다수의 미지 가상 입력 계수들을 가지는 비선형 시스템에 대한 적응 안정화

Adaptive stabilization for nonlinear systems with multiple unknown virtual control coefficients

서상보*, 정진우**, 서진헌***, 심형보***
Sangbo Seo, Jinwoo Jung, Jin Heon Seo, Hyungbo Shim

Abstract - This paper considers the problem of global adaptive regulation for a class of nonlinear systems which have multiple unknown virtual control coefficient. By using a new parameter estimator and backstepping technique, we design a smooth state feedback control law, parameter update laws that estimate the unknown virtual control coefficients, and a continuously differentiable Lyapunov function which is positive definite and proper.

Key Words : adaptive control, unknown virtual control coefficient, backstepping

1. 서 론

이 논문에서는 다음의 불확실성이 포함된 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= b_1 x_2 + f_1(x_1) \\ \dot{x}_2 &= b_2 x_3 + f_2(x_1, x_2) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= b_n u + f_n(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x = [x_1, \ldots, x_n]^T \in R$와 $u \in R$는 각각 시스템 상태 변수와 입력이고, $f_i : R^i \rightarrow R$, $i = 1, \ldots, n$는 $f_i(0, \ldots, 0) = 0$인 smooth 함수들이다. 그리고 b_i, $i = 1, \ldots, n$는 부호를 알고 있는 미지의 가상 입력 제어 상수들이다.

역진(backstepping) 기법은 오랜 세월동안 연구되어오던 궤환 선형화(feedback linearization)의 단점을 보완하는 제어 기법으로 알려져 왔고 많은 연구 분야에서 응용되어왔다 [1-10]. 특히 궤환 선형화가 불가능한 시스템이나 불확실성을 가지는 비선형 시스템에 대해서 그 장점이 확연히 드러난다. 기존의 불확실성에 대해 가지던 선형 유계 가정을 제거함과 동시에 체계적으로 제어기의 설계 방법을 제시한 것이었다. 불확실성이 시스템에 나타났을 경우, 외란의 존재 하에 적용되는 강인 역진(robust backstepping) 기법[4-8]과 미정의 파라미터들이 나타났을 때 적용되는 적응 역진(adaptive backstepping) 기법[1-3,5,8,10]으로 나눌 수 있다.

적응 역진 기법은 [10]에서 제시된 방법이 일반적으로 사용되고 있다. [10]에서는 드리프트 항에 포함된 선형 미지 파라미터들에 대해서 tuning function을 단계별로 설계하고, 최종적으로 update law를 설계하였다. 또한 임의의 k번째 하부 시스템에서 b_k가 발생하였을 경우를 고려하였다. 이 계수를 미지의 가상 입력 계수(unknown virtual control) 혹은 control direction에 불확실성이 발생하였다고 용어를 사용한다. [10]에서의 방법은 이 계수를 추정하기 위해서 2개의 추정기를 제시하였다. 그러므로 (1)의 시스템에 대해서는 전체적으로 $2n$개의 추정기를 설계해야만 한다.

본 논문의 목표는 (1)의 시스템에 대해서 n개의 추정기를 설계하고 시스템의 평형점을 안정화시키는 것이다. 여기서 제시되는 추정기는 양의 함수를 포함하므로 이를 이용해서 가상의 입력을 쉽게 설계할 수 있도록 한다.

저자 소개
* 正 會 員 : 서울大 工大 電氣컴퓨터工學部 博士課程
** 準 會 員 : 서울大 工大 電氣컴퓨터工學部 碩士課程
***正 會 員 : 서울大 工大 電氣컴퓨터工學部 敎授・工博
***正 會 員 : 서울大 工大 電氣컴퓨터工學部 敎授・工博

2. 새로운 추정기의 관계

본 논문에서 제시하는 미정 가상입력상수들에 대한 추정 법칙은 아래와 같다.

$$\tilde{b}_i = |b_i| - \exp(\mu_i \hat{b}_i), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

여기서 $\hat{b}_i(t)$는 b_i에 대한 update law로부터 얻어지는 추정 변수이며 μ_i는 조정 이득값이다.

b_i의 부호를 알고 있으므로 (2)의 정의로부터 아래의 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} b_i &= sgn(b_i)\big(\tilde{b}_i + \exp(\mu_i \hat{b}_i)\big), \\ \frac{b_i sgn(b_i)}{\exp(\mu_i \hat{b}_i)} &= \frac{\tilde{b}_i}{\exp(\mu_i \hat{b}_i)} + 1. \end{aligned} \tag{3}$$

위의 관계식들은 가상의 입력과 update law를 설계하는 과정에 주요 아이디어가 될 것이다.

