



Redistance 방정식의 경계조건이 슬로싱 문제의 level set 해석에 미치는 영향

최 형 권*¹

EFFECT OF THE BOUNDARY CONDITION OF REDISTANCE EQUATION ON THE LEVEL SET SOLUTION OF SLOSHING PROBLEM

H. G. Choi*¹

The effect of the Dirichlet boundary condition for the redistance equation of level set method on the solution of sloshing problem is investigated by adopting four Dirichlet boundary conditions. For the solution of the incompressible Navier-Stokes equations, PIP1 four-step fractional finite element method is employed and a least-square finite element method is used for the solutions of the two hyperbolic type equations of level set method; advection and redistance equation. ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) method is used to deal with a moving computational domain. It has been shown that the free surface motion in a sloshing tank is strongly dependent on the type of the Dirichlet boundary condition and the results of broken dam and sloshing problems using various Dirichlet boundary conditions are discussed and compared with the existing experimental results.

Key Words : 레벨셋 방법(Level Set Method), 재초기화(Redistance), 경계조건(Boundary condition), 슬로싱(Sloshing), 최소오차자승(Least Square)

1. 서 론

자유표면의 시간에 따른 형상의 변화를 수치적으로 해석하는 방법은 매우 많은 연구자들에 의하여 연구되어 왔다 그 중에서 많이 사용되고 있는 방법으로는 volume of fluid (VOF)[1]나 front-tracking 방법[2] 및 body fitted method 방법[3] 등이 있다. Level-set 방법은 1990년 대 초에 제안된[4] 이후 많은 연구자들에 의해서 자유표면의 수치해석을 위한 기법으로 이용되고 있다.

Level-set 방법은 VOF 방법과 함께 대표적인 자유표면포착(interface capturing) 방법으로 배경격자계에서 정의된 level-set 함수의 분포로부터 자유표면이 포착된다 임의의 공간에서의 Level-set 함수의 값은 그 지점에서부터 상경계면까지의 최단 거리로 정의된다. 매 시간마다 갱신되는 상경계면을 포착하기 위해서는 level-set 함수의 이송방정식을 해석해야 한다. 그런

데 일반적으로 level-set 함수의 이송방정식을 풀 후에 자유표면이 갱신이 되면 임의의 지점에서의 level-set 함수의 값은 상경계면까지의 최단거리라는 조건을 위배하게 된다 따라서, level-set 함수의 이송방정식을 풀 후에 임의의 지점에서의 level-set 함수의 값을 상경계면까지의 최단거리라는 조건이 만족하도록 수정할 필요가 있다. 이 작업을 위해 풀어야 할 식이 redistance 방정식이다. 한편, 이 방정식은 쌍곡선형 방정식으로 바른 해법을 위해서는 상경계면 근처에서의 level-set 함수의 값을 고정하여 Dirichlet 경계조건을 부여하는 것이 필요하다. Pillapakka과 Singh[5] 등은 redistance 방정식의 Dirichlet 경계조건을 적용하기 위하여 상경계면을 포함하는 유한요소 에 속한 노드들의 level-set 함수 값을 Dirichlet 경계조건 값으로 지정하였다. 본 연구에서는 redistance 방정식의 Dirichlet 경계조건을 지정하는 몇 가지 방법을 제안하고 두 가지 문제를 해석하여 각각의 경계조건 부여 방법들의 특성을 파악하고자 한다.

본 논문의 2장에서는 redistance 방정식의 Dirichlet 경계조건 부여 방법들과 level-set 을 이용한 유한요소 수치해석

¹ 정회원, 금오공과대학교 기계공학부

* E-mail: kdj@kumoh.ac.kr



방법론에 대하여 설명한다. 3장에서는 수치해석 결과로 3차원 붕괴 댐 문제와 3차원 탱크내의 슬로싱 문제를 해석한 수치 결과를 고찰하여 적합한 경계조건 부여 방법을 제시한다. 해석된 결과는 기존의 실험결과와 비교한다. 마지막으로 4장에서는 결론을 유도한다.

