



반사경 내부 유동의 초점 형성에 관한 고해상도 수치 해석

정 연 규,¹ 장 근 식^{*2}

A HIGH-RESOLUTION NUMERICAL ANALYSIS OF SHOCK FOCUSING IN CONCAVE REFLECTORS

Y.G. Jung¹ and K.S. Chang^{*2}

Shock focusing is related with explosive release of shock wave energy on a narrow spot in a short duration of time triggering a spontaneous high pressure near the focal point. It is well known that reflection of planar incident shock wave from the metallic concave mirror such as ellipsoidal, paraboloidal or hemispherical cavities will focus on a focal point. We intend to improve the computational results using a wave propagation algorithm and to resolve the mushroom-like structure. For computation of the concave cavity flow, it is not easy to use a single-block mesh because of the many singular points in geometry and coordinates. We have employed a uniform Cartesian-grid method for the wave propagation algorithm.

Key Words : 초점형성(Shock focusing), 파동 전파 알고리즘(Wave Propagation Algorithm), 직교격자 방법(Cartesian-Grid Method), 충격파 반사(Shock Reflection)

1. 서 론

입사 충격파가 반사경에서 반사되면 초점 부근에서 국부적으로 고압 영역이 형성된다. 이러한 현상을 초점 형성(shock focusing)이라 하며, 이는 공학, 의료 분야에서 널리 이용되고 있다.

기하 음향학과 같은 선형 이론으로는 강한 비선형성을 지닌 이 현상을 해석하는 데 많은 어려움이 있다. 보다 정확한 해석을 위해서는 2차 이상의 정확도를 가지는 충격파 포획 스킴을 사용해야 한다. 최[2]는 Yee & Harten의 풍상 TVD 스킴을 유한 체적법으로 확장시켜 2차원과 축대칭 포물형 반사경에서의 유동 현상을 수치해석하였다. 압력 증폭과 삼중점의 궤적은 실험[1]과 매우 일치하는 결과를 얻었지만, 초점 형성 이후에 일어나는 버섯 모양(mushroom-like)의 제트 구조를 잡아내지는 못했다.

Skews & Kleine[6]는 반원형 반사경에 충격파를 입사시켜 충격파 반사(shock reflection)와 초점 형성 이후의 내부 유동

사진을 실시간으로 측정하였다. 또한, 초점 형성 이후의 유동 불안정성에 대해 언급하였다.

Liska & Wendroff[3]은 널리 쓰이는 8개의 알고리즘으로 불연속면을 가지는 여러 가지 리만 문제를 풀어 서로의 효율을 비교하였다. 벤치마크 문제에 따라 각 스킴의 장단점이 있는데, 전반적으로 정확성면에서 WENO 스킴과 CLAWPACK[5]이 우수한 결과를 보였다. 5차의 공간 정확도와 3차의 시간 정확도를 가진 WENO 스킴에 비해 LeVeque[4]가 제안한 파동 전파 알고리즘(wave propagation algorithm)은 정확도 면에서 약간 떨어지지만, 계산 시간의 효율면에서는 WENO 스킴 보다 좋다(참고문헌[3]의 Table 4.2).

본 연구에서는 수치적 진동 없이 충격파와 미끄럼선 같은 불연속면을 잘 포획할 수 있는 파동 전파 알고리즘을 사용하여 고해상도의 수치해석을 수행하고자 한다.

Forrer[7]는 비점성 벽 경계조건의 특성에 착안하여 2차의 벽 경계조건을 적용할 수 있는 Cartesian-grid 방법을 제안하였다. 본 연구에서는 충격파관 내에 설치된 포물형 반사경과 반원형 반사경의 내부 유동을 해석하고자 한다. 정렬 격자법으로 격자계를 구성할 때, 반사경의 모서리와 극점에서 격자의 심한 왜곡현상이 발생하여 격자간의 직교성이 심하게 훼손된다. 이러한 문제를 해결하기 위해 Forrer[7]가 제안한 방법을 사용하여 보다 정확한 해석을 하고자 한다.

