

3차원 외재적 필터링을 이용한 SGS 모델

이경세* · 백제현**

A Subgrid scale model with a 3-dimensional explicit filtering

Kyung Seh Lee* and Je Hyun Baek**

Keywords : Large eddy simulation, unstructured mesh, explicit filtering, channel flow, pipe flow

Abstract

A large eddy simulation with an explicit filter on unstructured mesh is presented. The flow field is semi-implicitly marched by a fractional step method. Spatial discretization of the solver is designed to guarantee the second order accuracy. An isotropic explicit filter is adopted for measuring the level of subgrid scale velocity fluctuation. The filter is linearity-preserving and has second order commutation error. The developed subgrid scale model is basically eddy viscosity model which depends on the explicitly filtered fields and needs no additional ad hoc wall treatment, such as van Driest damping function. For the validation, the flows in a channel and a pipe are calculated and compared to experimental data and numerical results in the literature.

1. 서론

난류 유동 현상은 일반적으로 다양한 유동에서 흔히 발견되며 그 특성상 유동장에 많은 영향을 주기 때문에 난류유동의 해석 및 예측은 공학적으로 매우 중요하다. 수치해석적인 측면에서 이를 위해 지금까지 많은 난류 모델들이 개발되었다. 전통적으로 사용되어온 RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) 방정식 기반의 난류모델들은 많은 검증은 거쳤고 계산량이 비교적 적어 현재 폭넓게 사용되고 있지만 최근 들어 과거에 비해 연구대상이 다양하고 복잡해졌고 이러한 유동에 대한 정확성 및 적용성에 한계가 있음이 잘 알려져 있다. 반면에 모델링을 배제하기 때문에 가장 정확하다고 볼 수 있는 직접모사 기법(Direct Numerical Simulation)은 고 레이놀즈수에서 비현실적으로 과도한 계산용량을 요구하기 때문에 공학적인 유동에서의 적용이 현재로서는 불가능하다.

LES(Large Eddy Simulation)은 직접모사기법과 RANS 방정식 기반의 모델들의 중간적인 형태로 격자 크기 등으로 정해진 크기보다 큰 스케일의 유동장은 신뢰도 높은 방법으로 해석을 하는 반면 작은 스케일의 유동장은 모델링을 통해 그 전반적인 효과만 해석에 포함시킨다. 이로 인해 직접모사 기법에 비해 더 높은 레이놀즈 수에서 RANS 방정식 기반의 모델보다 더 높은 정확성의 난류유동 해석을 가능한 장점을 가지게 된다.

그러나 LES가 공학적인 목적으로 사용되기 위해서는 복잡한 형상에서의 해석이 가능하여야 한다. 이러한 목적을 위해서는 복잡한 형상에서의 유동해석 방법뿐 아니라 이와 함께 사용할 수 있는 SGS(Subgrid Scale) 모델이 필요하게 된다. 현재까지의 LES 연구는 주로 정렬격자를 이용하여 비교적 단순

한 유동장에서의 적용이 주로 연구되었으며 복잡한 형상에서의 LES에 대한 연구는 비교적 최근에 시작되었다[1-3].

본 연구에서는 복잡한 형상에서의 유동해석을 위해 개발된 비정렬 격자를 이용한 유동해석 코드를 사용하였으며 이와 함께 사용할 수 있는 SGS 모델 및 필터링을 제안하고 이를 채널 및 파이프 내 난류 유동 해석에 적용하여 그 타당성을 검증하였다.

2. 수치해석 기법

2.1 유동해석 기법

본 코드는 공간 차분으로 셀중심 유한 체적법을 사용하며 이차 정확도를 보장한다. 일반적으로 흔히 사용되는 사면체, 프리즘, 사각뿔, 육면체 셀로 이루어진 하이브리드 격자를 사용할 수 있다. 시간전진은 fractional step 방법을 사용하였다. 이 때 대류항은 Adams - Bashforth 방법, 점성항은 Crank - Nicolson 방법을 사용하여 준내재적으로 처리하였고 시간상 이차 정확도를 가진다. 보다 자세한 사항은 참고문헌을 참조한다[4].

2.2 SGS 모델

LES 방정식은 다음과 같이 필터링된 속도 및 압력장으로 표현되며 필터링된 작은 스케일의 영향으로 인해 SGS 응력항이 추가된다.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} \quad (1)$$

여기에서 응력항은 난류점성과 속도변형률 텐서로 다음과 같이 표현된다.

