

만곡부 이차류 특성을 고려한 수심 적분된 2차원 수치모형

A depth-integrated numerical model considering the secondary flows in the channel bend

김태범*, 최병웅**, 최성욱***

Tae Beom Kim, Byungwoong Choi, Sung-Uk Choi

요 지

난류응력은 순간속도성분을 시간평균성분과 편차성분의 합으로 보고 Navier-Stokes 방정식으로부터 Reynolds 방정식을 유도할 때 나타나게 된다. Reynolds 방정식으로부터 수심 적분된 천수 방정식을 유도하는 과정에서 시간 평균된 유속성분을 수심 적분된 유속성분과 편차성분의 합으로 본다면, 분산응력 (dispersion stress)이라고 하는 추가적인 새로운 항이 잔류하게 된다. 점성응력, 난류응력, 그리고 분산응력을 통칭하여 유효응력 (effective stress)이라고 한다. 일반적으로 수심에 비해 수로 폭이 넓은 개수로에서는 유효응력이 흐름특성의 수치 근사해에 큰 영향을 미치지 못한다고 가정하여 2차원 수심적분 모형에서 유효응력을 생략하기도 한다. 또한 유효응력을 적용하더라도, 점성응력이 난류응력에 비해 무시할 만큼 작다고 가정하여 난류응력만을 적용하며, 분산응력은 무시된다. 하지만 만곡부에서는 원심력과 편수위로 인한 횡방향 압력의 불균형이 발생하기 때문에, 만곡부의 이차류가 발생되며, 유속의 연직방향 분포도 일정하지 않게 된다.

따라서 본 연구의 목적은 만곡부의 이차류 특성을 수심적분 2차원 모형에 반영하기 위해 분산응력을 고려한 모형의 개발 및 검증이다. 불규칙한 모의영역을 원활히 나타낼 수 있도록 곡선좌표계를 사용하는 여타 모형들과 달리 유탄유소법을 이용하여 수치해를 구하며, 따라서 x, y 좌표축을 사용하는 데카르트 좌표계를 사용하여 지배방정식을 나타낸다. 분산응력의 유·무에 따른 수치 결과를 Rozovskii의 180° 만곡수로 실내실험 자료와 비교하여 개발 모형을 검증한다.

핵심용어 : 수심 평균, 2차원 수치모형, 만곡부, 유효응력, 분산응력

1. 서 론

만곡수로에서의 흐름특성은 직선수로에 비해 복잡하며, 이차류 발생은 만곡부 흐름에서 나타나는 특징 중의 하나이다. 일반적으로 대다수의 2차원 수치모형은 Reynolds 방정식이나 Reynolds 방정식을 수심 적분한 천수방정식을 지배방정식으로 흐름특성을 모의한다. 난류응력은 순간속도성분을 시간평균성분과 편차성분의 합으로 보고 Navier-Stokes 방정식으로부터 Reynolds 방정식을 유도할 때 나타나며, Reynolds 방정식으로부터 수심 적분된 천수방정식을 유도하는 과정에서 시간 평균된 유속성분을 수심 적분된 유속성분과 편차성분의 합으로 본다면, 분산응력 (dispersion

* 정회원 · 연세대학교 사회환경시스템공학부 박사후연구원 · E-mail : geo108@naver.com

** 정회원 · 연세대학교 사회환경시스템공학부 석박사통합과정 · E-mail : bw628@yonsei.ac.kr

*** 정회원 · 연세대학교 사회환경시스템공학부 교수 · E-mail : schoi@yonsei.ac.kr

stress)이라고 하는 추가적인 새로운 항이 잔류하게 된다. 결과적으로 수심적분된 2차원 흐름모형의 지배방정식에는 점성응력, 난류응력, 그리고 분산응력이 존재하며, Molls과 Chaudhry (1995)는 세 가지 응력을 통칭하여 유효응력 (effective stress)이라고 하였다. 일반적으로 수심에 비해 수로 폭이 넓은 개수로에서는 유효응력이 흐름특성의 수치 근사해에 큰 영향을 미치지 못한다고 가정하여 2차원 수심적분 모형에서 유효응력을 생략한다. 또한 유효응력을 적용하더라도, 점성응력이 난류응력에 비해 무시할 만큼 작다고 가정하여 난류응력만을 적용하며, 분산응력은 무시된다. 하지만 만곡부에서는 원심력과 편수위로 인한 횡방향 압력의 불균형이 발생하기 때문에, 만곡부의 이차류가 발생되며, 유속의 연직방향 분포도 일정하지 않게 된다.

