,j} + S_i.$$

여기서 ‘·’와 ‘;’는 각각 시간미분 및 공간미분을 의미하며,  $\rho$ ,  $p$ ,  $u_i$ 는 각각 밀도, 압력, 속도의  $i$ 성분이며,  $S_i$ 는 자연대류에서의 부력과 같은 외력항을 나타내고,  $\tau_{ij}$ 는 전단응력으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tau_{ij} = \nu(u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{2}$$

여기서  $\nu$ 는 동점성계수를 나타낸다. 식 (1)에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$u_i |_{\Gamma_1} = b_i, \tag{3}$$

$$\sigma_{ij} n_j |_{\Gamma_2} = t_i.$$

여기서 1은 Dirichlet 경계조건이 부여된 경계부분을 나타내며, 2는 Neumann 경계조건이 부여된 경계부분을 나타낸다.  $b_i$ 는 경계 1에서 지정된 속도벡터를 나타내며,  $t_i$ 는 경계 2에서 지정된 인장력을, 그리고  $n_j$ 는 경계 2에 수직인 단위 법선벡터를 나타낸다.

### 2.2 P2P1 완전-내재적(fully-implicit) 통합 유한요소 공식

P2P1 완전-내재적 통합 유한요소 공식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}(u_j^{n+1} u_{i,j}^{n+1} + u_j^n u_{i,j}^n) = -\frac{1}{\rho} p_{,i}^{n+1} + \frac{1}{2}(\tau_{ij}^{n+1} + \tau_{ij}^n)_{,j}, \tag{4}$$

$$u_{i,i}^{n+1} = 0,$$

여기서  $\Delta t$ 는 시간간격(time step), 상첨자  $n$ 은 이전 시간단계를 나타내며, 대류항과 점성항의 시간적분은 2차 정확도를 가지는 완전 내재적인 Crank-Nicolson 법을 사용하였으며 운동방정식의 비선형 항을 선형화하기 위해서 순차 근사법(successive approximation method)을 사용하였다[10].



### 2.3 P2P1 반-내재적(semi-implicit) 통합 유한 요소 공식

P2P1 반-내재적 통합 유한요소 공식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \left( \frac{3}{2} u_j^n u_{i,j}^{n-1} - \frac{1}{2} u_j^{n-1} u_{i,j}^{n-1} \right) = -\frac{1}{\rho} p_{,i}^{n+1} + \frac{1}{2} (\tau_{ij}^{n+1} + \tau_{ij}^n)_{,j}$$

$$u_{i,i}^{n+1} = 0 \tag{5}$$

여기서  $\Delta t$ 는 시간간격(time step), 대류항의 시간적분은 Adams-Bashforth 방법을, 점성항에 대해서는 Crank-Nicolson 법을 사용하였다.

### 2.3 P2P1 반-분리(semi-splitting) 유한요소 공식

식 (1)의 지배방정식을 반-분리 유한요소법으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\hat{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} (\hat{u}_j \hat{u}_{i,j} + u_j^n u_{i,j}^n) = -\frac{1}{\rho} p_{,i}^n + \frac{1}{2} (\hat{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^n)_{,j} + S_i^n \tag{6a}$$

$$\frac{u_i^* - \hat{u}_i}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} p_{,i}^n \tag{6b}$$

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} p_{,i}^{n+1} \\ u_{i,i}^{n+1} = 0 \end{cases} \tag{6c}$$

