

유체-구조물 상호작용을 위한 유한요소 결합공식화의 예조건화에 대한 연구

최 형권*

Study on the preconditioning method of a finite element combined formulation for fluid-structure interaction

Hyoung G. Choi*

Key Words : preconditioning method(예조건화 기법), finite element(유한요소), combined formulation(결합공식화)

Abstract

Preconditioners for a two-dimensional combined finite element formulation have been devised and tested for fluid-structure interaction (FSI) problems. The FSI code simulating the interaction of an elastic body with an unsteady flow is based on P2P1 finite element combined formulation. It has been shown that two preconditioners among them perform well with respect to computational memory and convergence for a bench-mark problem. Based on the verification of the preconditioners for the two-dimensional combined formulation, four preconditioners are proposed for the problem of an elastic body interacting with a flow.

1. 서론

유체-구조물 상호작용의 수치해석은 유동장의 지배방정식과 고체의 운동방정식이 연성된 형태로 이산화 된 전체행렬의 해법이 중요한 부분을 차지한다. 본 연구에서는 유체-구조물 상호작용의 해석을 위하여 다양한 예조건화 기법을 제안하고 그 수렴 특성을 파악한다. 본 연구에서는 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 P2P1 유한요소 공식화에 대하여 남영석등[1]이 제안한 기법을 유체-구조물 상호작용 문제의 결합 공식화에 확장하여 적용한다. 고안된 다양한 예조건화 기법의 수렴 특성을 파악하기 위해서, 고안된 예조건화 기법을 프로그램으로 구현하고, 유동장의 형태가 복잡한 실린더와 유동장의 상호작용 문제에 적용하여 수렴 이력을 비롯한 수치적인 특성을 파악한다.

2. 본론

2.1 수치 해석 방법

Table 1은 P2P1 유한요소를 이용한 결합공식화로부터 얻어진 행렬의 반복해법을 위하여 본 연구에서 고안된 예조건화 행렬들의 형태를 나타낸다. Table 1에서 M_f 는 Navier-Stokes 운동량 방정식에서 대류항, 점성항 및 속도 성분의 시간 편미분 항과 관련된 행렬이며, G 는 압력 구배, C 는 유체-구조물 경계면에서의 운동학적 구속 조건과 관련된 행렬을 나타낸다. G^T 는 유체 속도장의 발산 인자(divergence operator)를 나타내며, T_{fs}^v 와 T_{fs}^p 는 유체가 구조물에 작용하는 점성응력 및 압력에 의한 traction

을 나타낸다. M_s 는 구조물의 운동방정식의 이산화로부터 얻어지는 행렬이다. 마지막으로, \tilde{L} 는 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 P2P1 유한요소 공식화의 효과적인 예조건화를 위하여 남영석 등[1]이 제안한 부가 행렬이다. \tilde{L}_2 는 유체-구조물의 상호 작용 문제의 결합 공식화를 P2P1 유한요소를 이용하여 이산화 한 경우에는 나타나지 않으나 예조건화 기법의 성능을 향상시키기 위하여 추가로 부가한 행렬이다. 비압축성 Navier-Stokes 방정식은 대류항을 포함하고, 결합공식화에 의하여 유동장 변수와 구조물의 변수가 연성되므로 전체 조립행렬식은 비대칭 행렬이 된다. 전체 조립 행렬식은 Bi-CGSTAB(Bi-conjugate gradient stabilized)[2]를 이용하여 푼다. 예조건화 기법 1(PC I)은 남영석 등[1]이 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 예조건화를 위하여 고안한 예조건화 행렬을 남궁각 등[3]이 결합공식화에 확장 적용한 것이다. 따라서, PC I에 대한 자세한 설명은 남영석 등과 남궁각 등의 논문을 참고한다. 예조건화 기법 2(PC II)는 예조건화 행렬 1에서 운동량 방정식의 속도변수와 연관된 행렬식의 대각항만을 취해서 예조건화 행렬을 만든다.

