

Geometric algebra에 의한 비정현파 다선식 전력계통에서의 피상전력 표현

전성준
부경대학교

Representation of Apparent Power of Non-sinusoidal Multi-line Power System Using Geometric Algebra

Seong-Jeub Jeon
Pukyong National University

Abstract - According to recent researches, apparent power in non-sinusoidal single phase system can be represented with geometric algebra. In this paper, the geometric algebra is applied to apparent power defined in a multi-line system having transmission lines with frequency-dependent resistances under non-sinusoidal conditions.

1. 서 론

피상전력과 무효전력의 개념은 교류를 발견한 후 곧 정립되기 시작하였다. 단상 정현파에서나 정현파 대칭 3상에서의 피상전력과 무효전력의 개념은 매우 명확하여 논란의 여지가 없다. 그러나 고조파가 포함되거나 불평형 다상 교류에서의 무효전력 개념은 오랫동안 논란의 대상이었다. 최근 들어 논란은 어느 정도 정리되어 Buchholz의 이론이 다수에 의해 받아들여지고 독일의 표준인 DIN 40110과 미국의 표준으로 볼 수 있는 IEEE std. 1459에 반영되었다 [1]. Buchholz 이론은 전력선 각 상(선)의 저항이 동일하다는 가정 하에 만들어졌다고 볼 수 있다. 각 상(선)의 저항이 동일하지 않은 경우에 대하여서도 연구되었고 나아가 전력선의 저항이 주파수에 대한 의존성이 있는 경우의 연구도 있었다 [2].

단상정현파 시스템에서 유효전력과 무효전력을 동시에 표현하는 방법으로 복소전력이 일찍부터 도입되어 널리 사용되었다. 고조파가 포함되거나 다상 비대칭/불평형에서는 모든 직교 성분의 cross product term이 피상전력을 만든다는 것은 일찍이 알려졌고 단상정현파에서 정의된 복소전력 만으로는 이런 경우의 피상전력 구성을 표현하기에는 부족하다. Clifford 이론 중 geometric algebra를 응용하면 단상 비정현파 계통에서 피상전력의 cross product term을 표현할 수 있음이 최근에 알려졌다 [3], [4].

본 논문에서는 [2]에서 정의된 전력선의 저항이 주파수에 대한 의존성이 있는 다선식 경우에 피상전력을 geometric algebra로 표현해 보았다. 이 피상전력은 주파수 영역에서 표현된 많은 이론들에서 정의된 피상전력을 포함하는 것이므로 주파수 영역에서 표현되는 많은 이론에서 geometric algebra가 사용될 수 있음을 뜻한다.

2. 본 론

2.1 Geometric Algebra.

전력이론의 응용에는 geometric algebra의 전체보다는 매우 적은 부분만을 사용한다. geometric algebra는 multi-vector의 정의로 시작할 수 있다. multivector는 scalar 량과 vector량의 합으로 표현된다. multivector가 정의되면 일반적으로 vector에서 정의되던 내적(inner product)과 외적(outer product) 외에 geometric product를 정의할 수 있다. 두 vector **a**와 **b**의 geometric product는 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (1)$$

여기서 \cdot (dot)은 내적을 \wedge 은 외적을 나타낸다. 외적으로 표현된 부분은 bivector라고 부른다. 이와 같이 임의의 두 vector의 geometric product는 multivector로 표현된다. 직교하는 (orthogonal) 두 벡터의 geometric product는 외적과 동일하다. multivector **A**의 scalar 부분을 $\langle \mathbf{A} \rangle_0$, bivector 부분을 $\langle \mathbf{A} \rangle_2$ 로 나타내고 이를 이용해 multivector의 reverse **A**¹를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{A} = \langle \mathbf{A} \rangle_0 + \langle \mathbf{A} \rangle_2, \mathbf{A}^1 = \langle \mathbf{A} \rangle_0 - \langle \mathbf{A} \rangle_2 \quad (2)$$

그리고 multivector **A**의 norm $\|\mathbf{A}\|$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\langle \mathbf{AA}^1 \rangle_0} \quad (3)$$

이외에 벡터에 관련되는 내용, 즉 내적, 외적과 norm은 일반적인 정의나 법칙을 따른다.