2. 수치해석 방법

2.1 Level set 유한요소 해석의 지배방정식

비압축성 유동장의 자유표면 거동을 해석하기 위하여 사용된 level set 지배방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\rho(\phi) \frac{D\phi}{Dt} = \nabla p + \nabla \cdot (2\mu(\phi)D) - \sigma\kappa(\phi)\delta(\phi)\nabla\phi + \rho(\phi)\bar{g} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

식 (1)은 4단계 분리 유한요소법을 이용하여 이산화 된다. 식 (1)의 유한요소 공식화에 대한 자세한 설명은 참고문헌[6]으로 대신한다. 식 (1)을 풀어서 자유표면을 가지는 유동장의 속도장을 구한 다음에는 다음과 같은 level-set 함수에 대한 이송 방정식을 풀어서 상경계면을 갱신한다.

$$\phi_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\phi = 0 \quad (2)$$

쌍곡선형 형태인 위의 식 (2)는 최소자승법을 적용하여 다음과 같이 이산화 된다.

$$\int (N_i + \Delta t \bar{u} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \Delta t \bar{v} \frac{\partial N_i}{\partial y}) \left(N_j + \Delta t \bar{u} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \Delta t \bar{v} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \phi_j^{n+1} = \int (N_i + \Delta t \bar{u} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \Delta t \bar{v} \frac{\partial N_i}{\partial y}) \sum \phi_j^n N_j d\Omega \quad (3)$$

식 (3)의 유도에 대한 상세한 설명은 참고문헌[6]을 참고한다. 위의 식 (3)에서 속도장은 식 (1)의 해를 사용한다. 따라서, 지배방정식은 선형방정식으로 최소자승 유한요소 이산화는 비대칭형태의 행렬을 제공한다. Level-set 방법을 이용한 자유표면해석의 마지막 단계에서는 다음의 redistance 방정식을 풀어야 한다.

$$\phi_t + C_i \cdot \nabla\phi = S_o \quad (4)$$

위의 식은 최소자승 유한요소 공식화는 다음과 같이 표시된다.

$$\int (N_i N_j + N_i \Delta t C_{\kappa} \frac{\partial N_j}{\partial x_{\kappa}} + \Delta t C_{\kappa} \frac{\partial N_i}{\partial x_{\kappa}} N_j + \Delta t^2 C_{\kappa} \frac{\partial N_i}{\partial x_{\kappa}} C_{\ell} \frac{\partial N_j}{\partial x_{\ell}}) \phi^{n+1} d\Omega = \int (N_i + \Delta t C_i \cdot \nabla N_i) (\phi^n + \Delta t S_o) d\Omega \quad (5)$$

식 (5)의 유도에 대한 상세한 설명은 참고문헌[6]을 참고한다. 이전 유한요소 공식화를 이용한 선형연구들과 비교하여 식 (5)의 가장 중요한 특징은 유한요소 이산화에 대하여 경계조건 항이 나타나지 않는다는 점이다.

2.2 Redistance 방정식의 경계조건

2.1 절의 식 (4)로 주어지는 redistance 방정식은 쌍곡선형 방정식으로 상경계면에서 level set 함수의 값을 고정시키는 Dirichlet 경계조건의 부여가 필요하다. 방정식 (4)는 상경계면에서 수직한 서로 반대 방향을 가지는 특성 속도에 의해서 level set 함수가 전파되는 성질을 가진다. 본 연구에서는 Dirichlet 경계조건을 부여하는 세 가지 방법을 제안한다. Fig. 1의 (a)에서는 상경계면을 포함하는 요소에 속한 절점들을 Dirichlet 경계조건으로 지정하는 경우를 나타낸다. 이 방법은 Pillapakka과 Singh(5)등이 사용한 방법과 동일하다. 이 방법은 Fig. 1의 (a)에서 나타난 바와 같이 상 경계면에서 비교적 멀리 떨어져 있는 절점들의 level set 값도 Dirichlet 경계조건에 의하여 고정되는 약점이 있다. 따라서, 상경계면에서 비교적 멀리 떨어진 절점의 level set 함수의 값이 상경계면에서의 최단거리여야 한다는 조건을 만족하지 못하는 경우 redistance 방정식에 의해서 수정되지 못하는 문제가 있다. Fig. 1의 (b)는 (a)의 약점을 보완하기 위하여 상경계면 주위의 절점들 중에서 level set 함수의 절대 값이 지정된 값보다 작은 값을 가지는 절점들을 Dirichlet 경계조건으로 지정하는 경우를 나타낸다. Fig. 1의 (b)는 (a)의 약점을 보완할 수 있지만 Fig. 1의 (c)에서 보여지는 것처럼 level set 함수의 이송방정식을 풀고 난 후에 상경계면 근처의 level set 함수의 분포가 많이 왜곡되어 있는 경우에는 (a)와 마찬가지로 상경계면 근처에서 틀린 level set 함수의 값이 Dirichlet 경계조건으로 부여되는 문제가 생긴다. 따라서, 본 연구에서는 (a)와 (b) 방법을 혼용한 방식을 세 번째 방식으로 제안한다. 즉, 세 번째 방법에서는 상경계면을 포함하는 요소에 속한 절점들 중에서 level set 함수의 절대 값이 지정된 값보다 작은 값을 가지는 절점들을 Dirichlet 경계조건으로 지정한다. 본 논문에서는 (a)의 방법을 DBC I, (b)의 방법을 DBC II, 그리고 혼용방법을 DBC III으로 정의한다.