1 학생회원, KAIST 항공우주공학과

2 정회원, KAIST 항공우주공학과

* Corresponding author, E-mail: kschang@kaist.ac.kr



2. 수치적 방법

포물경과 반원경에서 충격파가 반사되어 초점을 형성하는 과정을 수치해석하기 위하여 파동 전파 알고리즘을 사용하여 2차원 압축성 오일러 방정식(1)을 풀었다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\rho E + p) \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(\rho E + p) \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

$$E = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \quad p = \rho(\gamma - 1)e$$

각 반사경의 기하학적 형상은 비교적 간단하지만 일반 좌표계로 격자를 구성하면 심한 비틀림(skewness)이 발생하여 격자 간의 직교성이 저하된다. 또한, 고해상도 파동 전파 알고리즘(high-resolution wave propagation algorithm)은 mapping 식을 이용하여 비정규 격자계(non-uniform grid)에서도 적용 가능하지만, 직교 좌표계(cartesian coordinate)에서 충격파와 불연 속면을 잘 해석하는 특징이 있다. 따라서, 격자계 문제를 해결하고 알고리즘의 특성을 살리기 위해 Cartesian-grid method를 사용하였다.

2.1 고해상도 파동 전파 알고리즘

LeVeque[4]가 제안한 고해상도 파동 전파 알고리즘은 Roe[4]의 Fluctuation-and-signal formulation을 바탕으로 개발되었다. 자코비안(Jacobian) 행렬의 고유치는 파동의 전파속도를 나타내고, 고유 벡터와 파동 강도(wave strength)를 이용하여 각 셀의 경계면에서 Riemann 해를 구한다.

$$Q_{i,j}^{n+1} = Q_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A^+ \Delta Q_{i-1/2,j} + A^- \Delta Q_{i+1/2,j}) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (B^+ \Delta Q_{i,j-1/2} + B^- \Delta Q_{i,j+1/2}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{F}_{i+1/2,j} - \tilde{F}_{i-1/2,j}) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\tilde{G}_{i,j+1/2} - \tilde{G}_{i,j-1/2}) \quad (2)$$

Table 1 Computational domain

	Parabolic	Semi-circle
Domain size (Non-dimen.)	[-1.9, 1.1] × [0, 3.375]	[-1, 1.022] × [0, 1.173]
Mesh size	600×675	674×391

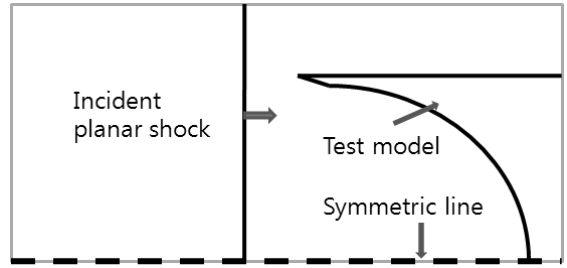


Fig. 1 Computational domain of semi-circle reflector.

1차의 공간 정확도를 나타내는 Fluctuation 항은 다음과 같다.

$$A^- \Delta Q_{i-1/2,j} = \sum_{p=1}^m (s_{i-1/2,j}^p)^- W_{i-1/2,j}^p$$

$$A^+ \Delta Q_{i+1/2,j} = \sum_{p=1}^m (s_{i+1/2,j}^p)^+ W_{i+1/2,j}^p \quad (3)$$

$$B^- \Delta Q_{i,j-1/2} = \sum_{p=1}^m (s_{i,j-1/2}^p)^- W_{i,j-1/2}^p$$

$$B^+ \Delta Q_{i,j+1/2} = \sum_{p=1}^m (s_{i,j+1/2}^p)^+ W_{i,j+1/2}^p$$

플럭스 제한자(van Leer limiter or minmod limiter)를 사용하여 2차의 공간 정확도를 구현하는 Correction 항은 다음과 같다.

$$\tilde{F}_{i-1/2,j} = \tilde{F}_{i-1/2,j} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m |s_{i-1/2,j}^p| \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |s_{i-1/2,j}^p| \right) \tilde{W}_{i-1/2,j}^p$$

파동 전파 알고리즘은 이차원 문제에서 비분할(unsplit)법을 사용하여 플럭스를 업데이트 시킨다. 위 식을 사용하여 수평 방향으로 전파되는 파동의 영향에 의한 플럭스를 계산하고, 이와 유사하게 수직 방향으로 플럭스 $\tilde{G}_{i,j\pm 1/2}$ 를 계산하여 보존 변수를 업데이트시킨다.