Table 1 유체-구조물 상호작용의 예조건화기법

예조건화 기법	PC I	PC II	PC III	PC IV
예조건화 행렬의 구조	$\begin{pmatrix} M_f & G & C \\ G^T & \tilde{L} & 0 \\ T_{fs}^v & T_{fs}^p & M_s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Diag}(M_f) & G & C \\ G^T & \tilde{L} & 0 \\ T_{fs}^v & T_{fs}^p & M_s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} M_f & G & C \\ G^T & \tilde{L}_2 & 0 \\ T_{fs}^v & T_{fs}^p & M_s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Diag}(M_f) & G & C \\ G^T & \tilde{L}_2 & 0 \\ T_{fs}^v & T_{fs}^p & M_s \end{pmatrix}$

* 서울산업대학교 기계공학과 hgchoi@snut.ac.kr

전체 조합행렬 (1)에서 M 블록이 차지하는 비율은 매우 크므로 (약 80%) M 블록의 대각항만을 취하여 예조건화를 수행하면, 예조건화 행렬이 차지하는 기억용량을 줄이고 예조건화 시간을 줄일 수 있다. 예조건화 기법 3(Pc III)은 \tilde{L} 블록을 생성함에 있어서 노드들의 connectivity를 정의할 때 AILU(2)[1]를 적용한 경우행렬 (1)에서 M 블록이 차지하는 비율은 매우 크므로(약 80%) M 블록의 대각항만을 취하여 예조건화를 수행하면, 예조건화 행렬이 차지하는 기억용량을 줄이고 예조건화 시간을 줄일 수 있다. 예조건화 기법 3(Pc III)은 \tilde{L} 블록을 생성함에 있어서 노드들의 connectivity를 정의할 때 AILU(2)[1]를 적용한 경우이다. 남영석등의 연구에 따르면 P2P1 유한요소를 사용하여 이산화 된 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 예조건화를 위하여 \tilde{L}_2 블록을 사용할 경우, \tilde{L} 블록을 사용하는 경우에 비교하여 예조건화 행렬의 기억용량의 변화는 거의 없으면서 계산속도가 약 2 배 정도 빠른 것으로 보고되었다. 따라서, 본 연구에서는 그들의 연구 결과를 결합공식화에 확장하여 적용하고 수렴특성을 파악하고자 한다. 마지막으로 예조건화 기법 4(Pc IV)는 Pc II에 AILU(2)를 적용한 경우이다. Pc II와 마찬가지로 M 블록의 대각 항이 우세할 경우에는 좋은 성능을 보일 것으로 여겨지며, M 블록의 대각항만을 취하므로 예조건화 행렬이 차지하는 기억용량을 크게 줄일 수 있다. 위의 네 가지 예조건화 기법의 수렴 특성을 파악하기 위하여 자유 낙하하는 단일 실린더와 유동장의 상호 작용 및 2 개의 실린더와 유동장의 상호 작용 문제를 해석하였다.

2.2 수치해석 결과

본 절에서는 Table 1에서 제안된 예조건화 행렬의 수렴이력을 비롯한 수치 특성을 파악한다. 실린더와 유동장의 상호작용을 결합 공식화로 이산화 할 경우 얻어지는 행렬식은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & M_{uv} & G_u & C_{uU_p} & 0 & C_{u\omega_p} \\ M_{vu} & M_{vv} & G_v & 0 & C_{vV_p} & C_{v\omega_p} \\ (G_u)^T & (G_v)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{U_p u} & T_{U_p v} & T_{U_p p} & m_p & 0 & 0 \\ T_{V_p u} & T_{V_p v} & T_{V_p p} & 0 & m_p & 0 \\ T_{\omega_p u} & T_{\omega_p v} & T_{\omega_p p} & 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ U_p \\ V_p \\ \omega_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \\ 0 \\ F_{U_p} \\ F_{V_p} \\ F_{\omega_p} \end{pmatrix}$$