대류항과 점성항의 시간적분은 Crank-Nicolson 법을 사용하고 반-분리 유한요소법은 압력에 의한 항을 대류항과 점성항에 의한 항으로부터 분리하며 각 분할단계(fractional step)에서의 중간 속도는 연속방정식을 반드시 만족하지는 않는다. 첫 번째 분할단계에서는 중간속도  $\hat{u}_i$ 를 구하며, 식 (6a)의 중간속도  $\hat{u}_i$ 에 대한 비선형항을 선형화하기 위해서 순차 근사법(successive approximation method)을 사용하였다. 한편, 압력과 속도에 대한 형상 함수는 마지막 분할단계에서 얻어지는 속도와 압력이 연성된 식이 Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi(LBB) 조건을 만족해야 하므로 속도는 입력보다 한 차수 높은 형상 함수를 사용한다. 여기서 LBB조건이란 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 통합 유한요소 해석에서 속도와 압력에 대한 형상 함수의 선택에 있어서 안정된 해를 얻기 위한 형상함수에 대

한 제한조건을 나타내며 자세한 내용은 참고문헌 [10-13]을 참고한다. 반-분리 유한요소법의 마지막 분할단계에서는 연속 방정식을 만족시키기 위해서 압력과 속도가 연성된 안정점 형태의 행렬(saddle-point-type matrix, SPTM)을 쓴다. 이 행렬은 식 (6c)로부터 유도되며, 허용되는 모든 함수  $W \in V$ 와  $q \in P$ 에 대해서 다음의 식을 만족하는  $u_i \in H^1$ 과  $p \in L^2$ 를 찾는다[14]:

$$\int_{\Omega} \left[ W \cdot \rho \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x_j} (-p^{n+1} \delta_{ij}) \right] d\Omega + \int_{\Gamma} W p^{n+1} \delta_{ij} \cdot n_j d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Omega} q \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\Omega = 0 \tag{7}$$

위에서  $W$ 와  $q$ 는 각각 속도와 압력에 대한 형상함수인데 P2P1 요소를 적용하므로 각각 2차와 1차 다항식으로 표현된다. 속도장과 압력장의 해를 동시에 얻는 전통적인 통합 유한요소법과 비교할 때, 식 (6c)는 주어진 격자계에 대하여 한 번만 행렬의 조립과 예조조건화를 하면 되므로 계산의 효율성을 증대시킬 수 있게 된다. P2P1요소를 이용한 반-분리 공식화의 경우 식 (6c)에서 생성된 행렬은 아래와 같은 안정점 형태가 된다.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{g} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

이 때 연속방정식에 압력항이 포함되어 있지 않기 때문에 전 체행렬의 영 구역(zero block)이 생기게 된다. 이 영 구역은 기존의 ILU 예조조건화의 성능을 떨어뜨리기 때문에 연속방정식에 압력변수가 포함되어 있다고 가정하여 ILU 예조조건인자를 수정한 AILU(adaptive ILU)를 적용하였다.

### 2.4 예조조건화 기법

본 연구에서는 행렬에 대한 해법으로 예조조건화된 CG(conjugate gradient) 방법을 채택하였다. 예조조건화란 어떤 선형 시스템을 주어진 반복해법(iterative solvers)으로 풀기 쉽도록 강성 행렬의 성질을 변형하는 것이다. 다양한 종류의 예조조건인자(preconditioner)가 알려져 있는데 그 중 ILU분해(incomplete LU decomposition)는 대각선 예조조건인자(diagonal preconditioner)와 함께 가장 많이 쓰인다. 아래 식에서와 같이 주어진 행렬  $A$ 가 있을 때 예조조건화로서 행렬  $P$ 를 곱해주면 행렬  $A'$ 을 얻게 되고 예조조건화의 결과로 얻은  $A'$ 은  $A$ 보다 작은 조건수(condition number,  $\kappa$ )를 가지게 된다.