2.2 Non-sinusoidal Power Theory

주파수 영역에서의 전력이론은 전압과 전류의 푸리에 급수 전개를 사용한다. 그림 1에 주어진 전력 시스템에서 l번째 선(도체)의 전압과 전류가 다음과 같이 주어지면

$$v_{sl} = V_{l,0} + \sum_{k=1}^{\infty} (v_{l,2k-1} + v_{l,2k}), \quad (4a)$$

$$i_{sl} = I_{l,0} + \sum_{k=1}^{\infty} (i_{l,2k-1} + i_{l,2k}) \quad \text{for } l = 1, 2, \dots, m, \quad (4b)$$

여기서 l은 선 번호이고 k는 고조파 차수이고 또

$$v_{l,2k-1} = \sqrt{2} V_{l,2k-1} \sin k\omega t, \quad (5a)$$

$$v_{l,2k} = \sqrt{2} V_{l,2k} \cos k\omega t, \quad (5b)$$

$$i_{l,2k-1} = \sqrt{2} I_{l,2k-1} \sin k\omega t, \quad (5c)$$

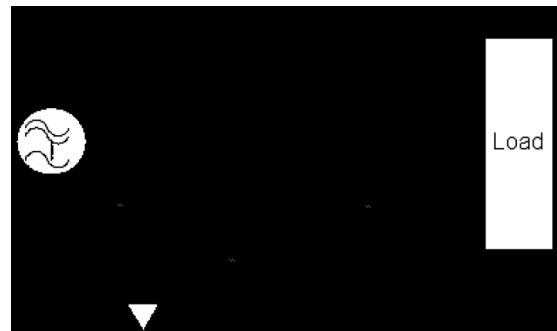
$$i_{l,2k} = \sqrt{2} I_{l,2k} \cos k\omega t. \quad (5d)$$

전압벡터와 전류벡터를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{V} \equiv \sqrt{\frac{r}{r_{1,0}}} V_{1,0} \mathbf{e}_{1,0} + \sqrt{\frac{r}{r_{2,0}}} V_{2,0} \mathbf{e}_{2,0} + \dots + \sqrt{\frac{r}{r_{l,j}}} V_{l,j} \mathbf{e}_{l,j} + \dots, \quad (6a)$$

$$\mathbf{I} \equiv \sqrt{\frac{r_{1,0}}{r}} I_{1,0} \mathbf{e}_{1,0} + \sqrt{\frac{r_{2,0}}{r}} I_{2,0} \mathbf{e}_{2,0} + \dots + \sqrt{\frac{r_{l,j}}{r}} I_{l,j} \mathbf{e}_{l,j} + \dots. \quad (6b)$$

$\mathbf{e}_{l,j}$ 는 기본벡터이다. 홀수 j는 (j+1)/2 차 정현고조파를 나타내고 짝수 j는 j/2 차 여현고조파를 나타내고 영(0)은 직류를 나타낸다. 전류벡터의 가중치는 전압벡터의 가중치의 역수이다. 이들 벡터를 사용하여 multivector 전력 **S**는 다음과 같이 전압-전류 벡터의 geometric product로 정의된다.



〈그림 1〉 Multi-line power system

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{VI} \quad (7)$$

multivector 전력의 scalar 부분은 다음과 같이 평균전력 P 가 된다. 평균전력은 유효전력이라고도 불린다.

$$\langle \mathbf{S} \rangle_0 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{I} = \sum_{l=1}^m \sum_{j=0}^{\infty} V_{l,j} I_{l,j} = P \quad (8)$$

multivector 전력의 bivector 부분은 다음과 같이 무효전력의 벡터형 표현이 된다. 즉 이것의 norm이 무효전력이 된다.

$$\langle \mathbf{S} \rangle_2 = \mathbf{V} \wedge \mathbf{I} = \sum_{(l,j)=1}^{\infty} \sum_{(l',j')=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{r_{l',j'}}{r_{l,j}}} V_{l,j} I_{l',j'} - \sqrt{\frac{r_{l,j}}{r_{l',j'}}} V_{l',j'} I_{l,j} \right) (\mathbf{e}_{l,j} \wedge \mathbf{e}_{l',j'}) \quad (9)$$