* 포스텍 기계공학과 대학원, conan@postech.ac.kr

** 포스텍 기계공학과, jhbaek@postech.ac.kr

$$\bar{\tau}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\bar{\tau}_{kk} = -2\nu_i\bar{S}_{ij} \quad (2)$$

난류점성은 다음과 같이 혼합거리 모형을 사용한다.

$$\nu_i = C\alpha|u'| \quad (3)$$

여기에서 C 는 모델 상수이며 α 는 다음 절에서 정해지는 크기 스케일이고 $|u'|$ 는 다음과 같이 필터링을 통해 구한다.

$$|u'| = \sqrt{(u_j - \bar{u}_j)(u_j - \bar{u}_j)} \quad (4)$$

모델상수 C 는 기체운동이론과의 근사 가정을 통해 0.5를 사용하기로 한다[5].

2.3 필터링 기법

비정렬 격자에서는 1차원 필터를 중첩시켜 3차원적인 필터를 만드는 정렬격자에서의 방법을 적용할 수 없기 때문에 3차원적인 필터가 필요하다. 본 연구에서는 다음과 같은 미분형 필터를 사용한다.

$$\bar{\phi} = \phi + \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_j} = F_D(\phi) \quad (5)$$

여기에서 α 는 격자상의 체커보드 패턴을 상쇄할 수 있도록 정의되며 Fig.1과 같은 1차원에서는 다음과 같이 $\alpha = \Delta/2$ 가 된다.

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= \phi + \alpha^2 \left(\frac{\phi_w - 2\phi_c + \phi_e}{\Delta^2} \right) \\ 0 &= 1 + \alpha^2 \frac{-4}{\Delta^2} \Rightarrow \alpha = \frac{\Delta}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

3차원 상에서는 다음과 같이 일반화 될 수 있다.

$$\alpha^2 = \frac{1}{\sum |c_i|} \quad (7)$$

여기에서 c_i 는 Laplacian 연산자의 이산화할 때의 계수들을 의미한다.

미분형 필터는 그 특성상 고주파 성분에 대한 감쇄가 저주파 성분에 비해 상대적으로 크기 때문에 필터로서 기능할 수 있다. 그러나 필터링 효과가 저주파 성분에도 어느 정도 작용하기 때문에 고주파 성분에만 필터링이 국한되도록 다음과 같은 대칭형 필터링을 고려하기로 한다.

$$\bar{\phi} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x_j \partial x_j} = \phi + \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_j} \quad (8)$$

대칭형 필터링을 적용하게 되면 저주파 성분에 대해 양변의 두번째 항의 값이 근사적으로 같아져 서로 상쇄되게 되므로 저주파 성분에 대한 필터의 영향을 줄일 수 있게

된다.

이 필터는 좌변이 내재적이므로 실질적인 구현상에서는 다음과 같이 두단계로 분해하여 근사한다.

$$\tilde{\phi} = \phi + \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_j} \quad (9)$$

$$\bar{\phi} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x_j \partial x_j} = \tilde{\phi}$$

위처럼 두단계로 분해하는 것보다 정교한 필터링을 위해 두번 이상의 반복을 통해 내재적 부분을 처리할 수도 있다.

위와 같은 미분형 필터는 선형 유동장에 대해서 필터링 효과가 없으며 이로 인해 이차 교환오차를 갖는다. 이는 유동해석 수치기법이 이차정확도를 갖는 것에 부합된다.

3. 난류유동 해석

3.1 채널 유동

개발된 방법론의 검증을 위해 레이놀즈 수 395의 채널 내 난류유동을 해석하였다. 채널의 크기는 채널 높이의 반을 기준으로 길이 높이 폭 방향으로 6:2:3이며 각 방향으로 65x65x65의 정렬 격자를 사용하였다. 격자는 길이 방향으로 36.5, 폭방향으로 18.2이며 채널 중앙에서 높이 방향으로 54.7, 벽에서 0.58이다.

먼저 필터링의 형태에 대한 영향을 살펴 보았다. Fig. 2는 필터링의 형태에 따른 평균 유동장을 문헌상의 DNS결과[6]와 비교한 것이다. 여기에서 CASE 1은 식 (8)과 같이 대칭형 필터링을 1번의 반복을 통해 구현한 것이고 CASE 2는 2번의 반복으로 보다 정교하게 한 것, CASE 3은 식 (5)와 같이 단순한 비대칭 미분 필터를 사용한 것이다. CASE 3이 다른 CASE에 비해 많은 난류 점성을 예측해 평균 유동장이 여타 두개의 CASE와 확연히 다른 것을 볼 수 있다.