3. 주요 정리

정리 1: 시스템 (1)에 대해서 미지의 계수들 $b_i, i=1,\ldots,n$의 부호를 안다고 가정하자. 그러면 다음의 다이나믹 적응 제어기가 존재한다.

$$u=u(x,\xi),\quad \dot{\xi}=\Omega(x,\xi),\quad \xi\in R^n$$

이 제어기는 폐루프 시스템을 광역적으로 안정화하고 폐루프 시스템의 모든 궤적들이

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0,\quad \forall\,(x(0),\xi(0))\in R^n\times R^n$$

를 만족한다.

정리 1의 증명: 정리 1을 증명하기 위해서 우리는 새로운 추정기와 역진 기법을 이용한다.

초기 단계: 리아푸노프 함수 $V_1=x_1^2/2+\tilde{b}_1^2/2\gamma_1$의 미분은

$$\dot{V}_1=b_1x_1x_2+x_1f_1(x_1)-\frac{\mu_1}{\gamma_1}exp(\mu_1\hat{b}_1)\tilde{b}_1\dot{\hat{b}}_1.$$

(3)의 관계식에 의해서 위의 식은

$$\dot{V}_1=\left(1+\frac{\tilde{b}_1}{\exp(\mu_1\hat{b}_1)}\right)\frac{\exp(\mu_1\hat{b}_1)}{sgn(b_1)}x_1x_2+x_1f_1(x_1) -\frac{\mu_1}{\gamma_1}\exp(\mu_1\hat{b}_1)\tilde{b}_1\dot{\hat{b}}_1$$

와 같이 되고, 아래와 같이 가상의 입력을 설계할 수 있다.

$$\begin{aligned} x_2^* &=-\frac{sgn(b_1)}{\exp(\mu_1\hat{b}_1)}(k_1x_1+f_1(x_1)) \\ &=:-\frac{sgn(b_1)}{\exp(\mu_1\hat{b}_1)}\alpha_1(x_1), \qquad (4) \\ \bar{x}_2 &=x_2-x_2^*. \end{aligned}$$

이로부터

$$\begin{aligned} \dot{V}_1&=-k_1x_1^2+b_1x_1\bar{x}_2-\frac{\tilde{b}_1x_1\alpha_1(\cdot)}{\exp(\mu_1\hat{b}_1)}-\frac{\mu_1}{\gamma_1}\exp(\mu_1\hat{b}_1)\tilde{b}_1\dot{\hat{b}}_1 \\ &=-k_1x_1^2+b_1x_1\bar{x}_2-\left(Y_{1,1}(\cdot)+\tilde{b}_1\right)\left(\Pi_{1,1}(\cdot)+\frac{\mu_1}{\gamma_1}\exp(\mu_1\hat{b}_1)\dot{\hat{b}}_1\right) \end{aligned}$$

가 얻어지고, tuning functions $Y_{1,1}(\cdot)$, $\Pi_{1,1}(\cdot)$은 다음과 같다.

$$Y_{1,1}(x_1,\hat{b}_1)\equiv 0,\quad \Pi_{1,1}(x_1,\hat{b}_1)=\frac{x_1\alpha_1(\cdot)}{\exp(\mu_1\hat{b}_1)}$$

귀납적 단계: 이 단계에서는 결과를 일반화하기 위해서 귀납법을 사용할 것이다. 단계 k에서 미분가능하고 positive definite, proper한 리아푸노프 함수 $V_k:R^k\times R^k\to R$ 가 존재하고, 가상의 입력들

$$\begin{aligned} & x_1^*\equiv 0 && \bar{x}_1=x_1-x_1^* \\ & x_2^*=-\frac{sgn(b_1)}{\exp(\mu_1\hat{b}_1)}\alpha_1(x_1), && \bar{x}_2=x_2-x_2^* \\ & \quad\vdots && \quad\vdots \\ & x_{k+1}^*=-\frac{sgn(b_k)}{\exp(\mu_k\hat{b}_k)}\alpha_k(x_1,\ldots,x_k,\hat{b}_1,\ldots,\hat{b}_{k-1}), && \bar{x}_{k+1}=x_{k+1}-x_{k+1}^* \end{aligned}$$

이 정의된다. 그리고 V_k는

$$\dot{V}_k=-\sum_{i=1}^k k_i\bar{x}_i^2-\sum_{i=1}^k\left(Y_{i,k}(\cdot)+\tilde{b}_i\right)\left(\Pi_{i,k}(\cdot)+\frac{\mu_i}{\gamma_i}\exp(\mu_i\hat{b}_i)\dot{\hat{b}}_i\right)+b_k\bar{x}_k\bar{x}_{k+1} \qquad (5)$$

의 관계가 만족된다.

