

볼바 방정식 특이해에 관한 분석 Analysis for Singularity Problem in the Ball-bar Equation

*이동목¹, #양승한²

*D. M. LEE¹, #S. H. YANG(syang@knu.ac.kr)²

¹ 경북대학교 대학원 기계공학과, ² 경북대학교 기계공학과

Key words : Singularity, Least squares, Error estimation, Ball bar

1. 서론

볼바(Ball bar)는 공작기계의 이송 성능을 평가하는 시스템으로서 1982년에 처음 소개되었으며,¹ 공작기계 직선 이송계의 원호 보간이나 회전 이송계의 회전 운동에 따라 원호 시험(Circular test)을 시행함으로써 공작기계 이송계의 오차를 평가한다. 볼바 시스템을 이용한 성능 평가 방법은 간편한 측정법과 짧은 측정시간, 저렴한 요구 비용으로 인해 널리 사용되고 있으며 현재 ISO 203-1에 채택되어 있다.² 최근까지 볼바를 이용한 오차 측정 및 평가 방법은 많은 선행 연구자에 의해 연구가 계속 이루어져 왔으며 볼바 제작업체에서는 볼바 시스템뿐만 아니라 측정 및 분석이 가능한 상용소프트웨어를 제공함으로써 시스템 사용자에게 편의를 제공하고 있다.

볼바 측정은 측정 방법에 따라 크게 동적 오차 진단(Dynamic error diagnosis)과 준정적 오차 진단(Quasi-static error diagnosis)으로 나눌 수 있으며 준정적 오차 진단은 제어기에 성능에 따른 오차요소를 배제하여 공작기계 자체가 가지는 기구학적 오차만을 파악할 수 있는 방법으로 활용된다.³ 일반적으로 볼바 측정 데이터는 반경 방향으로의 변위 편차와 이송계의 기하학적 관계를 이용해 볼바 방정식을 구성하고 최소 자승(Least squares)을 이용한 역 기구학을 통해 분석할 수 있다.^{3,4} 이 때 오차 요소의 매개변수 모델링(Parametric modeling)이 필수적이며 일반적으로 다항식 모델이 많이 사용된다. 선형 방정식으로 구성된 볼바 방정식은 특이값 분해(Singular value decomposition)를 이용해 최소 자승 풀이를 통해 해를 구할 수 있으나 각 오차 요소들의 모델 형태나 측정 원호 경로나 방향에 따라 특이해 문제(Singularity problem)를 가지게 된다. 이 문제는 오차 추정(Error estimation) 시 큰 계산 오차를 유발시키게 된다. 본 연구에서는 오차 모델이나 측정 경로에 따라 발생할 수 있는 특이해에 관해 분석함으로써 적절한 오차 모델링 방법과 측정 원호 경로에 대해 기술한다.

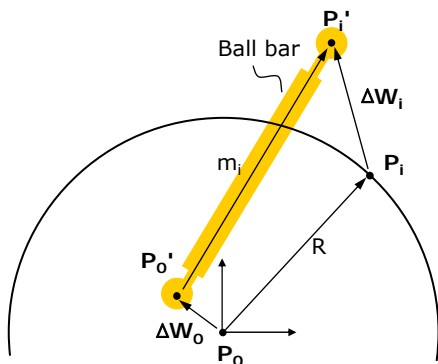


Fig. 1 Schema of ball bar test

2. 볼바 방정식과 오차 모델

볼바는 원호 시험동안 반경 방향으로의 변위 편차를 측정한다. 3축 공작기계에서 공구 끝에 위치한 툴컵(Tool cup)을 이용하여 공작물 볼(Workpiece ball)의 위치를 결정한 후 반경만큼 이동 후 툴 볼(Tool ball)과 결합하여 원호 시험을

수행하는데 툴 컵은 각 테이블이 가지는 기하학적 오차에 의해 편차를 가지므로 공작물 볼과 툴 볼은 항상 위치 오차를 가지게 되며 이 오차를 체적오차(Volumetric error)라고 한다. 볼바 측정시 볼바 측정값과 오차의 기하학적 관계는 Fig. 1과 같다(설치 오차 무시). 원호 보간시에 공칭 좌표값(Nominal coordinates) P_0, P_1 를 나타내는 공작물 볼 중심점과 툴 볼 중심점은 체적 오차($\Delta W_0, \Delta W_1$)로 인해 P_0', P_1' 에 위치하게 된다. 따라서 볼바 측정값(m_i)은 이 두 볼 중심점 사이의 거리를 나타낸다.

$$m_i = \|P_1' - P_0'\| = \|P_1 + \Delta W_1 - (P_0 + \Delta W_0)\| \quad (1)$$

식 (1)의 양변을 제곱한 후 오차의 고차 항을 무시하면 ($\Delta R^2 = \Delta W^T \Delta W \approx 0$) 다음과 같은 볼바 방정식을 구할 수 있다.

$$R \Delta R_i = (P_1 - P_0)^T (\Delta W_1 - \Delta W_0) \quad (2)$$

여기서, $\Delta R_i = m_i - R$.