이는 난류 점성 분포를 도시한 Fig. 3을 통해 설명될 수 있다. 단순 미분형 필터는 다른 두 필터링에 비해 난류 점성의 예측이 상대적으로 큼을 확인할 수 있다. 이에 비해 CASE 1과 2는 속도장 및 난류점성 분포에 큰 차이가 없다. 또한 난류점성이 이론적으로 y^+ 의 3층에 비례하는 것을 잘 보여주고 있다. 다만 보다 정교한 필터링을 구현한 CASE 2에서 이러한 이론치에 더 부합하는 분포를 확인할 수 있다. 이와 같은 분포는 본질적으로 층류유동인 벽 근처에서 충분히 작은 난류 점성을 예측하여 점성저층에 대한 적절한 예측이 가능함을 보여준다. 따라서 이와 같은 특성은 벽에 대한 특별한 처리없이 복잡한 형상에의 적용을 가능케 한다.

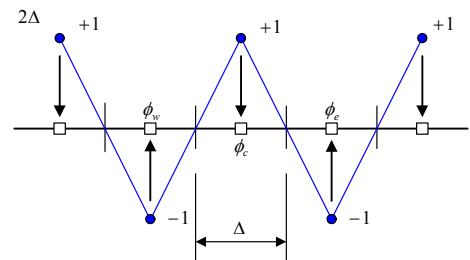


Fig. 1 1-dimensional checkerboard pattern

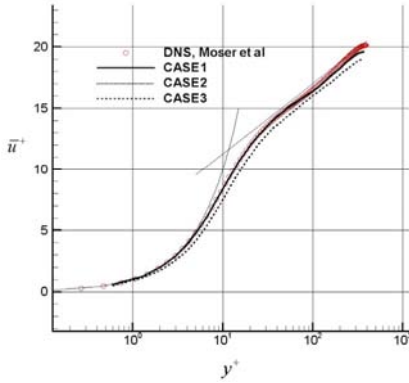


Fig.2 Mean streamwise velocity profiles, Re=395

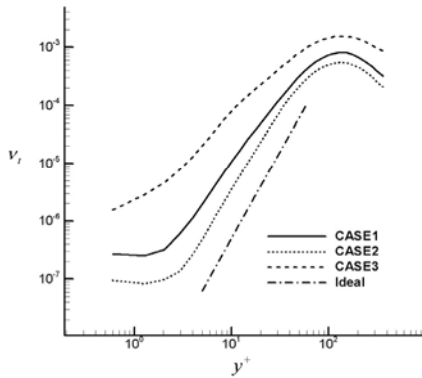


Fig.3 Mean turbulent viscosity profiles, Re=395

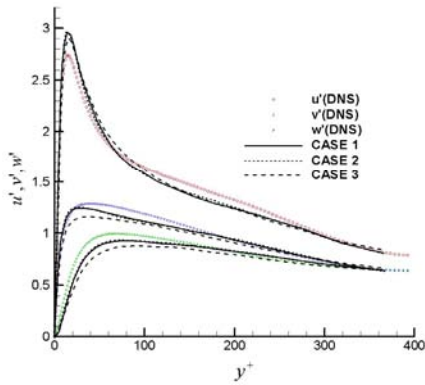


Fig.4 Rms velocity profiles, Re=395

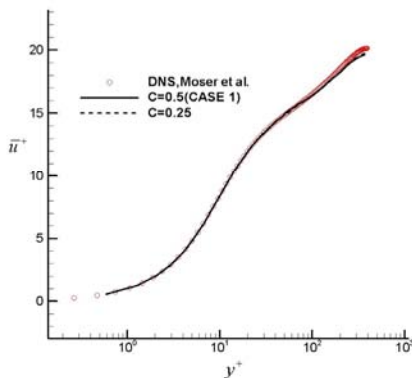


Fig.5 Dependence on model coefficient

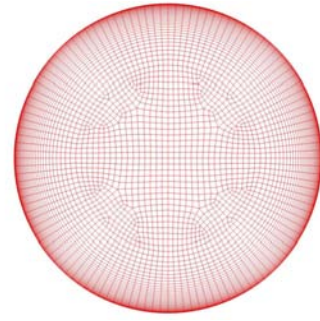


Fig.6 Cross sectional view of pipe mesh

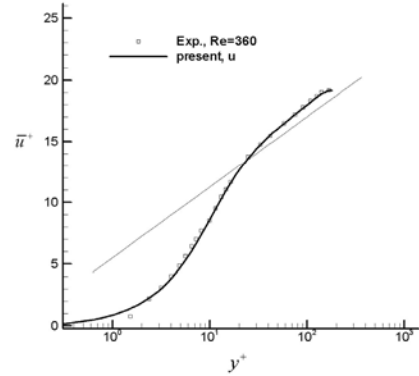


Fig.7 Mean streamwise velocity profile, Re=360

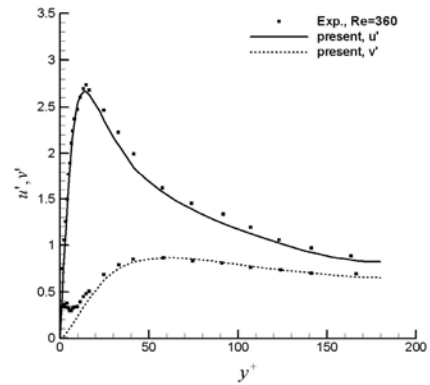


Fig.8 Rms velocity profile, Re=360

Fig. 4는 각 CASE에서의 속도 변동의 rms 값을 비교한 것이다. 예상대로 CASE 1과 2는 거의 동일한 결과를 가지며 CASE 3의 경우 큰 차이를 보이지는 않지만 상대적으로 작은 변동폭을 갖는다.

다음으로 앞에서 정한 모델 상수 0.5에 대한 유동해석의 의존성을 평가하기 위하여 상수 값을 0.25로 줄여 해석하였다. Fig. 5와 Fig. 6에 필터링 방법을 CASE 1과 동일하게 한 상태에서 두 가지 경우의 평균유동장 및 rms 값을 비교하였다. 두 가지 경우 모두 거의 동일한 결과를 나타내며 상수에 대한 민감도가 크지 않음을 확인하였다.

3.2 파이프 유동

전 절에서의 CASE 1를 비정렬 격자를 이용한 파이프 난

류 유동에 적용하였다. 파이프는 반지름을 기준으로 길이방향 길이는 6이다. 총 격자수는 대략 34만개의 육면체 격자로 이루어져 있으며 단면의 형상은 Fig. 6와 같다. 벽면으로부터 무차원 거리 0.6 이하인 벽 근처에서는 정렬격자 형태이며 파이프 중심부는 비정렬격자를 사용하였다.