따라서 본 연구의 목적은 만곡부의 이차류 특성을 수심적분 2차원 모형에 반영하기 위해 분산응력을 고려한 모형의 개발 및 검증이다. 불규칙한 모의영역을 원활히 나타낼 수 있도록 곡선좌표계를 사용하는 여타 모형들과 달리 유한요소법을 이용하여 수치해를 구하며, 따라서 x, y 좌표축을 사용하는 데카르트 좌표계를 사용하여 지배방정식을 나타낸다. 분산응력의 유무에 따른 수치 결과를 Rozovskii의 180° 만곡수로 실내실험 자료와 비교하여 개발 모형을 검증한다.

2. 지배방정식

Reynolds 방정식으로부터 수심 적분된 천수방정식을 유도하는 과정에서 시간 평균된 유속성분을 수심 적분된 유속성분과 편차성분의 합으로 분다면, 분산응력 (dispersion stress)이라고 하는 추가적인 새로운 항이 잔류하게 되며, 점성응력이 난류응력에 비해 무시할 만큼 작다고 가정하여 본 연구에서는 식 (1)~(3)과 같은 지배방정식을 적용한다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{pq}{h} \right) + gh \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \tau_{bx} \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left[2\nu_t \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H (\bar{u}-u)^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H (\bar{u}-u)(\bar{v}-v) dz = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{pq}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) + gh \frac{\partial z_b}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \tau_{by} \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu_t \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[2\nu_t \frac{\partial q}{\partial y} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H (\bar{u}-u)(\bar{v}-v) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H (\bar{v}-v)^2 dz = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $p=hu$, $q=hv$ 의 관계에 있으며, p , q 는 x , y 방향의 단위 폭 당 유량성분, h 는 수심, u , v 는 x , y 방향의 수심평균 유속성분이고, t 는 시간, g 는 중력가속도, z_b 는 하상고, H 는 수위, τ_{bx} 와 τ_{by} 는 x , y 방향의 하상 전단응력 성분, ν_t 는 와점성계수, 그리고 \bar{u} 와 \bar{v} 는 x , y 방향의 시간 평균된 유속성분이다. 식 (2)와 (3)의 두 번째 줄은 난류응력, 그리고 세 번째 줄은 분산응력을 나타내는 항들이다. de Vriend (1977)는 아래와 같은 시간평균 유속성분과 수심평균 유속성분 사이의 관계식을 제안하였다.

$$\bar{u} = uf_m(Z) - \delta h \widehat{U} f_s(Z) \quad (4)$$

$$\bar{v} = vf_m(Z) - \delta h \widehat{V} f_s(Z) \quad (5)$$

$$Z = \frac{z-H}{H-z_b}; [-1, 0] \quad (6)$$

$$f_m(Z) = 1 + \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} + \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} \ln(1+Z) \quad (7)$$

$$f_s(Z) = 2F_1(Z) + \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} F_2(Z) - 2\left(1 - \frac{\sqrt{g}}{\kappa C}\right) f_m(Z) \quad (8)$$

$$F_1(Z) = \int_{-1+Z}^Z \frac{\ln(1+Z')}{Z'} dZ' \quad (9)$$

$$F_2(Z) = \int_{-1+Z}^Z \frac{\ln^2(1+Z')}{Z'} dZ' \quad (10)$$

$$Z' = \exp\left(-1 - \frac{\kappa C}{\sqrt{g}}\right) \quad (11)$$

$$\widehat{U} = \frac{1}{2\kappa^2 U^3} \left[(U^2 + v^2) \left(u \frac{\partial u}{\partial X} + v \frac{\partial u}{\partial Y} \right) - uv \left(u \frac{\partial v}{\partial X} + v \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \right] \quad (12)$$

$$\widehat{V} = \frac{1}{2\kappa^2 U^3} \left[(U^2 + u^2) \left(u \frac{\partial v}{\partial X} + v \frac{\partial v}{\partial Y} \right) - uv \left(u \frac{\partial u}{\partial X} + v \frac{\partial u}{\partial Y} \right) \right] \quad (13)$$

$$U = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (14)$$

여기서 κ 는 von Kármán 상수이며, C 는 Chézy 계수이다. 식 (4)~(14)를 식 (2)와 (3)의 분산응력항에 대입하고, 적분인자를 치환하여 정리하면 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$D_{uu} = \int_{z_b}^H (\bar{u} - u)^2 dz = hu^2 \left(\frac{\sqrt{g}}{\kappa C} \right)^2 - 2h^2 u \delta \widehat{U} \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} FF_1 + h^3 (\delta \widehat{U})^2 FF_2 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} D_{uv} &= \int_{z_b}^H (\bar{u} - u)(\bar{v} - v) dz \\ &= uvh \left(\frac{\sqrt{g}}{\kappa C} \right)^2 - (u \widehat{V} + v \widehat{U}) h^2 \delta \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} FF_1 + h^3 \delta^2 \widehat{U} \widehat{V} FF_2 \end{aligned} \quad (16)$$