2.2 Cartesian grid method

Forrer & Jeltsch[7]은 비점성 유동에서는 벽 경계(wall boundary)에서 반사조건이 성립된다는 사실에 착안하여 2차의 정확도를 가지는 임베디드 직교격자 방법(embedded cartesian grid method)을 제안했다. 일정한 직교 격자에 물체를 놓고 물체의 경계에 따라 유동 셀, 바디 셀, 경계 셀로 나눈다. 바디 셀은 계산 과정에서 제외하고 경계 셀에서는 물체의 형상 정보를 가진다. 물체의 경계와 셀의 교차에 의해 경계가 절단(geometry segment)된다. 절단선은 물체의 형상에 따라 곡선일 수도 있지만, 선분이라는 가정 하에 절단선의 기울기(θ)를 구

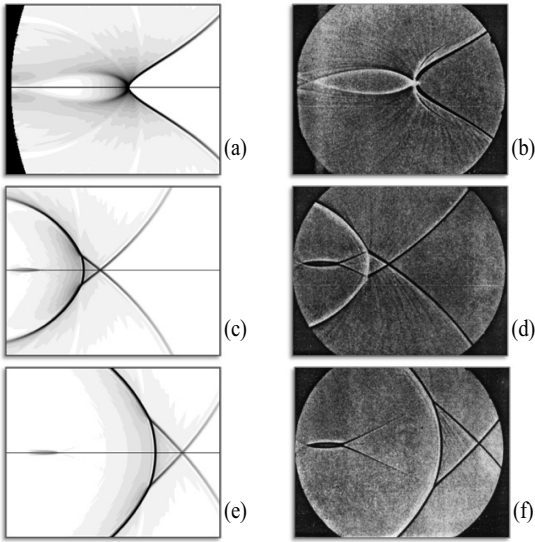


Fig. 2 Flow patterns at shock strength, 1.1. Left parts(a,c,e); present computational schlieren images, right parts(b,d,f); experimental shadowgraph (Sturtevant & Kulkarny[1])

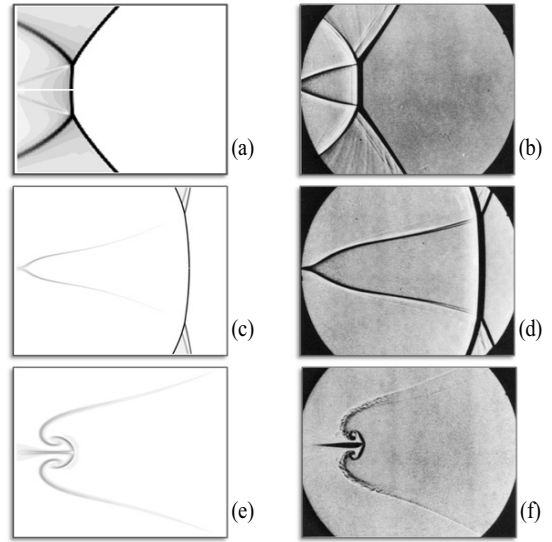


Fig. 3 Flow patterns at shock strength, 1.3. Left parts(a,c,e); present computational schlieren images, right parts(b,d,f); experimental shadowgraph (Sturtevant & Kulkarny[1])

한다. 다음의 행렬 변환식을 통해 경계 조건을 정의한다.

$$U_{ghost\ cell} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & 0 & 0 \\ 0 \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U_{flow\ cell} \quad (4)$$

2.3 격자계 및 계산 조건

본 연구에서 사용된 격자계를 Table 1에 나타내었다.

포물경의 경우 기하 초점거리 60.3mm로 무차원화시켰고 [1], 반원경의 경우 64mm(실험 모델의 반경,[6])로 무차원화시켰다. 참고문헌[2]에서 사용된 밀집 격자의 평균 크기는 0.5mm이지만, 본 연구에서는 0.3015mm로 설정하였다. Fig. 1은 반원경의 계산 영역을 나타낸다. 충격파가 좌측에서 우측으로 진행하고, 충격파의 전후 영역은 Rankine-Hugoniot 관계식을 이용해서 초기 조건을 설정하였다.

좌우 경계는 유출입 조건을 아래의 대칭 조건을 위는 반사 조건을 적용하여 계산을 수행하였다.

3. 수치 해석 결과 및 분석

포물경과 반원경에서의 입사 충격파의 반사와 초점 형성 현상을 수치 해석하였다. 수치 결과는 다음의 식을 사용하여 쉐리렌 이미지로 나타내었다(참고문헌[8]).

$$|\nabla\rho| = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2}, \phi = \exp\left(-k\frac{|\nabla\rho|}{|\nabla\rho|_{max}}\right) \quad (5)$$

3.1 포물경 내부에서의 평면 충격파 반사

Sturtevant & Kulkarny[1]는 포물경에 평면충격파를 입사시켜 기하학적 초점 부근의 유동을 실험적으로 관찰하였다. 이후로 다수의 실험적, 수치적 연구가 이루어졌다.