체적 오차는 공작기계의 형태(Configuration)에 따라 달라지며 오차 합성 모델링(Error synthesis modeling) 방법을 통해 공작물 좌표계에 대한 공구 끝의 위치로 나타낸다. 각 이송계의 기구학적 관계(Kinematic chain)를 이용한 오차 합성 과정은 선행 연구에 의해 많이 소개되었으며,⁵ 수직형 3축 공작기계의 체적오차는 식 (3)과 같이 정리할 수 있다. (직각도 오차 생략)

$$\Delta W = \begin{bmatrix} -\delta_{xx} - \delta_{xy} + \delta_{xz} - (\epsilon_{zx} + \epsilon_{zy})y - (\epsilon_{yx} + \epsilon_{yy})z \\ -\delta_{yx} - \delta_{yy} + \delta_{yz} + \epsilon_{zx}x + (\epsilon_{xx} + \epsilon_{xy})z \\ -\delta_{zx} - \delta_{zy} + \delta_{zz} - \epsilon_{yx}x + (\epsilon_{xx} + \epsilon_{xy})y \end{bmatrix} \quad (3)$$

운동축의 오차요소를 매개변수 모델링 중 가장 쉽고 일반적인 방법으로 다항식 모델(Polynomial model)과 삼각함수 모델(Trigonometric model)이 있다.

$$E_i(j) = \sum_{k=1}^n c_{ijk} j^k \quad (\text{Polynomial model}) \quad (4)$$

$$E_i(j) = \sum_{k=1}^{n/2} a_{ijk} [\cos(\omega_{ij} j) - 1] + b_{ijk} \sin(\omega_{ij} j) \quad (\text{Trigonometric model}) \quad (5)$$

여기서, $E_i(j)$: j축의 i 방향 오차 요소.

식 (3)의 체적오차는 식 (4)와 식(5)의 오차 모델로 나타낼 수 있으며 식 (2)에 대입한 후 모델 계수를 미지수로 하는 식(6)과 같은 선형방정식으로 재정리할 수 있다.

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (6)$$

여기서 \mathbf{b} 는 볼바에 의해 측정된 반경방향 오차

\mathbf{A} 는 매개변수의 계수들

\mathbf{x} 는 오차 요소의 매개변수를 포함하는 미지수.

3. 특이해 문제

볼바 방정식의 해를 구하기 위해서는 식 (6)의 최소 자승 풀이가 필요하다. 최소 자승법은 일반적으로 특이값 분

해를 이용한 방법이 많이 사용된다. 특이값 분해 방법은 슈도-인버스(Pseudo-inverse)를 이용하는 방법으로서 선형 독립을 빠르게 판단할 수 있다.

$$\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T \quad (7)$$

여기서 \mathbf{U}, \mathbf{V} : Orthogonal matrix

\mathbf{S} : Diagonal matrix with singular values

하지만 매개변수들의 최적 해를 구하기 위해서 단순히 최소 자승법을 사용할 수는 없다. 최소 자승법을 사용하기 위해서는 식(6)에서 행렬 \mathbf{A} 의 열벡터들이 반드시 선형 독립이어야만 한다. 따라서 오차 모델에 따라 혹은 원호 경로의 방향에 따라 선형 독립성 유무가 결정되기도 한다.

모든 오차 요소를 식 (4)와 같은 다항식 모델로 사용하였을 경우 살펴보기로 한다. 만약 단순히 1 차 모델을 사용되었을 경우 행렬 \mathbf{A} 의 열벡터는 다음과 같이 나타난다.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_{18}] = \begin{bmatrix} \vdots \\ -(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \\ \vdots \\ -(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \\ \vdots \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

식(8)에서 알 수 있듯이 2 번째 열벡터와 4 번째 열벡터는 선형 독립이 아니므로 식 (6)의 해는 특이해를 가지게 되며 이 해를 오차 추정에 사용할 경우 추정 오차값이 커질 가능성이 많게 된다. 마찬가지로 만약 식 (5)와 같은 삼각함수 모델을 사용하였을 경우에는 식 (9)에 표현되어 있듯이 처음 두 개의 위치오차(δ_{ij})를 나타내는 열벡터와 세 번째에 표현한 한 개의 각도오차(ϵ_{ij}) 열벡터 사이에서 특이해가 발견된다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)(\cos(w_x \mathbf{x}) - \cos(w_x \mathbf{x}_0)) \\ \vdots \\ -(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)(\cos(w_x \mathbf{x}) - \cos(w_x \mathbf{x}_0)) \\ \vdots \\ (\mathbf{x}_0 \mathbf{y} - \mathbf{x} \mathbf{y}_0)(\cos(w_x \mathbf{x}) - \cos(w_x \mathbf{x}_0)) \\ \vdots \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