$$D_{vv} = \int_{z_b}^H (\bar{v} - v)^2 dz = hv^2 \left(\frac{\sqrt{g}}{\kappa C} \right)^2 - 2h^2 v \delta \widehat{V} \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} FF_1 + h^3 (\delta \widehat{V})^2 FF_2 \quad (17)$$

$$FF_1 = \int_0^1 (1 + \ln \xi) f_s(\xi) d\xi \quad (18)$$

$$FF_2 = \int_0^1 [f_s(\xi)]^2 d\xi \quad (19)$$

$$\begin{aligned} f_s(\xi) &= 2 \int_0^\xi \frac{\ln t}{t-1} dt + \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} \int_0^\xi \frac{\ln^2 t}{t-1} dt \\ &\quad - 2 \left(1 - \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} + \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} \ln \xi \right) \end{aligned} \quad (20)$$

식 (18)~(20)의 적분은 수치적분기법을 이용하여 계산되며, 식 (15)~(20)을 이용하여 식 (2)와

(3)의 분산응력항 $\partial D_{uv}/\partial x$, $\partial D_{uv}/\partial x$, $\partial D_{uv}/\partial y$, 그리고 $\partial D_{vv}/\partial y$ 를 작성한다. 상술한 지배방정식의 수치해를 구하기 위해, 본 연구에서는 유한요소법의 일종인 2D CDG 기법 (Ghanem, 1995)을 이용하였다.

3. 모형의 검증

Rozovskii (1961)의 실내 만곡수로실험 자료를 이용하여 개발된 수치모형을 검증하였다. Rozovskii (1961)는 6m 길이의 만곡전 직선수로와 3m 길이의 만곡후 직선수로로 이루어진 180° 만곡수로에서 실험을 수행하였다. 수로중심에서의 곡률반경은 0.8 m이며, 수로 폭이 0.8 m인 평평한 직사각형 수로를 이용하였다. 유량 0.0123 m³/s, 수심 0.6 m, Chezy의 계수는 60 m^{1/2}/s, Reynolds 수는 15600, Froude number는 0.114이다. Rozovskii (1961)의 실내실험 조건과 동일한 모의조건을 이용하여 수치모의를 수행하였으며, 그 결과를 그림 1과 2에 나타냈다. 그림 1을 보면, 전반적으로 만곡부 외측 수위가 내측 수위보다 높아지는 편수위 (super-elevation) 현상을 잘 나타내고 있다. 하지만, 만곡부의 중심을 지나는 6.2 cm 등수위선의 분포를 보면, 만곡부 유출부에서는 비교적 잘 일치하고 있지만, 유입부 부근에서는 차이를 보이고 있으며, 분산응력 항을 고려했을 때의 수치모의 결과가 분산응력 항을 무시했을 때에 비해서 실험결과에 더욱 유사하다. 또한 만곡부 내측의 최저수위 분포와 만곡부 외측의 최고수위 분포가 다르다. 그림 2의 유속분포를 보면, 만곡부 내측이 외측에 비해서 유속이 빠른 현상을 잘 나타내고 있다. 실측자료에서는 만곡부 내측의 유속이 하류로 향할수록 감소하고 있는데, 분산응력을 고려하지 않았을 경우의 수치결과에서는 만곡부에 걸쳐 내측의 유속이 크고 외측이 작은 일정한 분포를 보이고 있는 반면에, 분산응력을 고려했을 경우, 만곡부 하류로 갈수록 내측 유속이 약간 감소하는 경향을 보이고 있다. 또한 분산응력을 고려했을 경우, 만곡부 유출 후 9 m 단면 후의 좌안의 유속이 우안의 유속에 비해서 작게 나오는 결과를 잘 보이고 있다.

4. 결론

본 연구에서는 만곡부의 이차류 영향을 고려하기 위해서 운동량 방정식에 분산응력 항을 적용시킨 수심 적분된 천수방정식을 지배방정식으로 하는 2차원 유한요소모형을 개발하였다. 개발된 모형의 검증으로 위해서 Rozovskii (1961)의 180° 만곡부 실내실험 자료를 이용하였다. 분산응력 항을 고려했을 때와 고려하지 않았을 때의 수치결과를 실험자료와 비교한 결과, 분산응력 항을 고려했을 때 만곡부에서의 흐름특성이 실측자료에 더욱 가깝게 모의됨을 알았다. 따라서 자연하천과 같이 만곡부가 산재해 있는 수로에서의 흐름특성 모의를 위해서는 이차류 효과를 반영해야 하며, 이를 바탕으로 유사이송 및 하상변동, 식생 영향 등을 고려해야만 하겠다.