여기에는 다음의 관계가 사용되었다.

$$\mathbf{e}_{l',j'} \wedge \mathbf{e}_{l,j} = -\mathbf{e}_{l,j} \wedge \mathbf{e}_{l',j'} \quad (10)$$

이 bivector의 norm이 [2]에서 정의한 무효전력 Q 가 된다.

$$\|\langle \mathbf{S} \rangle_2\| = \sqrt{\sum_{(l,j)=1}^{\infty} \sum_{(l',j')=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{r_{l',j'}}{r_{l,j}}} V_{l,j} I_{l',j'} - \sqrt{\frac{r_{l,j}}{r_{l',j'}}} V_{l',j'} I_{l,j} \right)^2} = Q \quad (11)$$

이 식의 괄호내의 부분은 Buchholz 이론에 해당되는 [5]에서는 sub reactive power로 불렸다. multivector 전력의 norm은 피상전력 S 가 된다.

$$\|\mathbf{S}\| \equiv \|\mathbf{VI}\| = \sqrt{\mathbf{VI}(\mathbf{VI})^t} = \sqrt{\mathbf{VI}^t \mathbf{V}^t} = \sqrt{\mathbf{V}^t \mathbf{V}^t} \sqrt{\mathbf{I}^t \mathbf{I}^t} = V_e I_e \quad (12)$$

V_e 와 I_e 는 각기 실효전압과 실효전류라 불리며 전압벡터 \mathbf{V} 와 전류벡터 \mathbf{I} 의 norm이다. 식 (6)에서 r 은 기준저항으로 기준저항에 실효전류가 흘러 발생하는 전력손 rI_e^2 은 그림 1의 실제 전력 시스템에서의 전력손실과 같다.

무효전력이 영이 되는 경우는 전압벡터와 전류벡터가 서로 collinear할 때이다. 즉 가중치가 고려된 전압과 전류의 공간-스펙트럼 상 분포(spatiospectral distribution)가 서로 일치할 때이다. 무효전력이 영인 조건은 (9) 또는 (11)에서 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{V_{l,j}}{r_{l,j} I_{l,j}} = \frac{V_{l',j'}}{r_{l',j'} I_{l',j'}} \quad \text{for all } l, j, l' \text{ and } j'. \quad (13)$$

무효전력이 영(0)이며 평균전력 P 를 만드는 최적인 상태의 전류는 다음과 같이 주어진다.

$$I_{l,j} = \frac{P}{V_e} \frac{r}{r_{l,j}} V_{l,j} \quad \text{for all } l \text{ and } j. \quad (14)$$

2.3 Example

논의한 이론을 3상 3선식 비정현파 시스템에 적용해 보자. 복잡성을 줄이기 위해 전원은 상전압의 실효치가 V 인 정현파 대칭 3상으로 하고 부하는 평형 3상에 한가지 고조파만 대칭으로 기본파의 20%를 포함시키자. 선로의 저항은 표피효과로 인해 다음과 같이 주파수의 제곱근에 비례한다고 가정하자.

$$r(\omega) = 0.01 \sqrt{\frac{\omega}{\omega_1}} \quad (15)$$

1번 선의 전압이 다음과 같으면

$$v_{s1} = \sqrt{2} V \sin \omega t \quad (16)$$

전압벡터는

$$\mathbf{V} = 0.5V (2\mathbf{e}_{1,1} - \mathbf{e}_{2,1} - \sqrt{3}\mathbf{e}_{2,2} - \mathbf{e}_{3,1} + \sqrt{3}\mathbf{e}_{3,2}) \quad (17)$$

