

### Fuzzy PI를 이용한 유도전동기의 제어

박성훈\*, 고창민\*, 이현석\*, 박승규\*, 안호균\*  
 창원대학교\*

### A Controller Design for an Induction Motor Using Fuzzy PI

Seong-Hun Park\*, Chang-Min Ko\*, Hyun-Seok Lee\*, Seung-Kyu Park\*, Ho-Gyun Ahn\*  
 Changwon National University\*

**Abstract** - The purpose for this paper is to obtain the  $H_\infty$  LMI with fuzzy PI controller for induction motor which is nonlinear system. The controller type is PI and the control gains are obtained based on  $H_\infty$  control problem. The PI controller is considered a part of a plant and the problem is changed to get controller with static gains. The nonlinear system is approximated as several linear systems and combined by using fuzzy technique.

#### 1. 서 론

유도전동기를 이용한 제어에 있어서는 응답의 정확성 및 외란의 영향을 적게 받는 빠른 응답성이 요구되고 있으며, 특히 산업현장에는 유도전동기 매개변수의 변동이나 외란에 강한 성능이 중요한 문제로 대두되고 있다. 모든 시스템에는 불확실성이 존재하는데 유도전동기 또한 비선형 시스템으로 그에 대한 해석과 제어기 구성이 매우 어렵다. 최근 비선형 시스템에 대한 체계적인 퍼지 제어기 설계방법으로 안정성과 성능을 수학적으로 보장하는 연구가 최근에 많이 이루어져 왔다.

유도기 시스템에 대한 안정성뿐만 아니라 외란 강한제어기 구성을 위한 제어기 설계 방법으로 비선형 시스템을 Takagi-Sugeno(T-S) 퍼지 모델을 이용하여 선형방정식으로 나타내고 외란의 영향이 적도록  $H_\infty$  PI제어기를 추가한 새로운 상태를 LMI 개념을 이용하여 안정적인 퍼지 PI 제어기 이득 값을 찾는 설계 방법을 제안하고자 한다.

#### 2. 본 론

##### 2.1 유도전동기 모델링

유도기의 동특성은 고정자와 회전자 상호간의 결합효과 때문에 시변계수를 가지는 복잡한 미분방정식으로 나타난다. 일반적인 유도전동기의 모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{n_p M}{JL_r} (\psi_{ra} i_{sb} - \psi_{rb} i_{sa}) - \frac{T_L}{J} \\ \frac{d\psi_{ra}}{dt} &= -\frac{R_r}{L_r} \psi_{ra} - n_p w \psi_{rb} + \frac{R_r}{L_r} M i_{sa} \\ \frac{d\psi_{rb}}{dt} &= n_p w \psi_{ra} - \frac{R_r}{L_r} \psi_{rb} + \frac{R_r}{L_r} M i_{sb} \\ \frac{di_{sa}}{dt} &= \frac{MR_r}{\sigma L_s L_r^2} \psi_{ra} + \frac{n_p M}{\sigma L_s L_r} w \psi_{rb} - \frac{M^2 R_r + L_r^2 R_s}{\sigma L_s L_r^2} i_{sa} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{sa} \\ \frac{di_{sb}}{dt} &= -\frac{n_p M}{\sigma L_s L_r} w \psi_{ra} + \frac{MR_r}{\sigma L_s L_r^2} \psi_{rb} - \frac{M^2 R_r + L_r^2 R_s}{\sigma L_s L_r^2} i_{sb} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{sb} \end{aligned} \quad (1)$$

$i, \psi, u_s$ 는 각각 전류와 자속 그리고 고정자 전압이다. a와b는 고정 2상을 의미 하며,  $\sigma = 1 - (M^2/L_s L_r)$ 이다.

다음과 같이 벡터의 상태를 설정 한다.

$$x = [w, \psi_a, \psi_b, i_a, i_b]^T \quad (2)$$

$T_{LN}$ 과  $R_{rN}$ 은 파라미터 불확실성을 의미하며,  $T_L$ 은 부하토크를 의미하며,  $R_r$ 은 회전자 저항을 나타낸다.