다음에서는 식 (5)가 $k+1$에 대해서도 만족됨을 보일 것이다. 이를 보이기 위해서 다음의 리아푸노프 함수를 고려한다.

$$V_{k+1}=V_k+\frac{\bar{x}_{k+1}^2}{2}+\frac{\tilde{b}_{k+1}^2}{\gamma_{k+1}}.$$

이 함수의 미분은

$$\begin{aligned} \dot{V}_{k+1}=&-\sum_{i=1}^k k_i\bar{x}_i^2-\sum_{i=1}^k\left(Y_{i,k}(\cdot)+\tilde{b}_i\right)\left(\Pi_{i,k}(\cdot)+\frac{\mu_i}{\gamma_i}\exp(\mu_i\hat{b}_i)\dot{\hat{b}}_i\right) \\ &+b_k\bar{x}_k\bar{x}_{k+1}+\bar{x}_{k+1}\left(b_{k+1}x_{k+2}+f_{k+1}(\cdot)-\sum_{i=1}^k\frac{\partial x_{k+1}^*}{\partial x_i}\dot{x}_i \right. \qquad (6) \\ &\left. -\sum_{i=1}^k\frac{\partial x_{k+1}^*}{\partial\hat{b}_i}\dot{\hat{b}}_i\right)-\frac{\mu_{k+1}}{\gamma_{k+1}}\exp(\mu_{k+1}\hat{b}_{k+1})\tilde{b}_{k+1}\dot{\hat{b}}_{k+1} \end{aligned}$$

이 된다. 미지의 상수들 b_i가 포함된 항에 대해서는 아래의 추정을 한다. (3)의 관계에 의해서

$$\begin{aligned} &\left(b_k\bar{x}_k-\sum_{i=1}^k\frac{\partial x_{k+1}^*}{\partial x_k}b_ix_{k+1}\right)\bar{x}_{k+1} \\ &=b_k\left(\bar{x}_k-\frac{\partial x_{k+1}^*}{\partial x_k}x_{k+1}\right)\bar{x}_{k+1}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial x_{k+1}^*}{\partial x_i}b_ix_{i+1}\bar{x}_{k+1} \qquad (7) \\ &=\sum_{i=1}^k\left(\tilde{b}_i+\exp(\mu_i\hat{b}_i)\right)\sigma_{i,k+1}(\cdot)\bar{x}_{k+1} \end{aligned}$$

가 되고, 여기서 $\sigma_{i,k+1}(\cdot)$는 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma_{k,k+1}(x_1,\ldots,x_{k+1},\hat{b}_1,\ldots,\hat{b}_k)=\mathrm{sgn}(b_k)\left(\bar{x}_k-\frac{\partial x_{k+1}^*}{\partial x_k}x_{k+1}\right)$$

$$\sigma_{i,k+1}(x_1,\ldots,x_{k+1},\hat{b}_1,\ldots,\hat{b}_k)=-\mathrm{sgn}(b_i)\frac{\partial x_{k+1}^*}{\partial x_i}x_{i+1},\quad i=1,\ldots,k-1$$

식 (6)의 tuning function의 설계 부분, $\dot{\hat{b}}_i$가 포함된 항, 그리고 식 (7)의 $\tilde{b}_i$부분을 이용해서 다음과 같이 추정과 새로운 tuning function을 설계한다.

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=1}^k\left(Y_{i,k}(\cdot)+\tilde{b}_i\right)\left(\Pi_{i,k}(\cdot)+\frac{\mu_i}{\gamma_i}\exp(\mu_i\hat{b}_i)\dot{\hat{b}}_i\right) \\ &+\sum_{i=1}^k\tilde{b}_i\sigma_{i,k+1}(\cdot)\bar{x}_{k+1}-\bar{x}_{k+1}\sum_{i=1}^k\frac{\partial x_{k+1}^*}{\partial\hat{b}_i}\dot{\hat{b}}_i \\ =&-\sum_{i=1}^k\left(Y_{i,k+1}(\cdot)+\tilde{b}_i\right)\left(\Pi_{i,k+1}(\cdot)+\frac{\mu_i}{\gamma_i}\exp(\mu_i\hat{b}_i)\dot{\hat{b}}_i\right) \\ &-\sum_{i=1}^kY_{i,k}(\cdot)\sigma_{i,k+1}(\cdot)\bar{x}_{k+1}+\sum_{i=1}^k\frac{\partial x_{k+1}^*}{\partial\hat{b}_i}\bar{x}_{k+1}\gamma_i\Pi_{i,k+1}(\cdot) \end{aligned}$$