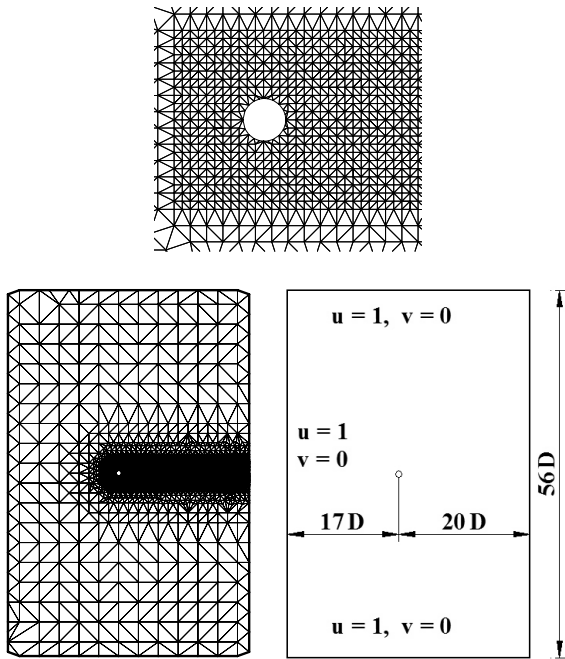


Fig. 2 Nonuniform grid system and the boundary conditions for the flow behind a circular cylinder

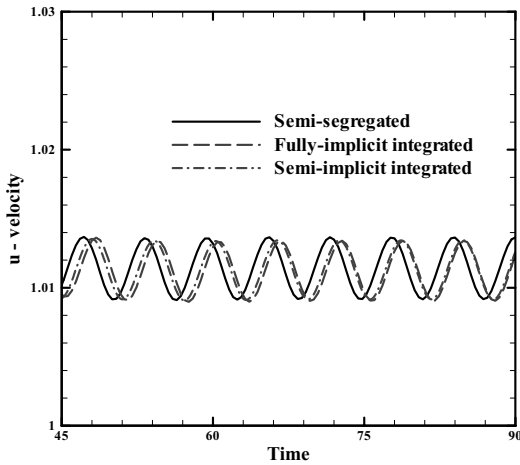


Fig. 3 Temporal evolution of the velocity at a point behind a circular cylinder

$$A\bar{x} = \bar{b},$$

$$PA\bar{x} = P\bar{b},$$

$$A'\bar{x} = \bar{b}'.$$

(9)

여기서  $\kappa(A') < \kappa(A)$  이며, 대부분의 CG계열 해법들의 경우 반복수는  $\sqrt{\kappa}$ 에 비례하므로, 예조건화란 주어진 행렬의  $\kappa$ 를 작게 해 주는 작업이라 말할 수 있다.

PIP1요소를 사용한 분리 알고리즘의 경우에는 운동량방정식과 압력방정식 모두에 대하여 ILU(0) 예조건화를 적용하였다. ILU(0) factorization의 경우는 이 P가 A와 같은 nonzero map을 가지게 된다.

P2P1요소를 이용한 반-분리 공식화의 경우 식 (6c)에서 생성된 행렬은 아래와 같은 안장점 형태가 된다[9]:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}.$$

이 때 연속방정식에 압력항이 포함되어 있지 않기 때문에 전체행렬의 영 구역(zero block)이 생기게 된다. 이 영 구역은 기존의 ILU(0) 예조건화의 성능을 떨어뜨리기 때문에 연속방정식에 압력변수가 포함되어 있다고 가정하여 ILU 예조건인자를 수정한 AILU(adaptive ILU)를 적용하였다. AILU 기법에 대한 자세한 내용은 참고문헌 [9]를 참고한다.

### 3. 수치해석 결과

계산을 수행한 컴퓨터 사양으로 CPU는 PentiumIV 2 GHz이며 Memory는 2 GByte이다. Operating System은 Redhat Linux 7.3이며, Compiler는 Intel(R) Fortran 6.0이고, L2 cache size는 512 kByte이다. 완전-내재적 및 반-내재적 통합 유한요소 공식과 반-분리 유한요소 공식을 원형 실린더 주위에서의 비정상 유동 및 감쇠와류 문제에 대해 그 해의 정확도 및 계산시간을 비교하였다.