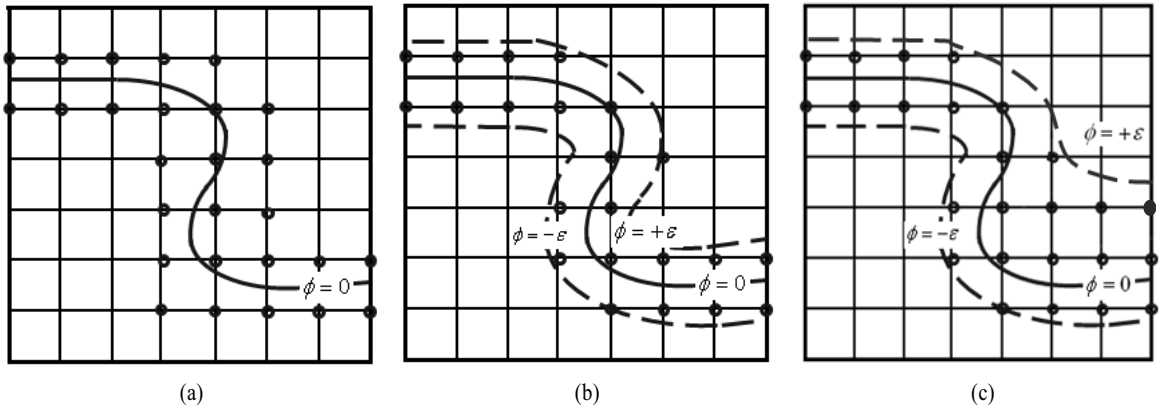


Fig. 1 Dirichlet boundary conditions of resistance equation

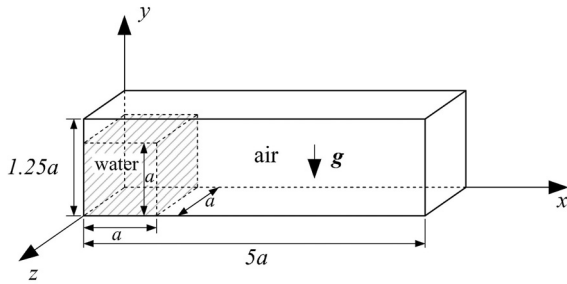


Fig. 2 Schematic for a three-dimensional broken dam problem

3. 수치해석 결과

3.1 3차원 댐 붕괴 문제

첫 번째 표준예제로 Fig. 2에 주어진 3차원 댐 붕괴 문제를 해석한다. 물의 밀도와 점성계수는 각각 $1000 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ 과 $1 \times 10^{-3} \text{ [kg/ms]}$ 이며 공기의 밀도와 점성계수는 각각 $1 \text{ [kg/m}^3\text]}$ 과 $1 \times 10^{-5} \text{ [kg/ms]}$ 이다. 중력 가속도 $g = 9.8 \text{ [m/s}^2\text]}$ 이다. 댐의 붕괴를 위한 계산 영역은 Fig. 2에 주어진 바와 같이 $5a \times 1.25a \times a$ 이며 Martin & Moyce[7]의 실험조건과 동일한 정육면체 물기둥($a \times a \times a$, $a = 0.05715 \text{ m}$)을 사용한다. 특정 시간은 $t_c = \sqrt{a/g}$ 로 정의된다. Fig. 3은 시간 간격을 $0.01t_c$ 로 하고, $100 \times 25 \times 20$ 의 균일한 격자계를 사용하여 얻어진 다양한 경계조건 부여에 따른 시간에 따른 자유표면 선단의 변화를 나타낸다. Fig. 3에서 보듯이 자유 표면 선단의 위치는 경계조건에 크게 영향을 받지 않음을 알 수 있다 이는 Fig. 3에 주어진 자유표면 선단의 시간에 따른 변화는 자유 수면이 오른쪽 벽에 부딪히고 난 후에 자유 수면의 merging 현상이