위에서 설계된 이 단계에서의 tuning function은 아래와 같다.

$$\Pi_{i,k+1}(x_1,\ldots,x_{k+1},\hat{b}_1,\ldots,\hat{b}_k)=\Pi_{i,k}(\cdot)-\sum_{i=1}^k\sigma_{i,k+1}(\cdot)\bar{x}_{k+1}$$

$$Y_{i,k+1}(x_1,\ldots,x_{k+1},\hat{b}_1,\ldots,\hat{b}_k)=Y_{i,k}(\cdot)+\sum_{i=1}^k\frac{\partial x_{k+1}^*}{\partial\hat{b}_i}\frac{\bar{x}_{k+1}\gamma_i}{\mu_i\exp(\mu_i\hat{b}_i)}.$$

그러므로 우리는 다음의 결과를 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_{k+1}=&-\sum_{i=1}^k k_i\bar{x}_i^2-\sum_{i=1}^k\left(Y_{i,k+1}(\cdot)+\tilde{b}_i\right)\left(\Pi_{i,k+1}(\cdot)+\frac{\mu_i}{\gamma_i}\exp(\mu_i\hat{b}_i)\dot{\hat{b}}_i\right) \\ &+\bar{x}_{k+1}\left(b_{k+1}x_{k+2}+f_{k+1}(.)-\sum_{i=1}^k\frac{\partial x_{k+1}^*}{\partial x_i}f_i(.)+\sum_{i=1}^k\exp(\mu_i\hat{b}_i)\sigma_{i,k+1}(.)\right. \\ &\left.-\sum_{i=1}^kY_{i,k+1}(.)\sigma_{i,k+1}(.)+\sum_{i=1}^k\frac{\partial x_{k+1}^*}{\partial\hat{b}_i}\frac{\gamma_i\Pi_{i,k+1}(.)}{\mu_i\exp(\mu_i\hat{b}_i)}\right) \\ &-\frac{\mu_{k+1}}{\gamma_{k+1}}\exp(\mu_{k+1}\hat{b}_{k+1})\tilde{b}_{k+1}\dot{\hat{b}}_{k+1}. \end{aligned}$$

이 결과를 바탕으로 우리는 이 단계에서의 가상의 입력 x_{k+2}^*를 설계할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
x_{k+2}^{*} =& -\frac{\operatorname{sgn}(b_{k+1})}{\exp(\mu_{k+1}\hat{b}_{k+1})}\Bigg(k_{k+1}\bar{x}_{k+1}+f_{k+1}(.)-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial x_{k+1}^{*}}{\partial x_i}f_i(.) \\
&+\sum_{i=1}^{k}\exp(\mu_i\hat{b}_i)\sigma_{i,k+1}(.)-\sum_{i=1}^{k}Y_{i,k+1}(.)\sigma_{i,k+1}(.) \\
&+\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial x_{k+1}^{*}}{\partial \hat{b}_i}\frac{\gamma_i \Pi_{i,k+1}(.)}{\mu_i\exp(\mu_i\hat{b}_i)}\Bigg) \qquad (8) \\
=:& -\frac{\operatorname{sgn}(b_{k+1})}{\exp(\mu_{k+1}\hat{b}_{k+1})}\alpha_{k+1}(x_1,\dots,x_{k+1},\hat{b}_1,\dots,\hat{b}_k).
\end{aligned}
$$

$\bar{x}_{k+2}=x_{k+2}-x_{k+2}^{*}$

그리고 이 단계의 tuning function은 가상의 입력의 설계와 $\tilde{b}_{k+1}\dot{\hat{b}}_{k+1}$항에 의해서

$Y_{k+1,k+1}(x_1,\dots,x_{k+1},\hat{b}_1,\dots\hat{b}_{k+1})\equiv 0.$

$\Pi_{k+1,k+1}(x_1,\dots,x_{k+1},\hat{b}_1,\dots\hat{b}_{k+1})=\dfrac{\bar{x}_{k+1}\alpha_{k+1}(.)}{\exp(\mu_{k+1}\hat{b}_{k+1})}$

가 되고, 이 단계의 리아푸노프 함수는

$$\dot{V}_{k+1}=-\sum_{i=1}^{k+1}k_i\bar{x}_i^2-\sum_{i=1}^{k+1}\left(Y_{i,k+1}(\cdot)+\tilde{b}_i\right)\left(\Pi_{i,k+1}(\cdot)+\frac{\mu_i}{\gamma_i}\exp(\mu_i\hat{b}_i)\dot{\hat{b}}_i\right)$$
$$+b_{k+1}\bar{x}_{k+1}\bar{x}_{k+2}$$