#### 3.1 원형 실린더 주위에서의 유동

반-분리 유한요소 공식과 통합 유한요소 공식을 비교하기 위해서 원형 실린더 주위에서의 비정상 상태의 유동에 대해 그 결과를 조사하였다. 사용된 격자계 및 경계조건은 Fig. 2와 같으며, 격자 생성은 상용 프로그램인 ICEM-CFD 4.0을 사용하였고, 요소 수는 6846개이다. 실린더 후류에서의 보다 효과적인 계산을 위해서 이 부분에 좀 더 집중된 격자를 주었으며, D는 실린더의 직경을 의미하고, 계산 영역은 가로, 세로 방향으로 각각 37D, 56D 이며,  $\Delta t = 0.01$ 로 주었다. 먼저, 실린더 뒤쪽에서의 유동의 주기적인 현상을 살펴보기 위해 스트루할수(Strouhal number, St)를 세 기법들에 대하여 비교하였다. 본 논문에서는  $Re_D = 100$ 인 경우에 대해 주기적인 보텍스 shedding 현상을 조사하였다. Fig. 3은 각 기법들에 따른 실린더 뒤

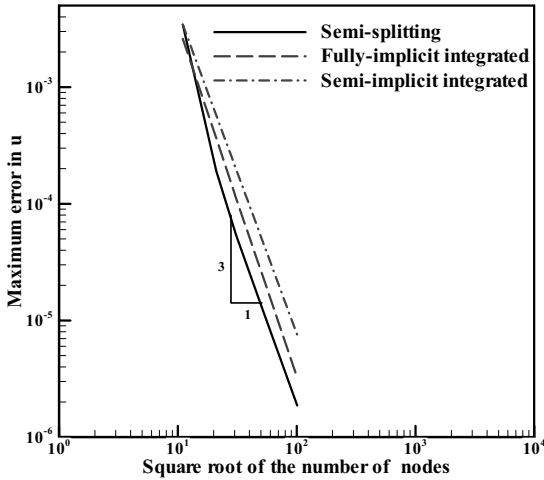


Fig. 4 Maximum errors in u at t = 0.3 ( $\Delta t = 0.001$ )

쪽 입의 한 점에서의 속도  $u$ 에 대한 시간진전을 나타낸다. 실린더 후류에서 주기적인 형태가 보임을 알 수 있으며, 보텍스 shedding 현상의 주기는 세 기법 모두의 경우에  $6.13D/u_{\infty}$ 으로 일치하는 결과를 보인다. Table 1은 각 기법들의 스트롤수를 비교한 것이다. 각 기법들의 결과를 실험적 연구인 Williamson[15]의 결과 및 기존의 수치 결과들[16-18]과 비교하였으며 세 기법 모두 Williamson의 결과와 비교적 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. Table 2는 반-분리 유한요소법의 안장점 형태의 행렬과 통합 유한요소법에서의 안장점 형태의 행렬에서 계산된 조건수(Condition number)로서 예조건화를 사용한 경우에 각 기법의 조건수가 얼마나 감소하는지를 나타낸다. 일반적으로 행렬의 반복해법(iterative solver)에 의한 반복 계산 횟수는 조건수의 제곱근에 비례하므로 조건수가 작을수록 같은 조건하에서 그 계산속도가 빠를 것임을 예측할 수 있다. 마지막으로 세 기법의 계산시간을 살펴보면 Table 3과 같다. P2P1 반-분리 유한요소 공식이 반-내재적 통합 유한요소 공식과 비교해 약 3.5배 정도 빨랐으며, 완전-내재적 통합 유한요소 공식에 비해서는 15배 이상 빠른 계산속도를 보였다. 반-내재적 통합 유한요소 공식이 완전-내재적 통합 유한요소 공식보다 계산시간이 적게 걸린 이유는 반-내재적 통합 유한요소 공식은 완전-내재적 통합 유한요소 공식과는 달리 대류항의 비선형 항을 외재적으로 풀기 때문에 반복계산을 할 필요가 없어지며 이에 따른 계산시간의 감소를 가져오고 있는 것으로 판단되며, 반-분리 유한요소 공식이 통합 유한요소 공식을 사용할 때에 비해 행렬의 크기가 작고 이에 따른 반복해법의 계산횟수가 줄어들 뿐만 아니라 매 시간 단계마다 행렬의 조립과 예조건화를 하지 않아도 되기 때문에 통합 유한요소 공식에 비해 계산속도가 빠른 것이라 여겨진다.