##### 2.2 유도전동기 선형화 모델링

$|\psi| = \sqrt{\psi_a^2 + \psi_b^2}$ ,  $\cos \rho = \frac{\psi_a}{|\psi|}$ ,  $\sin \rho = \frac{\psi_b}{|\psi|}$ 로 정의 하고  
 $i_d = \frac{\psi_a i_a + \psi_b i_b}{|\psi|}$ ,  $i_q = \frac{\psi_a i_b - \psi_b i_a}{|\psi|}$ ,  $\psi_d = \sqrt{\psi_a^2 + \psi_b^2} = |\psi|$ ,  $\psi_q = 0$  (3)  
 비선형상태 피드백을 사용하여 제어시스템을 간단한 구조로 바꿀 수 있다.

$$w = w, \psi_d = \sqrt{\psi_a^2 + \psi_b^2}, \rho = \arctan \frac{\psi_b}{\psi_a}, i_d = \frac{\psi_a i_a + \psi_b i_b}{|\psi|}, i_q = \frac{\psi_a i_b - \psi_b i_a}{|\psi|} \quad (4)$$

비선형 상태 변환은 다음과 같이 정의 한다.

$$\begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} = \sigma L_s \begin{pmatrix} -n_p w i_q - \frac{R_{rN}}{L_r} M \frac{i_q^2}{\psi_d} - \frac{R_{rN}}{L_r} \frac{M}{\sigma L_s L_r} \psi_d + v_d \\ n_p \frac{M}{\sigma L_s L_r} w \psi_d + n_p w i_d + \frac{R_{rN}}{L_r} M \frac{i_d^2}{\psi_d} + v_q \end{pmatrix} \quad (5)$$

(6)번식을 a-b축에 대하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = \sigma L_s |\psi| \begin{bmatrix} \psi_a & \psi_b \\ -\psi_b & \psi_a \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -n_p w i_q - \frac{R_{rN}}{L_r} M \frac{i_q^2}{\psi_d} - \frac{R_{rN}}{L_r} \frac{M}{\sigma L_s L_r} \psi_d + v_d \\ n_p \frac{M}{\sigma L_s L_r} w \psi_d + n_p w i_d + \frac{R_{rN}}{L_r} M \frac{i_d^2}{\psi_d} + v_q \end{pmatrix} \quad (6)$$

(4)번식과 (6)번 식을 이용하여 (1)번식을 새로운 페 루프 시스템으로 새롭게 정의한다.

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{n_p M}{JL_r} \psi_d i_q - \frac{T_{LN}}{J} \\ \frac{di_q}{dt} &= -\left( \frac{M^2 R_{rN}}{\sigma L_s L_r^2} + \frac{R_s}{\sigma L_s} \right) i_q + v_q \\ \frac{d\psi_d}{dt} &= -\frac{R_{rN}}{L_r} \psi_d + \frac{R_{rN}}{L_r} M i_d \\ \frac{di_d}{dt} &= -\left( \frac{M^2 R_{rN}}{\sigma L_s L_r^2} + \frac{R_s}{\sigma L_s} \right) i_d + v_d \\ \frac{d\rho}{dt} &= n_p w + \frac{R_{rN}}{L_r} M \frac{i_q}{\psi_d} \end{aligned} \quad (7)$$

$i_q$ 와  $i_d$ 식에는 비선형 요소들이 없어졌지만 속도 제어에 있어서  $\psi_d$ 부분이 포함되어 있어서 이를 보완하기 위해서 T-S Fuzzy 기법을 도입 한다.

##### 2.3 T-S Fuzzy PI $H_\infty$ 제어

d축은 비선형회환에 의해서 선형화가 이루어질 수 있으므로 제어가 용이하나 q축은 비선형성이 남아있으므로 T-S fuzzy개념을 사용하기로 한다. 속도제어를 위해서 (7)식을 이용해  $\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u + w(t)$  관계식을 유도하면,

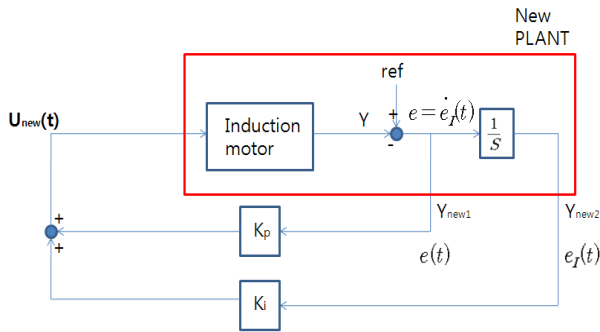
$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{i}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{n_p M}{JL_r} \psi_d \\ 0 & -\frac{M^2 R_{rN}}{\sigma L_s L_r^2} + \frac{R_s}{\sigma L_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{T_L}{J} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