위의 네 가지 예조건화 기법의 수렴 특성을 파악하기 위하여 자유 낙하하는 단일 실린더와 유동장의 상호 작용 및 2 개의 실린더와 유동장의 상호 작용 문제를 해석하였다. 첫 번째 해석으로 밀도 $1.0 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$, 동점성 계수 $0.01 \text{ cm}^2\cdot\text{s}^{-1}$ 인 무한 유체 속에서 밀도 $1.01 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ 인 실린더가 자유 낙하하는 경우를 해석한다. 그림. 1은 실린더 주위의 비정렬 격자계와 압력장 및 속도장을 나타낸다. 계산 초기에 사용된 비정렬 격자계의 노드수는 7162 개이며, 요소 수는 3514이다. 실린더의 종속(terminal velocity)과 직경을 기준으로 한 레이놀즈 수는 약 110으로 실린더 주위의 와류 박리는 비 대칭인 Karmann vortex를 나타냄을 볼 수 있다. Table 2는 각각의 예조건화 기법에서 사용하는 예조건화 행

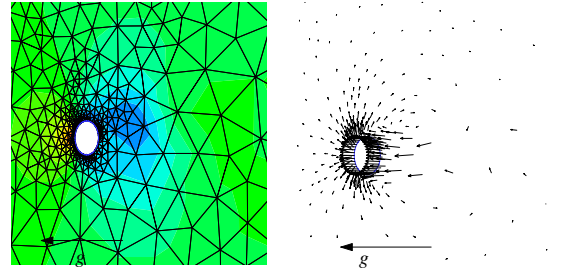


그림. 1 실린더 주위의 비정렬 격자계와 압력장 및 속도장

Table 2 예조건화 행렬의 크기

예조건화 기법	PC I	PC II	PCIII	PCIV
행렬의 크기	468794	162568	490880	184662

Table 3 시간 간격의 크기에 따른 예조건화 기법의 수렴특성(단일 실린더)

예조건 / 시간간격	PC I	PC II	PC III	PC IV
$\Delta t = 0.1$	33	265	22	153
$\Delta t = 0.01$	28	55	17	30
$\Delta t = 0.001$	30	52	16	29

렬의 크기를 나타낸다. 본 연구에서 개발한 코드는 CSR 형식을 따르므로 행렬의 크기는 행렬에서 0 이 아닌 항의 개수를 나타낸다. 따라서, 행렬의 크기는 Bi-CGSTAB 를 이용한 행렬의 해법에서 한 번의 반복 계산 당 예조건화에서 소요되는 연산의 양에 정비례한다. Table 3은 시간 간격의 크기에 따른 각각의 예조건화 기법의 성능을 반복 계산 횟수를 비교함으로써 나타낸 것이다. 시간 간격이 적절하거나 충분히 작을 때는 M 블록의 대각항만을 취하는 기법이 아주 효율적임을 알 수 있다. 단, 시간 간격이 비정상적으로 클 경우에는 M 블록의 대각항만을 취하는 기법을 피해야 한다. 또한, 시간 간격에 상관없이 \tilde{L}_2 블록을 사용한 경우 매우 적은 양의 추가 계산으로 예조건화 기법의 효율이 크게 향상됨을 알 수 있다. 그림. 2 는 시간 간격을 0.1 과 0.001로 했을 때 각각의 예조건화 기법들의 수렴이력을 나타낸다. 비정상 계산이므로 수렴 이력은 100 번째 시간 단계에서의 수렴 이력을 나타내었다. Pc III은 Pc I에 비해서 약 2배 빠르며 Pc IV는 Pc II에 비해서 약 2배 수렴속도가 빠름을 알 수 있다. 따라서, 예조건화 행렬에서 \tilde{L}_2 블록의 사용으로 인해서 한 번의 반복계산에 소요되는 연산의 증가는 매우 작으나 수렴 속도는 2배 증가함을 확인하였다. 따라서, 유체-구조물의 상호작용을 위한 결합 공식화에서도 \tilde{L}_2 블록을 사용한 예조건화 기법이 매우