### 3.2 감쇠와류 (Decaying Vortex)

이 절에서는 다음과 같이 해가 정의된 2차원 비정상 유동에 대해 각 기법들의 공간 정확도를 비교하였다[19]:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= -\cos \pi x \cdot \sin \pi y \cdot e^{-2\pi^2 t / Re}, \\
 v(x, y, t) &= \sin \pi x \cdot \cos \pi y \cdot e^{-2\pi t / Re}, \\
 p(x, y, t) &= -0.25(\cos 2\pi x + \cos 2\pi y)e^{-4\pi^2 t / Re}.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

$Re = UL/v = 10$ 이며, 여기서  $U$ 와  $L$ 은 각각 초기 최대속도와 와류의 크기이고, 계산 영역은  $-1/2 = (x, y) = 1/2$  이다[19]. 초기 속도분포와 압력분포 및 경계조건은 식 (11)에서의 이론해를 이용하여 구할 수 있으며, 균일하게 분포된 각각 100, 400, 900, 2500, 10000개의 3각형 요소를 가지고 계산을 수행하였다. 공간 정확도를 계산하기 위해서 시간간격에 대한 영향을 최소화하고자 시간간격은 공간간격에 비해 충분히 작게

Table 1 Comparison of the present results with others for the flow past a circular cylinder

Reference	Method	St
Present study	Semi-splitting	0.163
Present study	Fully implicit integrated	0.163
Present study	Semi-implicit integrated	0.163
Williamson [15]		0.164
Braza et al. [16]	FVM (13530 grid points)	0.160
Karniadakis et al. [17]	Spectral element method	0.179
Kwon and Choi [18]	FDM (321×321)	0.165

Table 2 Condition number

	Without pre-conditioning	AILU pre-conditioning
Semi-splitting FEM	0.47109E+07	0.87869E+02
Fully-implicit integrated FEM	0.45694E+07	0.93114E+02
Semi-implicit integrated FEM	0.44693E+07	0.92933E+02

Table 3 CPU time for the flow past a circular cylinder

Method	Method
Semi-splitting FEM	5200
Fully implicit integrated FEM	78600
Semi-implicit integrated FEM	18000



주었다( $\Delta t = 0.001$ )[19]. 각 기법들에 대하여 격자 크기를 변화시켜 가면서 오차를 측정함으로써 공간 정확도의 기울기를 구하였으며, 그 결과는 Fig. 4와 같다. 이미 잘 알려진 바와 같이 P2P1요소를 사용한 경우는 3차 공간 정확도를 가짐을 확인할 수 있다[20].

#### 4. 결 론

비압축성 Navier-Stokes 방정식을 해석하기 위해서 P2P1 반-분리 유한요소 공식을 제안하고 실린더 주위의 유동문제에 대하여 정확도 및 계산시간을 비교하였다.

세 기법이 속도 및 압력에 대하여 동일한 정확도의 형상 함수를 사용하기 때문에 역시 동일한 정확도를 보였다. 그러나 계산시간을 살펴보면 반-분리 유한요소 공식이 반-내재적 유한요소 공식과 비교하여 3.5배, 완전-내재적 통합 유한요소 공식과 비교하여 15배 정도 빨랐으며, 이는 기존의 통합 유한요소 공식과 비교했을 때 조건수가 작아서 반복해법의 반복 계산 횟수가 작을 뿐만 아니라, 매 시간단계마다 행렬의 조립과 예조건화를 하지 않아도 되기 때문에 상당히 계산시간의 단축을 가져왔음을 확인하였다.