1번 선의 전류가 다음과 같으면

$$i_1 = \sqrt{2} I \sin \omega t + 0.2 \sqrt{2} I \cos \omega t \quad (18)$$

전류벡터는

$$\mathbf{I} = 0.5I (2\mathbf{e}_{1,1} - \mathbf{e}_{2,1} - \sqrt{3}\mathbf{e}_{2,2} - \mathbf{e}_{3,1} + \sqrt{3}\mathbf{e}_{3,2}) + 0.1Ik^{1/4} (2\mathbf{e}_{1,2k} - \sqrt{3}\mathbf{e}_{2,2k-1} - \mathbf{e}_{2,2k} - \sqrt{3}\mathbf{e}_{3,2k-1} + \mathbf{e}_{3,2k}) \quad (19)$$

multivector 전력 \mathbf{S} 는 (7)과 같이 \mathbf{VI} 로 주어지는데 이의 scalar 부분은 평균전력 P 로 다음과 같이 주어진다.

$$P = \langle \mathbf{S} \rangle_0 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{I} = 0.25VI(4+1+3+1+3) = 3VI \quad (20)$$

무효전력을 나타내는 bivector 부분은

$$\langle \mathbf{S} \rangle_2 = \mathbf{V} \wedge \mathbf{I} = VI((0-0)\mathbf{e}_{1,1}\mathbf{e}_{1,2} + (-1+1)\mathbf{e}_{1,1}\mathbf{e}_{2,1} + \dots + (-\sqrt{3}+\sqrt{3})\mathbf{e}_{3,1}\mathbf{e}_{3,2}) + 0.1k^{1/2}VI(-2\mathbf{e}_{1,1}\mathbf{e}_{1,2k} - \sqrt{3}\mathbf{e}_{1,1}\mathbf{e}_{2,2k-1} + \dots - \sqrt{3}\mathbf{e}_{3,2}\mathbf{e}_{3,2k}) \quad (21)$$

무효전력은

$$Q = \|\langle \mathbf{S} \rangle_2\| = 3VI\sqrt{\sqrt{k} \times 0.04} = 0.6VI k^{1/4} \quad (22)$$

피상전력은

$$S = \|\mathbf{S}\| = 3VI\sqrt{1+0.04\sqrt{k}} \quad (22)$$

고조파 차수가 $k=5$, 47인 경우의 무효전력, 피상전력을 표 1에 나타내었다. 같은 크기의 고조파라 하더라도 고조파 차수가 높으면 표피효과로 인해 손실이 커지는 것이 반영되어 무효전력이 크게 나타났다.

〈표 1〉 고조파 차수에 따른 실효전류, 무효전력 및 피상전력

고조파차수	정규화 실효전류 (I)	정규화 무효전력 (3VI)	정규화 피상전력 (3VI)
5	1.808	0.299	1.044
47	1.955	0.524	1.129

3. 결 론

본 논문에서는 geometric algebra를 전력선의 저항이 주파수 의존성을 갖는 계통에서 정의된 전력 이론에 적용하여 multivector 전력을 정의하였다. multivector 전력의 scalar 부는 평균전력을 나타내며 bivector 부는 무효전력을 벡터형으로 나타낸다. bivector 부의 norm은 무효전력을 나타낸다. 이로써 주파수 영역에서 정의되는 대부분의 전력이론에서의 피상전력은 geometric algebra로 표현할 수 있음을 확인하였다.

[참 고 문 헌]

- [1] A. Ferrero, "Definitions of electrical quantities commonly used in nonsinusoidal conditions", *ETEP, European Transactions on Electrical Power*, vol. 8, no. 4, pp 235-240, Jul./Aug. 1998.
- [2] S.-J. Jeon, "Non-sinusoidal power theory in a power system having transmission lines with frequency-dependent resistances", *IET Gener. Transm. Distrib.*, vol. 1, no. 2, pp. 331-339, Mar. 2007.
- [3] A. Menti T. Zacharias and J. Miliias-Artitis, "Geometric algebra: a powerful tool for representing power under nonsinusoidal conditions", *IEEE Trans. Circuit and Systems*, vol. 54, no. 3, pp.601-609, Mar. 2007.
- [4] M. Catilla, J. C. Bravo, M. Ordóñez and J. C. Montano, "Clifford theory: a geometrical interpretation of multivectorial apparent power", *IEEE Trans. Circuit and Systems*, vol. 55, no. 10, pp.3358-3367, Nov. 2008
- [5] S.-J. Jeon, "Considerations on a reactive power concept in a multi-line system", *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 21, no. 2, pp. 551-559, Apr. 2006.