효과적임을 알 수 있다. 특히, 시간 간격이 0.001일 경우에는 Pc IV와 Pc I의 수렴이력이 거의 유사함을 알 수 있다. 따라서, 시간 간격이 적을 경우에는 M 블록 행렬의 대각항이 우세해서 M 블록의 대각항만을 취하는 대신에 \tilde{L}_2 블록을 사용한 예조건화 기법 4가 표준인 예조건화 기법 1 과 거의 같은 수렴 속도를 보임을 확인하였다. 여기서 주목할 것은 Pc IV의 행렬 크기는 Pc I의 약 1/3밖에 되지 않는다는 것이다. 따라서, Pc IV는 Pc I과 비교할 때 전체 행렬의 해를 얻기 위해서 예조건화 단계에서 소요되는 연산을 1/3로 줄일 수 있는 큰 장점이 있다. 반면, \tilde{L} 블록을 사용하고 M 블록의 대각항만을 취한 Pc II의 수렴 속도는 표준 예조건화 기법 1에 비하여 2배 정도 늦어짐을 알 수 있다. 한편, 시간 간격이 0.1 로 매우 큰 경우의 수렴 이력은 시간 간격이 작은 경우의 결과와 다른 양상을 보인다. 시간 간격이 큰 경우 비대각항이 상대적으로 우세해서 M 블록의 대각항만을 취하는 예조건화 기법의 성능이 M 블록 전체를 취하는 예조건화 기법들의 성능에 비해서 크게 감소됨을 알 수 있다. M 블록의 대각항만을 취하는 예조건화 기법들의 수렴 속도는 M 블록 전체를 취하는 예조건화 기법들에 비해서 약 7 배 정도 느려짐을 확인하였다. 그림. 3는 시간 간격을 0.1 과 0.001로 했을 때 각각의 예조건화 기법들의 수렴이력을 나타낸다. 단일 실린더와 마찬가지로 수렴 이력은 100 번째 시간 단계에서의 수렴 이력을 나타낸다. 전체적인 경향은 단일 실린더의 해석 결과와 유사함을 알 수 있다.

3. 결론

1. 예조건화 행렬에서 \tilde{L}_2 블록의 사용으로 인해서 한 번의

반복계산에 소요되는 연산의 증가는 매우 작으나 수렴 속도는 2 배 증가함을 확인하였다.

2. 본 연구를 통하여 가장 이상적인 예조건화 기법은 \tilde{L}_2 블록을 사용하며, 적절하거나 작은 시간 간격의 경우에는 M 블록의 대각항만을 취하는 기법을 제안하고자 한다.

3. 시간 간격이 매우 큰 경우의 수렴 이력은 시간 간격이 작은 경우의 결과와 다른 양상을 보인다. 시간 간격이 큰 경우 비대각항이 상대적으로 우세해서 M 블록의 대각항만을 취하는 예조건화 기법의 성능이 M 블록 전체를 취하는 예조건화 기법들의 성능에 비해서 크게 감소됨을 확인하였다.

후기

이 논문은 2008년도 정부(과학기술부)의 재원으로 한국과학재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. R01-2006-000-11122-0)

참고문헌

- [1] 남영석, 최형권, 유정열, AILU Preconditioning for P2P1 finite element formulation of the incompressible Navier-Stokes equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, V. 191, pp. 4323-4339, 2002.
- [2] van der Vorst, H. A., Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Non-Symmetric Linear Systems, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, V. 12, pp. 631-634, 1992.여 주십시오.
- [3] 남궁각, 최형권, 유정열, 무한 유체에서 자유 낙하하는 원형 실린더의 2차원 운동에 관한 수치해석, *대한기계학회논문집 B권*, 제28권, 제6호, pp. 713-725, 2004.