T-S Fuzzy를 이용하여 비선형 요소인  $\psi_d$ 에 최소값과 최대값으로 나누어  $A_i$ 를  $A_1$ 과  $A_2$ 로 나누어 선형화 모델링 식을 세우면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t))} + w(t) \\ &= \sum_{i=1}^L h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) + w(t) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (\psi_d \min = 0.24 \text{ Wb}, \psi_d \max = 0.48 \text{ Wb}, A_i \in R^{n \times n}, B_i \in R^{n \times m}) \\ \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B u(t) + w(t), \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B u(t) + w(t) \end{aligned} \quad (10)$$

다음으로  $v_d$ 에 의해서 독립적으로 제어되는 PI제어기까지 포함된 가상의 플랜트에 대한 제어기의 이득  $K_c$ 를 찾는 것을 목적으로 한다.



〈그림 1〉 PI시스템의 재구성

재구성된 시스템을 식으로 표현하면 다음과 같다

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{i}_q \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{n_p M}{jL_r} \psi_d & 0 \\ 0 & -\frac{M^2 R_r}{\sigma L_s T_r^2} + \frac{R_s}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ i_q \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{T_L}{J} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$e(t) = \text{ref} - y(t) = \psi_{dref} - \psi_{di}, \quad U_{\neq w} = Ky(t) = KCx(t)$$

## 2.4 유도전동기 퍼지 선형 제어기를 거친 $H_\infty$ 제어기 설계

만약  $z_1(t)$ 은  $iF_{i1}$ 이며,  $z_2(t)$ 는  $F_{ig}$ 라고 가정하면,  $u(t) = K_j y(t)$  값을 가지게 되며,  $j = 1, 2, \dots, L$ 까지 퍼지제어기는 다음과 같다.

$$u(t) = \frac{\sum_{j=1}^L \mu_j(z(t))(K_j y(t))}{\sum_{j=1}^L \mu_j(z(t))} = \sum_{j=1}^L h_j(z(t)) K_j y(t) \quad (12)$$

$h_j(z(t))$ 는 퍼지 제어기 입력이며,  $K_j$ 는 제어 파라미터다. 위식들을 이용하여 안정한 페루프 제어시스템을 유도하면,

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) + w(t) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i + B_i K_j) y(t) + w(t) \quad (13)$$

외란은  $w(t)$  알 수 없지만 일정한 값 이하로 제한되어 있으며,  $w(t)$ 의 영향은 퍼지제어기의 제어 성능을 악화 시킨다. 그 결과 어떻게  $w(t)$ 의 영향을 없애느냐가 제어기 성능에서 중요한 점이다.  $H_\infty$  제어기는  $w(t)$ 의 제어 효과를 목적으로 설계되어진다.

$H_\infty$  제어기 효과에 대하여 고려하면,

$$\frac{\int_0^{t_f} y^T(t) Q x(t) dt}{\int_0^{t_f} w^T(t) w(t) dt} < \rho^2 \quad (14)$$

$t_f$ 는 제어기의 최종시간을 표시하며,  $\rho$ 는  $w(t)$ 중  $x(t)$ 와  $Q$  positive-definite weighting 행렬의 최대치로 규정된다. (20)번식을 물리적인 의미는 원하는 레벨인  $\rho$  에너지 관점에서 입력하여  $x(t)$ 내에서  $w(t)$ 를 낮춘다.  $w(t)$ 는  $L_2$ 이득은  $w(t)$ 로부터  $x(t)$ 로 규정된 값  $\rho^2$  작거나 같으며, 일반적인  $\rho$ 는  $w(t)$ 에서 양의 작은 값으로 1보다 작은 값으로 선택된다.