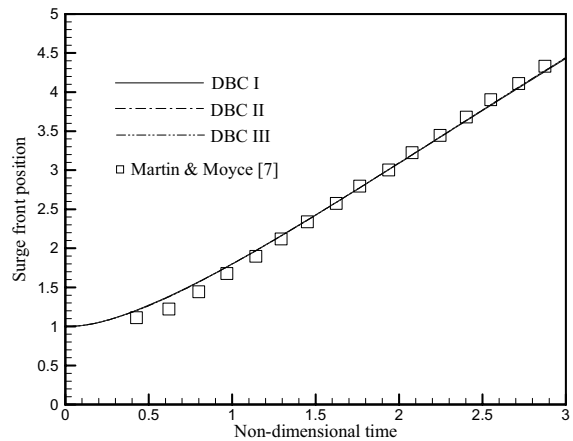


Fig. 3 Surge front position versus nondimensional time

포함되지 않았기 때문이다. 각각의 경계조건이 자유 표면의 형상 예측에 미치는 영향은 자유 수면이 breaking/merging 현상에 의해서 심하게 변형이 되는 경우에 크게 드러난다. Fig. 4는 무차원 시간 8.0에서 각각의 경계조건에 따른 자유 수면의 형상을 나타낸다. DBC I과 DBC II의 경우 자유 수면의 형상이 비현실적으로 왜곡되어지는 것을 볼 수 있다 반면에, DBC III을 적용한 결과는 물리적으로 예측 가능한 자유수면 형상을 줌을 알 수 있다

3.2 3차원 슬로싱 문제의 해석

본 절에서는 마지막으로 3차원 슬로싱 해석 결과를 제시한다. Fig. 5에 주어진 직육면체 탱크 내의 슬로싱 문제를 해석한다. 20% 가 물로 채워진 Fig. 5에 주어진 탱크는 다음과 같

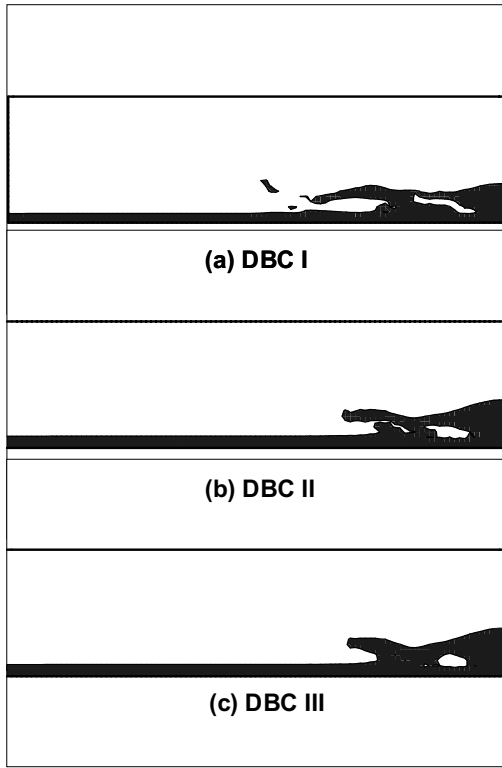


Fig. 4 Free surfaces at $t^* = 8.0$ for three different Dirichlet boundary conditions of redistance equation

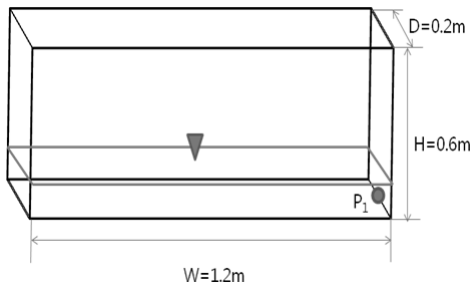


Fig. 5 Schematic of a three-dimensional sloshing problem in a tank

은 주기 운동(sway motion)을 한다.

$$x = A_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (6)$$

여기서 A_m 은 좌우 왕복운동의 진폭을 나타내며 T 는 주기를 나타낸다. 본 연구에서는 진폭은 0.06 m 이고 주기는 1.94s 로 주어지는 경우에 대한 수치해석을 수행하고 기존의 실험 결과[8]와 비교한다. 모든 수치해석에 대하여 시간간격