이것은 식 (10)과 같이 세 번째 표현된 열벡터를 분해 해 봄으로써 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x}_0 \mathbf{y} - \mathbf{x} \mathbf{y}_0)(\cos(w_x \mathbf{x}) - \cos(w_x \mathbf{x}_0)) \\ &= -\mathbf{y}_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)(\cos(w_x \mathbf{x}) - \cos(w_x \mathbf{x}_0)) \\ & \quad + \mathbf{x}_0(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)(\cos(w_x \mathbf{x}) - \cos(w_x \mathbf{x}_0)) \end{aligned} \quad (10)$$

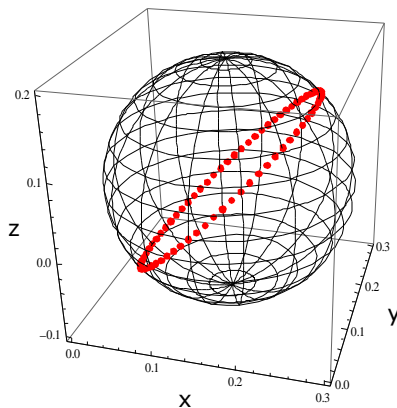


Fig. 2 Φ degree rotational path about Y axis

볼바 방정식의 특이해는 오차의 매개변수 모델뿐만 아니라 측정시 원호 경로 방향에 따라서도 발생한다. 다항식 오차모델을 이용하였을 경우 Fig. 3 과 같이 Y 축에 대해 임의의 각도(ϕ)만큼 회전한 원호 경로를 따라 측정한다면 식 (11)과 같이 X 축의 선형변위오차와 Z 축의 X 방향 진격도 오차간에 특이해가 발생한다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 \\ \vdots \\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) \\ \vdots \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

여기서 특이성은 각 열벡터에 식 (12)와 같은 원호 좌표값을 대입함으로써 식 (13)에서 확인할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \phi \cos \theta \\ R \sin \theta \\ R \sin \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$(x - x_0)^2 = R^2 \cos \phi \cos^2 \theta (\cos \phi) \quad (13a)$$

$$(x - x_0)(z - z_0) = R^2 \cos \phi \cos^2 \theta (\sin \phi) \quad (13b)$$

4. 결론

볼바 방정식의 최소 자승해를 구하는 데 있어 매개변수를 이용한 오차 모델과 측정 원호 경로가 영향을 미치게 되며 수직형 3 축 공작기계 타입은 다항식 모델과 삼각함수 모델 모두 특이해를 가지게 됨을 알 수 있었다. 그리고 X 축이나 Y 축에 대해 회전각을 가지는 측정 경로를 설정하는 경우 또한 특이성이 나타났다. 볼바 방정식이 특이해를 갖지 않기 위해서 행렬 구성이 선형 독립이어야 하며 적절한 오차 모델 사용 혹은 2 개 이상의 모델을 혼용하여야 하며 특정 축에 대해 회전되지 않은 측정 경로를 사용하여야 한다.

후기

이 논문은 정부의 재원으로 한국과학재단의 지원(2008년도 국가지정연구실사업)을 받아 수행된 연구임(No. R0A-2007-000-10045-0).

참고문헌

1. Bryan, J. B., "A Simple Method for Testing Measuring Machines and Machine Tools Part 1: Principles and Application," Precision Engineering, 4, 61-69, 1982.
2. ISO 230-1, "Acceptance Code for Machine Tools Part 1: Geometry Accuracy of Machines Operated Under No Load or Finishing Condition," ISO, 1992
3. Hai, N., Yuan, J., and Ni, J., "Reverse Kinematic Analysis of Machine Tool Error using Telescoping Ball Bar," ASME, PED 68-1, 277-286, 1994.
4. Pahk H. J., Kim Y. S., and Moon J. H., "A New Technique for Volumetric Error Assessment of CNC Machine Tools Incorporating Ball Bar Measurement and 3D Volumetric Error Model," Int. J. Machine Tools and Manufacturing, 37(11), 1583-1596, 1997
5. 이동목, 양승한, "공작기계의 기하학적 오차 합성 모델링을 위한 수학적 분석 기법," 한국정밀공학회 춘계학술대회 논문집, 71-72, 2008.