본 연구에서는 고해상도의 수치 기법을 이용하여 초점현상의 전후에 발생하는 유동 현상들을 참고문헌[1]의 실험결과와 비교해 보고자 한다. 마하수 1.1, 1.2, 1.3에 대해서 수치해석을 수행하였다.

Fig. 2는 충격파 강도가 1.1일 때의 유동 형태를 나타낸 것이다. Fig. 2(b),(d),(f)는 상대적인 시간으로 각각 0.05, 0.12, 0.19 ms 일 때의 음영사진이다.

Fig. 2(a)는 삼중점이 포물경의 대칭축에서 만나는 순간을 나타낸 것이다. 이때 국부적으로 압력이 높아진다. (c),(e)에서는 삼중점에서 발생한 미끄럼선이 미약하게 나타남을 알 수 있다.

Fig. 3은 충격파 강도가 1.3일 때의 유동 형태를 보여주고 있는데, 대칭축에서 삼중점이 교차한 후 mach stem을 형성하는 것을 보여주고 있다. 시간이 지남에 따라 mach stem이 길어짐을 알 수 있고, Fig. 3(e)에서 버섯 모양의 와류와 제트가 형성됨을 알 수 있다. 참고 문헌[2]에서는 이러한 현상을 나타내지 못했지만 고해상도의 파동 전파 알고리즘을 사용한

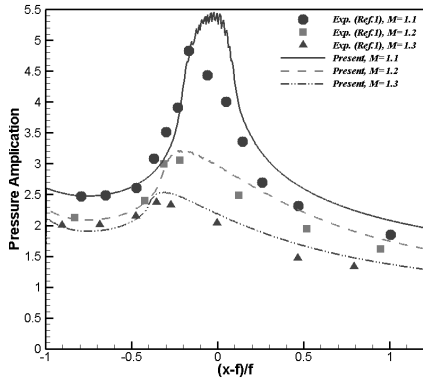


Fig. 4 Pressure amplification

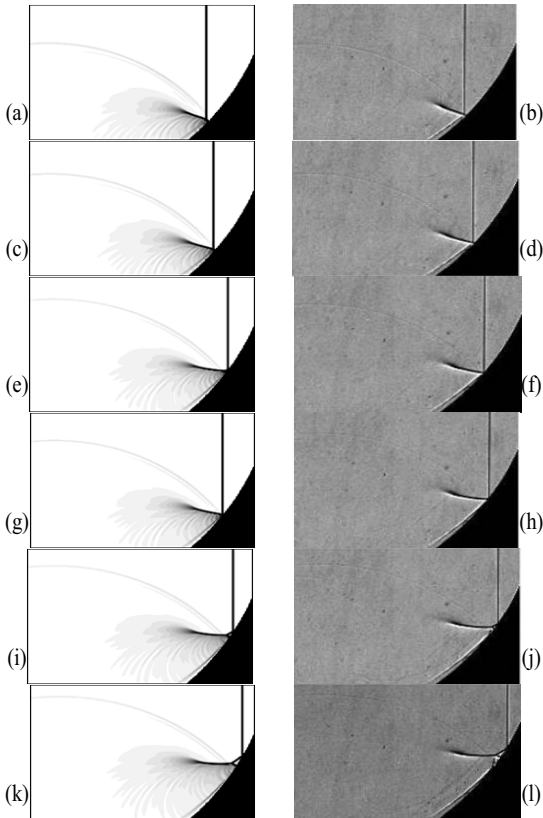


Fig. 5 Shock reflection transition. $M = 1.24$. Left: present computational schlieren images; right: Shadow images excerpted from Skews&Kleine[6]

본 연구에서는 미끄럼선의 상호작용으로 발생하는 jet-shooting 현상을 나타낼 수 있었다.