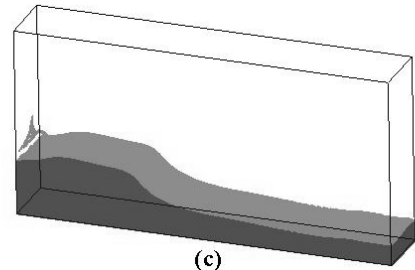
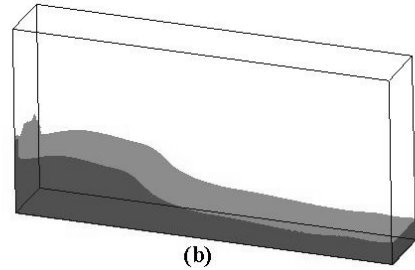
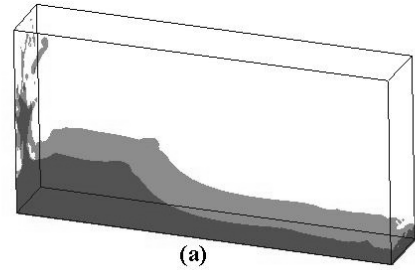


Fig. 6 Free surfaces at $t = 6.0\text{sec}$ for three different Dirichlet boundary conditions of redistance equation

은 0.001s를 사용하였다. Fig. 6은 세 가지 경계조건에 대하여 시각 6 sec에서의 자유 수면의 형상을 비교한다 DBC I을 사용한 자유표면의 형상은 슬로싱 문제의 경우 DBC II와 DBC III을 사용하여 얻어진 자유표면의 형상에 비하여 자유 표면의 형상이 깨짐을 볼 수 있다. 한편, DBC II와 DBC III의 결과는 큰 차이를 보이지 않는다. 이는 붕괴 댐 문제와 같이 자유표면의 breaking/merging 현상이 본 연구에서 해석한 슬로싱 문제의 경우엔 강하게 나타나지 않기 때문인 것으로 여겨진다.

4. 결론

Level set 과 유한요소법을 이용한 자유 표면을 이용한 유동장의 해석에서 Redistance 방정식의 Dirichlet 경계조건의 부여 방법들이 해에 미치는 영향을 고찰하였다. 수치해석 예제로 3차원 붕괴 댐 문제와 3차원 탱크내의 슬로싱 문제를 해



석하여 다음의 결론을 얻었다.

- (1) 상경계면을 포함하는 요소에 속한 절점들을 Dirichlet 경계조건으로 지정하는 방법은 자유 표면의 거동이 단순한 문제의 경우에만 사용될 수 있다.
- (2) 자유 수면이 breaking/merging 현상을 포함하여 매우 복잡한 거동을 보일 경우에는 상경계면을 포함하는 요소에 속한 절점들 중에서 level set함수의 절대 값이 지정된 값보다 작은 값을 가지는 절점들을 Dirichlet 경계조건으로 지정하는 방법을 제안한다.

참고문헌

- [1] 1981, Hirt, C.W. and Nichols, B.D., "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," *J. Comput. Phys.*, 39, pp.201-225.
- [2] 1992, Unverdi, S.O. and Tryggvason, G., "A Front Tracking Method for Viscous, Incompressible, Multi-fluid Flows," *J. Comput. Phys.*, 100, pp.25-37.
- [3] 1984, Ryskin, G. and Leal, L.G., "Numerical solution of free-boundary problems in fluid mechanics. Part 1. The finite-difference technique," *J. Fluid. Mech.*, Vol.148, pp.1-17.
- [4] 1994, Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S., "A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow," *J. Comput. Phys.*, Vol.114, pp.146-159.
- [5] 2001, Pillapakam, S.B. and Singh, P., "A level-set method for computing solutions to viscoelastic two-phase flow," *J. Comput. Phys.*, Vol.174, pp.552-578.
- [6] 2008, Choi, H.G., "Numerical analysis of free surface flows using least square/level-set method," in preparation.
- [7] 1952, Martin, J.C. and Moyce, W.J., "An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane," *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, Math. Phys. Sci.*, Vol.244, pp.312-324.
- [8] 2000, Tanaka, Y., Ando, T. and Miyamoto, T., "Experimental Study on Sloshing Load Measured by Panel-Type PressureGauge," *Proc. 74th General Meeting of Ship Research Institute*, Ship Research Institute, Tokyo, Japan, June 2000, pp.137-142.