로 유도된다. 그러므로 이로부터 귀납법이 완료된다. 이 귀납법의 결과를 이용하면, 역진 기법의 마지막 단계에서

$$\dot{V}_{k+1}=-\sum_{i=1}^{n}k_i\bar{x}_i^2-\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{i,k+1}(\cdot)+\tilde{b}_i\right)\left(\Pi_{i,k+1}(\cdot)+\frac{\mu_i}{\gamma_i}\exp(\mu_i\hat{b}_i)\dot{\hat{b}}_i\right)$$

를 얻게 되고, 최종적으로 적응 제어 입력

$$u=u(x_1,\dots,x_n,\hat{b}_1,\dots,\hat{b}_n)$$

과 update laws

$$\dot{\hat{b}}_i=-\frac{\gamma_i\Pi_{i,n}(.)}{\mu_i\exp(\mu_i\hat{b}_i)},\quad i=1,\dots,n \qquad (9)$$

를 설계할 수 있다.

정의된 리아푸노프 함수 $V_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x}_i^2/2+\tilde{b}_i^2/2\gamma_i\right)$와 그의 미분 결과인 $\dot{V}_n=-\sum_{i=1}^{n}k_i\bar{x}_i^2$에서 폐루프 시스템은 광역적 안정임을 알 수 있다. 더욱이, La Salle의 invariance principle에 의해서 폐루프 시스템의 모든 유계 궤적들은 $\{(\bar{x}_1,\dots\bar{x}_n,\tilde{b}_1,\dots\tilde{b}_n):\dot{V}_n=0\}$ 내에서 가장 큰 invariance 집합으로 수렴한다. 그러므로 $\lim_{t\to\infty}(\bar{x}_1(t),\dots,\bar{x}_n(t))^T=0$이고, 가상의 입력의 정의에 의해서 다음의 결과를 얻는다.

$$\lim_{t\to 0}(x(t))=0,\quad \forall\,(x(0),\hat{b}_1,\dots,\hat{b}_n)\in R^n\times R^n.$$

4. 결 론

본 논문에서는 미지의 가상 입력 계수들을 가지는 시스템에 대해서 안정화 문제를 고려하였다. 이 시스템에 대해서 역진 기법을 사용하기 위해서는 계수들을 추정할 수 있는 추정기가 필요하며, 본 논문에서는 각 계수들에 대해서 1차 추정기를 설계하여 가상의 입력을 설계할 수 있는 방법을 제시하였다. 주요 아이디어를 설명하기 위해서 드리프트항에 미지의 상수들은 고려하지 않았으며, 차후의 연구는 드리프트항에 불확실성까지 포함된 비선형 시스템에 대한 안정화 연구가 될 것이다.

참 고 문 헌

[1] I, Kanellakopoulos, P.V. Kokotović, A.S. Morse, "Adaptive feedback linearization of nonlinear systems", Foundations of adaptive control, Berlin:Springer, pp. 311-346, 1991.

[2] I, Kanellakopoulos, P.V. Kokotović, A.S. Morse, "Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems", IEEE Trans. Automatic Control, vol. 36, pp. 1241-1253, 1991.

[3] M. Krstić, I, Kanellakopoulos, P.V. Kokotović, "Adaptive nonlinear control without overparametrization", Systems Control Lett., vol. 43, pp. 738-752, 1992.

[4] R.A. Freeman, P.V. Kokotović, Robust nonlinear control design, Birkhauser, 1996.

[5] R.A. Freeman, M. Krstić, P.V. Kokotović, "Robustness of adaptive nonlinear control to bounded uncertainties", Automatica, vol. 34, pp. 1227-1230, 1998.

[6] R.A. Freeman, L. Praly, "Integrator backstepping for bounded controls and control rates", IEEE Trans. Automatic Control, vol. 43, pp. 258-262, 1998.

[7] M. Krstić, H. Deng, Stabilization of nonlinear uncertain systems. New York: Springer, 1998.

[8] Z.P. Ziang, L. Praly, "Design of robust adaptive controllers for nonlinear systems with dynamic uncertainties", Automatica, vol. 34, pp. 825-840, 1998.

[9] P.V. Kokotović, M. Arcak "Constructive nonlinear control: a historical perspective", Automatica, vol. 37, pp. 637-662, 2001.

[10] M. Krstić, I, Kanellakopoulos, P.V. Kokotović, Nonlinear and adaptive control design of adaptive control design. New York: Wiley, 1995.