Fig. 4는 대칭축을 따라서 시간의 변화에 따른 각 지점의 압력 증폭을 그래프로 나타내었다. x 축은 초점거리로 무차원

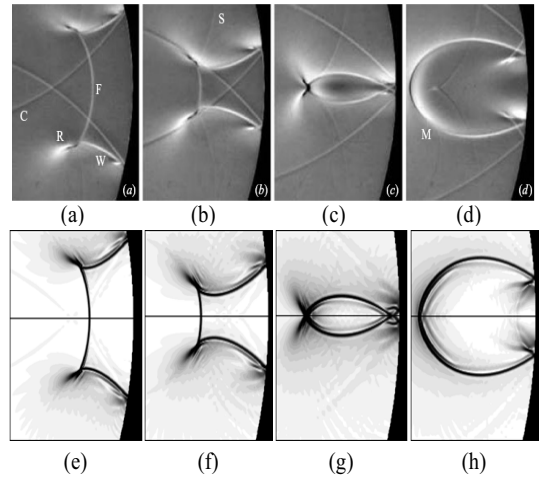


Fig. 6 Schlieren images of a $M=1.04$ shock ($20\mu s$ / image). Upper: experimental images excerpted from Skews&Kleine[6]; lower: present computation

화된 값인데, $x'=0$ 은 기하학적 초점 위치이고, $x'=-1$ 은 포물경의 극점에 해당된다. 그래프를 살펴보면 포물경의 내부 유동은 실험치와 일치하지만 외부($x'>0.29$)는 실험값과 차이를 보인다. 실험[1]에서는 원형 충격파관 내에 2차원 실험 모델을 사용하였는데, 본 연구에서는 2차원 계산을 수행하고 있으므로 실험과 똑같이 재현할 수는 없었다.

3.2 반원경 내부에서의 평면 충격파 반사

Fig. 5는 입사 충격파가 반원경을 따라서 전파되는 과정에서 일어나는 충격파 반사(shock reflection)를 도시한 것이다 ($M=1.24$). 왼쪽 열은 수치적 쉐리엔 사진이고, 오른쪽 열은 참고문헌[6]에서 발췌한 음영사진이다. 이미지는 $4\mu s$ 간격으로 나타내었다. Fig. 5(a)에서 마하 반사(mach reflection)를 관찰할 수 있다. 마하 스템과 2개의 충격파, 그리고 미끄럼선이 뚜렷이 나타난다.

Fig. 5(c),(e)는 삼중점이 오른쪽으로 진행됨에 따라 마하 스템이 짧아지는 것을 볼 수 있고, 결국 (i)에서 천이 정규 반사(transitioned regular reflection)가 나타난다. (k)에서 입사파, 반사파, 2차 반사파, 벽면에서 생긴 파, 미끄럼선이 나타난다.

Fig. 6의 (a),(b),(c),(d)는 참고문헌[6]에서 발췌하였다 ($M=1.04$). "C"는 반사경의 모서리에서 발생한 코너쇼크(corner shock)이고, "F"는 평면 입사충격파가 반원경의 극점에서 반사된 파이고, "R"은 마하반사에서 생겨난 반사파, "W"는 천이 정규 반사에서 발생한 반사파이다.

Fig. 6(e)에서 R,F,W를 뚜렷이 관찰할 수 있고, C는 희미하게 나타난다. (f)는 W가 수렴하는 과정이고 이에 따라 삼중점이 가까워지고 있다. (g)에서는 W가 서로 교차해서 전파되고

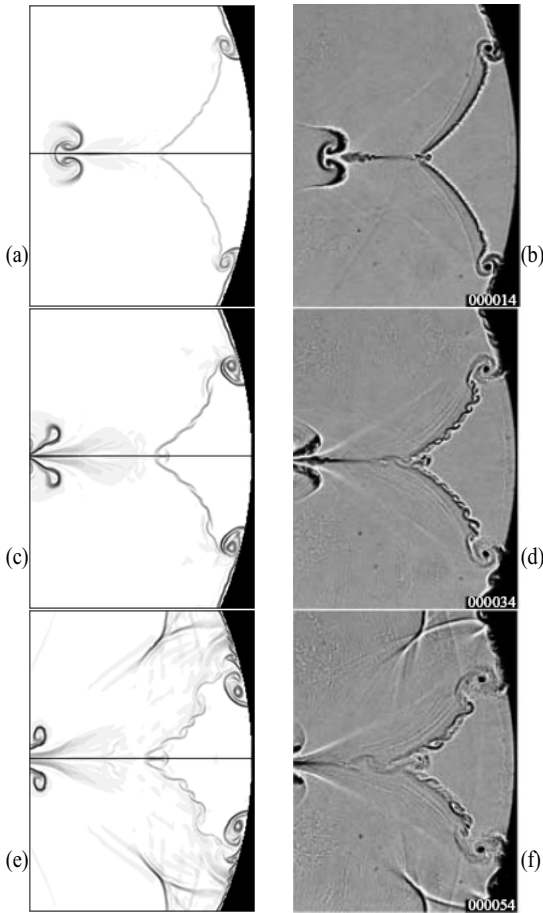


Fig.7 The development of Kelvin-Helmholtz instabilities. $M=1.38$. Left: present results ; right: experimental images excerpted from Skews&Kleine[6]