감 사 의 글

본 연구는 국토해양부 및 한국건설교통기술평가원 건설기술혁신사업 (과제명 : Ecoriver21, 과제번호 : 06건설핵심B01) 연구비지원에 의해 수행되었습니다.

참 고 문 헌

- de Vriend, H.J. (1977). A mathematical model of steady flow in curved shallow channel, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 15, No. 1, pp. 37-54.
- Ghanem, A.H.M. (1995). *Two-dimensional finite element modeling of flow in aquatic habitats*, Ph.D. dissertation, University of Alberta, Edmonton, Alberta.
- Molls, T. and Chaudhry, M.H. (1995). Depth-averaged open-channel flow model, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 121, No. 6, pp. 453-465.
- Rozovskii, I.L. (1961). *Flow of water in bends of open channels*, The Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem.

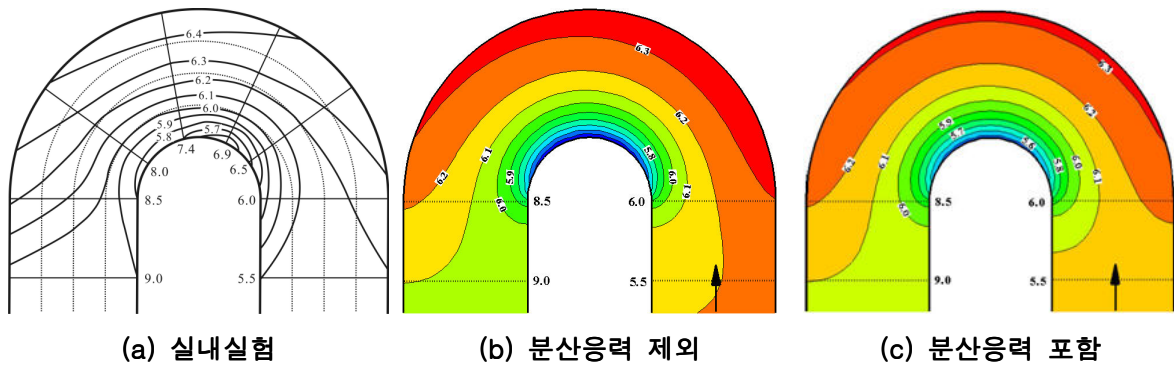


그림 1. 180° 만곡수로 수위분포 비교

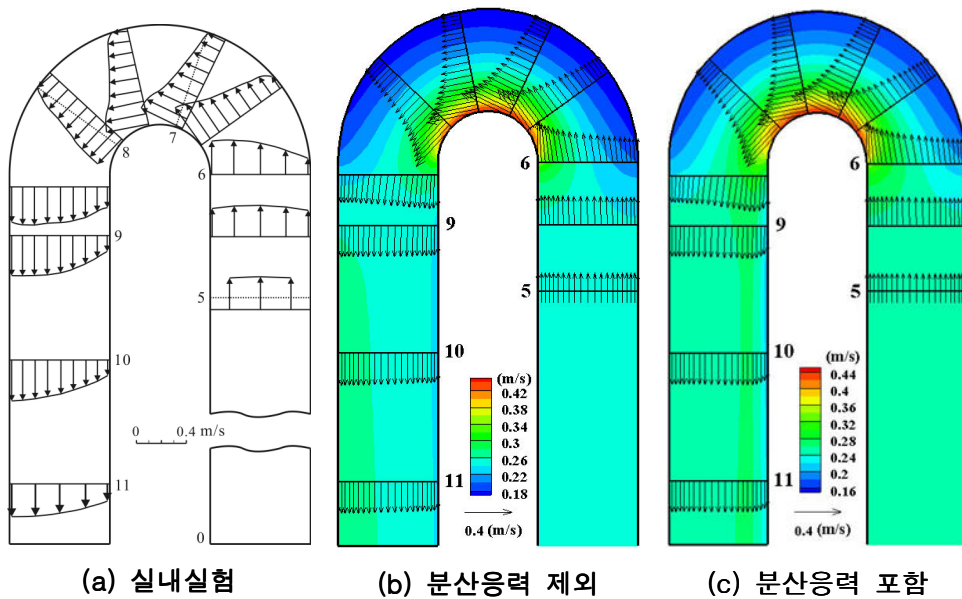


그림 2. 180° 만곡수로 평균유속 비교