Fig. 7과 8은 각각 파이프 유동의 평균 유동장과 rms 값을 문헌상의 실험값[7]과 비교한 것이다. 두가지 모두 문헌상의 결과와 잘 일치하는 결과를 얻었으며 본 방법의 타당성을 입증하여준다.

4. 결론

기 개발된 비정렬 격자를 이용한 유동해석 코드와 함께 사용할 수 있는 SGS 모델 및 필터를 제안하고 이를 채널 및 파이프 내 난류 유동 해석에 적용하였다. 개발된 SGS모델은 혼합거리모형으로서 속도스케일은 3차원적인 등방 필터에 의해 필터링된 속도장의 변동에 의존하며 길이 스케일은 비정렬격자에서도 일관되게 사용할 수 있도록 일반화되었다. 채널유동에 적용한 결과 벽근처에서의 특별한 처리가 없어도 이론적인 난류점성 분포를 재현함을 보였고 모델상수에 대해 민감도가 적었다. 이를 비정렬 격자를 이용한 파이프 난류유동에 적용하여 비정렬 격자에서도 적용가능함을 보였다..

참고문헌

[1] Mahesh, K., Constantinescu, G., and Poin, P., "A numerical method for large-eddy simulation in complex geometries," *Journal of Computational Physics*, vol. 197(2004),

[2] Sagaut, P. and Ciardi, M., "A finite-volume variational multiscale method coupled with a discrete interpolation filter for large eddy simulation of isotropic turbulence and fully developed channel flow," *Physics of Fluids*, vol. 18(2006)

[3] Nicoud, F and Ducros, F., "Subgrid scale stress modeling based on the square of the velocity gradient tensor," *Flow, Turbulence and Combustion*, vol. 62(1999) pp.183-200

[4] 이경세, 백제현, "2차 정확도를 가지는 비정상 비압축성 유동장 해석을 위한 비정렬 유한 체적법의 개발," *한국전산유체공학회 춘계 학술대회 논문집*, (2004), pp.71-76

[5] Tennekes, H. and Lumley, J., *A first course in turbulence*, MIT publishing Company, 1994

[6] Moser, R., Kim, J. and Mansour, N., "Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_{\tau} = 590$," *Physics of Fluids*, vol 11(1999), page 943-935

[7] den Toonder, J. M. J. and Nieuwstadt, F. T. M., "Reynolds number effects in a turbulent pipe flow for low to moderate Re ," *Physics of Fluids*, vol.9(1997), pp.3398-3409.