삼중점이 만나는 순간이다. 이 때 초점 형성이 일어난다. (h)에서는 W, R, 삼중점이 합쳐져서 하나의 충격파(M)를 이룬다. (d)에서는 M 내부에 천이 정규 반사에서 발생한 미끄럼선이 보이는데, (h)에서도 미끄럼선이 존재하는 것을 볼 수 있다.

Fig. 7은 마하수 1.38일 때 입의의 시간에서 200 μ s 씩 증가시켜 나타낸 것이다. 반원경 표면에서 보이는 와류는 마하 반사와 천이 정규 반사에서 발생한 미끄럼선들의 상호 작용으

Table 2 Pressure amplification

Mach strength	Maximum amplification	Focus position
1.04	1.8856	0.5765
1.24	4.2312	0.7083
1.34	4.8889	0.7539
1.38	5.2807	0.7746

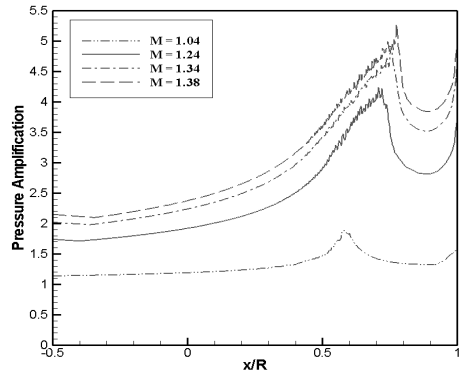


Fig. 8 Pressure amplification of semi-circle reflector

로 나타난 것이다. 실험에서 보이는 버섯 모양의 제트와 주위의 와류를 본 계산에서도 확인 할 수 있었다

Fig. 8은 대칭축을 따라서 시간의 변화에 따른 각 지점의 최대 압력 증폭을 그래프로 나타내었다. 각 지점에서의 최대 압력을 초기 압력으로 나누어 무차원화 시켰다. 마하수가 증가함에 따라 압력 증폭이 커지고, 공기역학적 초점 위치가 반사경에 가까워짐을 확인할 수 있었다(Table 2).

4. 결 론

평면 충격파가 포물경과 반원경 내부로 입사되어 반사 초점 형성이 일어나는 현상을 해석하기 위해 파동 전파 알고리즘과 cartesian grid method를 사용하였다. 실험 사진과 비교 분석을 통해 본 연구에서 계산한 방법이 초점 형성 과정을 해석하는데 효율적임을 알 수 있었다. 마하 반사와 천이 정규 반사에서 생겨난 미끄럼선들에 의해 버섯 모양의 제트와 와류가 형성되고 이들은 초점 형성이 일어난 이후 유동의 안정성에 영향을 미치는 것을 확인할 수 있었다.

참고문헌

- [1] 1976, Sturtevant, B. and Kulkarny, V.A., "The focusing of weak shock waves," *J. Fluids Mech.*, Vol.73, pp.651-671.
- [2] 1996, Choi, H.S. and Baek, J.H., "Computations of nonlinear wave interaction in shock-wave focusing process using finite volume TVD schemes," *Computers & Fluids*, Vol.25-5, pp.509-525.
- [3] 2003, Liska, R. and Wendroff, B., "Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations," *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol.25, pp.995-1017.



- [4] 1997, LeVeque, R., "Wave propagation algorithms for multidimensional hyperbolic systems," *J. Comput. Physics*, Vol.131, pp.327-353.
- [5] LeVeque, R., CLAWPACK software, <http://www.amath.washington.edu/~rjl/clawpack.html>
- [6] 2007, Skews, B.W. and Kleine, H., "Flow features resulting from shock wave impact on a cylindrical cavity," *J. Fluid Mech.*, Vol.580, pp.481-493.
- [7] 1998, Forrer, H. and Jeltsch, R., "A higher-order boundary treatment for cartesian-grid methods," *J. Comput. Physics*, Vol.140, pp.259-277.
- [8] 1996, Quirk, J.J. and Karni, S., "On the dynamics of a shock-bubble interaction," *J. Fluid Mech.*, Vol.318, pp.129-163.