위에서 정의한 내용을 바탕으로 선형 퍼지 제어기법인 (12)식으로부터 비선형 시스템(13)과  $H_\infty$  제어 효과식인 (14)식을 결합하여 설계한다. (14)식에 Lyapunov함수를 선택하면,

$$V(t) = y^T(t) P y(t) \quad (15)$$

하중행렬  $P$ 는  $P = P^T > 0$ 로 정의 된다.  $v(t)$ 를 시간에 관하여 유도하면,

$$\dot{V}(t) = y^T(t) P y(t) + y^T(t) P \dot{y}(t) \quad (16)$$

퍼지제어기 (12)식은 비선형 시스템 (9)번식에 사용 된다. 그리고 positive-definite 행렬인  $P = P^T > 0$ 인 부등 행렬식으로 존재한다.

$$A_i^T P + P A_i + P B_i K_j + K_j^T B_i^T P + \left(2 + \frac{1}{\rho^2}\right) P P + Q < 0 \quad (17)$$

$i, j = 1, 2, \dots, L$ 로 가질 때 폐회로 비선형 시스템 (13)에서  $H_\infty$  제어기 성능을 (17)식에서 규정된  $\rho^2$ 에 의해 보증된다.

일반적으로 (17)식에서  $P = P^T > 0$ 인해를 결정하는 것은 쉽지 않다. 게다가 위식을 사용하여 비선형 행렬을 공식화 하는데 부등 문제가 생긴다. 부등한 행렬을 LMI를 이용하여 항등 행렬로 변형시킨다. 새로운 상태  $W = P^{-1}$  그리고  $Y_j = K_j W$ 를 도입하여 부등한 (17)식을 동등한 식으로 전개한다.

$$W A_i^T + A_i W + B_i Y_j + Y_j^T B_i^T + \left(2 + \frac{1}{\rho^2}\right) I < 0 \quad (18)$$

(18)식의 동등한 요소들을 LMI로 정리하면,

$$\begin{bmatrix} W A_i^T + A_i W + B_i Y_j + Y_j^T B_i^T + \left(2 + \frac{1}{\rho^2}\right) I & 0 & W \\ 0 & -I & 0 \\ W & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

(19)식에 LMI를 적용 시키면 양정치 해인  $w$ , 페 루프 시스템(19)식에서는 안정성과  $H_\infty$  제어기 성능을 가진다.

$H_\infty$  최적화 설계는 퍼지제어 시스템(9)식에 최적화 문제인  $\rho^2$  최소화 와  $W = W^T > 0$  과 LMI 안정성 판별 (19)식이다. 위식을 보게 되면 새로운 플랜트는 차수가 한 차수 늘어나기 때문에  $3 \times 3$ 행렬로 나타내며, 위식을 만족하는  $W$ 를 찾을 경우 안정적인 퍼지 입력력을 구할 수 있게 된다.

## 3 결 론

본 논문에서는 비선형인 유도기의 동특성 방정식을 선형화 방정식으로 바꾸기 위하여 좌표 변환 과정 및 자속방정식 변형과 상태 궤환 방정식을 이용하여 간단히 한 후  $\psi_j$  최소값, 최대값에 따라 선형상태를 뽑아내어 선형화 모델로 만들었다. 또한 외란의 영향을 최소화하기 위하여 리아프노프 함수를 이용하여 페루프 시스템의 안정성과  $H_\infty$  성능을 만족하는 PI제어기 존재 조건을 선형 행렬 부등식(21)으로 나타내었다. 이 선형 행렬 부등식의 해로부터 페루프 시스템의 안정성과  $H_\infty$  성능을 만족하는 선형 퍼지 제어기 설계 하였다.

## [참 고 문 헌]

- [1] 오태석, "속도 제어 비선형 비례적분제어 유도전동기 벡터제어", 産業技術研究, Vol.26 No.B [2006], 227-231, 2006
- [2] Bor-Sen Chen, "Robustness Design of Nonlinear Dynamic Systems via Fuzzy Linear Control", IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS, VOL7, NO5, 571-585, 1999
- [3] Riccardo Marino, "Adaptive Input- Output Linearizing Control of Induction Motors", IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL38, NO2, 208-221, 1993
- [4] 황락훈, "유도전동기 벡터제어 시스템을 이용한 속도제어에 관한 연구", 世明論叢, Vol.8 No.- [2000], 157-172, 2000
- [5] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control", IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., vol. 15, pp. 116-132, Jan./Feb. 1985.