고찰된 표준문제에서 확인할 수 있듯이, 반-분리 유한요소 공식이 기존의 통합 유한요소 공식에 비해 정확도를 희생시키지 않으면서도 계산시간에서는 상당한 장점을 가지고 있음을 알 수 있다

#### 후 기

이 연구는 지식경제부의 차세대 신기술 개발사업(과제번호 10028436)과 한국과학재단 특정기초사업(R01-2007-000-20691-0)의 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

#### 참고문헌

- [1] 1990, Tezduyar, T.E. et al., "Incompressible flow computations based on the vorticity-stream function and velocity-pressure formulations," *Comput. & Structures*, Vol.35, pp.445-472.
- [2] 1991, Tezduyar, T.E. et al., "Time-accurate incompressible flow computations with quadrilateral velocity-pressure elements," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.87, pp.363-384.
- [3] 1982, Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R., "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.32, pp.199-259.
- [4] 1992, Codina, R. et al., "The intrinsic time for the streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation using quadratic elements," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.94, pp.239-262.
- [5] 1997, Choi, H.G. et al., "A fractional four-step finite element formulation of the unsteady incompressible Navier-Stokes equations using SUPG and linear equal-order element methods," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.143, pp.333-348.
- [6] 1992, Ramaswamy, B. and Jue, T.C., "Some recent trends and developments in finite element analysis for incompressible thermal flows," *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.35, pp.671-707.
- [7] 1994, Tabarrok, B. and Su, J., "Semi-implicit Taylor-Galerkin finite element methods for incompressible viscous flows," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.117, pp.391-410.
- [8] 1996, Hanby, R.F. et al., "A comparison of coupled and segregated iterative solution techniques for incompressible swirling flow," *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.22, pp.353-373.
- [9] 2002, Nam, Y.S. et al., "AILU preconditioning for the finite element formulation of the incompressible Navier-Stokes equations," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.191, pp.4323-4339.
- [10] 1986, Carey, G.F. and Oden, J.T., "Finite elements, fluid mechanics," Vol.6, *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., U.S.A.*
- [11] 1971, Babuška, I., "Errors bounds for finite element method," *Numer. Math.*, Vol.16, pp.322-333.
- [12] 1976, Brezzi, F., "On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers," *RAIRO, Ser. Rouge Anal. Numer.* Vol.8, R-2.
- [13] 1986, Hughes, T.J.R. et al., "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of Stokes problem accommodating equal order interpolations," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.59, pp.85-99.
- [14] 2004, Namkoong, K. et al., "Numerical analysis of



- two-dimensional motion of a freely falling circular cylinder in an infinite fluid," *Trans. of the KSME (B)*, Vol.28, No.6, pp.713-725.
- [15] 1989, Williamson, C.H.K., "Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers," *J. Fluid Mech.*, Vol.206, pp.579-627.
- [16] 1986, Braza, M. et al., "Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder," *J. Fluid. Mech.*, Vol.165, pp.79-130.
- [17] 1989, Karniadakis, G.E. and Triantafyllou, G.S., "Frequency selection and asymptotic states in laminar wakes," *J. Fluid Mech.*, Vol.199, pp.441-469.
- [18] 1994, Kwon, K. and Choi, H., "A passive control of vortex shedding using a splitter plate attached to a circular cylinder," *Proceedings of the KSME 1994 Fall Annual Meeting*, pp.502-507.
- [19] 2000, Kim, D. and Choi, H., "A second-order time-accurate finite volume method for unsteady incompressible flow on hybrid unstructured grids," *J. Comput. Phys.*, Vol.162, pp.411-428.
- [20] 1983, Becker, E.B. et al., "Finite elements, an introduction," Vol.1, *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., U.S.A.*