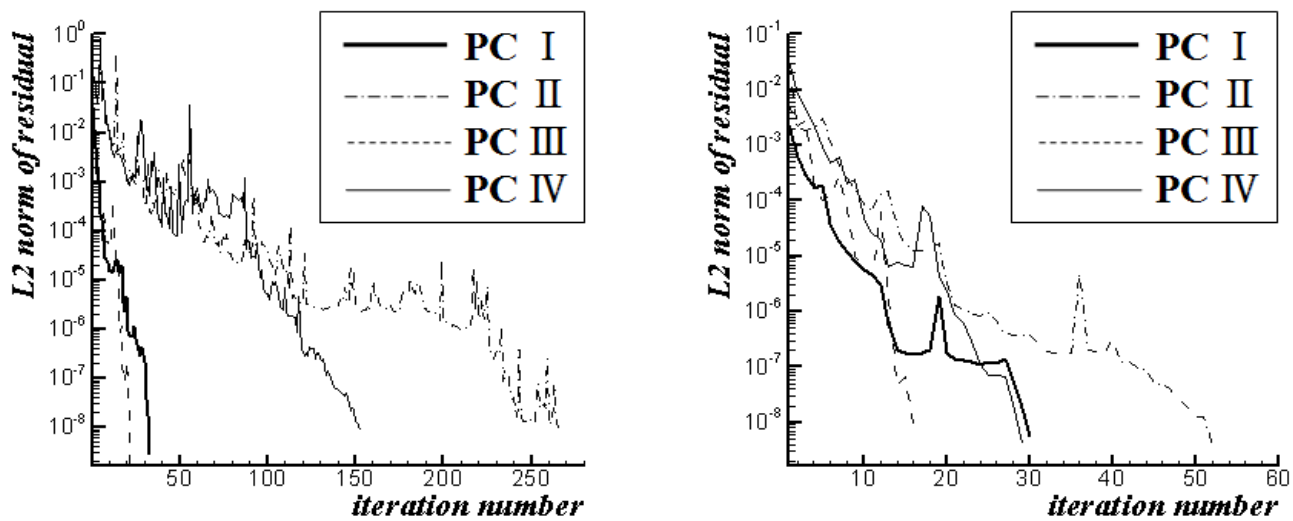


그림. 2 시간 간격에 따른 예조건화 기법들의 수렴이력 (단일 실린더)

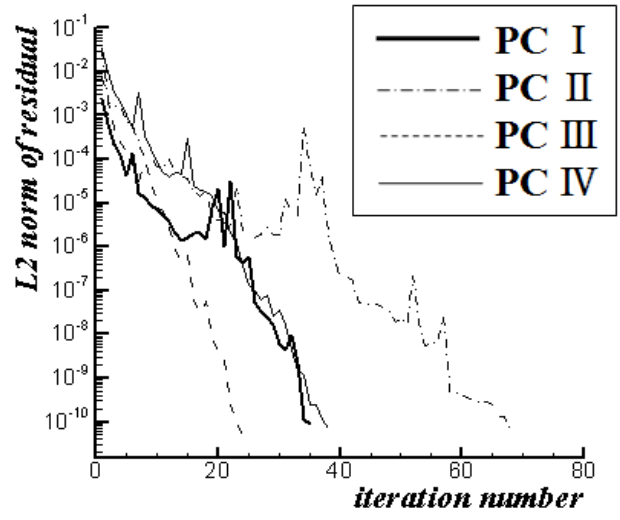
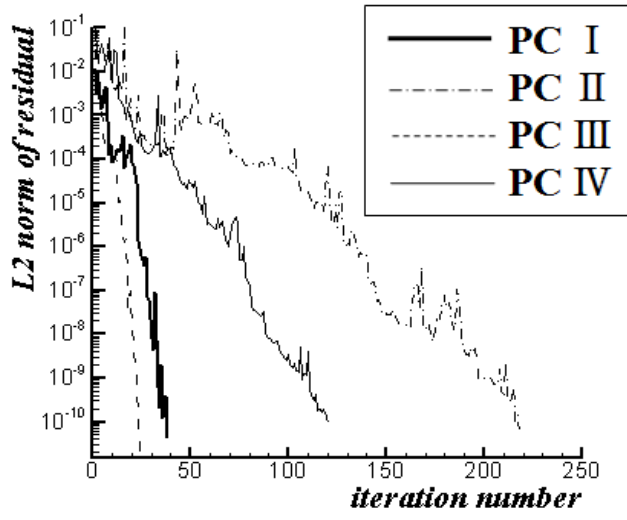


그림. 3 시간 간격에 따른 예조건화 기법들의 수렴이력 (2 개의 실린더)