

비압축성 2 상유동의 모사를 위한 level set 방법에서의 reinitialization 직접 접근법에 관한 연구

조명환[†] · 최형권* · 유정열**

Study on the direct approach to reinitialization in using level set method for simulating incompressible two-phase flows

Myung H. Cho, Hyoung G. Choi and Jung Y. Yoo

Key Words : Re-initialization Process(재초기화 과정), Level Set Method(Level Set 방법), Free-surface Flow(자유표면유동), Broken Dam Problem (댐 붕괴 문제)

Abstract

The computation of moving interface by the level set method typically requires reinitializations of level set function. An inaccurate estimation of level set function ϕ results in incorrect free-surface capturing and thus errors such as mass gain/loss. Therefore, accurate and robust reinitialization process is essential to the free-surface flows. In the present paper, we pursue further development of the reinitialization process, which evaluates directly level set function ϕ using a normal vector in the interface without solving the re-distancing equation of hyperbolic type. The Taylor-Galerkin approximation and P1P1splitting FEM are adopted to discretize advection equation of the level set function and the Navier-Stokes equation, respectively. Advection equation of free surface and re-initialization process are validated with benchmark problems, i.e., a broken dam flow and time-reversed single vortex flow. The simulation results are in good agreement with the existing results.

1. 서론

우리 주변의 일상생활에서 액상과 기상의 상호작용에 의한 2 상유동은 쉽게 접할 수 있으며 연료 분사, 선박 수력학, 점탄성 자유표면 유동 등과 같은 광범위한 분야에서 적용되고 있다. 상경계면을 포착하는 가장 대표적인 방법으로는 Level Set(LS) 방법^(1,2)과 Volume-of-Fluid(VOF) 방법⁽³⁾이 있다. VOF 방법은 비압축성 이상유동의 모사에 광범위하게 사용되어 왔으며, 상경계면은 각 셀에서의 정해진 유체의 체적분율(volume fraction)로 정의된 색상함수(color function)에 의해 주어진다. VOF 방법은 체적분율로부터 상경계면을 표현하게 되며 체적분율을 국부속도로 이송시킴으로써 상경계면을 전진시킨다. VOF 방법은 자연적으로 체적을 잘

보존시키는 장점이 있는 반면에 색상함수가 불연속적이기 때문에 상경계면의 곡률이나 법선 벡터를 정확하게 계산하기 어려운 단점이 있다. 또한 VOF 방법은 공간상에서 불연속적인 VOF 함수에 관한 이송방정식을 이산화해야 하므로 구해진 VOF 함수로부터 계면에서의 형상에 기초한 추가적인 계산 과정을 필요로 한다. 이에 비해 LS 방법은 2 상유동에서 존재하는 불연속적인 계면을 상경계면에서의 최단거리로 정의된 연속함수 ϕ (LS function)를 이용하여 내재적으로 찾기 때문에 상경계면을 쉽고 효율적으로 찾을 수 있을 뿐만 아니라, 3 차원으로의 확장 등에 있어서 추가적인 문제점이 나타나지 않는 장점을 가진다. 그러나 LS 방법은 쌍곡선 형태(hyperbolic type)의 미분방정식을 추가로 풀어야 하는 부담이 있으며⁽⁴⁾, LS 함수가 비보존적이기 때문에 질량의 손실이나 획득과 같은 비물리적인 현상을 초래할 수 있다. 특히, 격자가 성긴(coarse) 경우 질량보존 문제가 커지는 단점을 가지고 있다⁽⁵⁾. 그리고, LS 방법은 LS 함수를 이송한 후에는 LS 함수가 상경계면으로부터 최단거리를 유지하기 위하여 추가적인 재초기화(reinitialization) 과정을 필요로 하며 이는 대부분 비선형 쌍곡선형 미분방정식을 풀어서

[†] 서울대학교 대학원

E-mail : cho7213@snu.ac.kr

TEL : (02) 880-1654 FAX : (02) 883-0179

* 서울산업대학교 기계공학과 hgchoi@snut.ac.kr

** 서울대학교 기계항공공학부 jyyoo@snu.ac.kr

재초기화가 이루어지게 된다. 하지만 충전(filling) 문제나 형상이 복잡한 경우의 문제에서는 이 편미분 방정식에 물리적으로 타당한 경계조건을 부여하지 않으면 유동이 불안정해지며 비물리적인 현상을 초래할 수 있다. 본 연구에서는 4 단계 분리 유한요소법(fractional four-step FEM)⁽⁶⁾과 LS 방법을 결합하였으며, LS 함수를 재초기화 하기 위하여 편미분방정식을 푸는 대신에 각 셀에서의 법선벡터(normal vector), 그리고 계면과 셀 모서리의 교점을 이용하여 각 노드(node)에서의 ϕ 값을 직접 구하는 직접접근법(direct approach method)을 이용하여 재초기화 하였다.

수치해석 방법

1.1 지배 방정식

기체-액체의 2 상유동에 대한 지배방정식은 비정상, 비압축성 유체에 대한 Navier-Stokes 방정식이며 다음과 같다:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho(\phi)} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu(\phi)}{\rho(\phi)} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + g_i \quad (1)$$

여기서 u_i 는 속도벡터이며, g_i 는 i 방향으로의 중력가속도, ϕ 는 기상에서는 음수를 액상에서는 양수를 나타내는 LS 함수를 나타낸다. 식 (1)은 4 단계 분리 유한요소법을 이용하여 이산화하였다.

1.2 LS 함수의 이송방정식

LS 함수의 이송방정식은 아래와 같은 편미분방정식 형태로 표시된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

여기서 u_i 는 속도벡터로 식 (1)을 푼 결과로 주어지며 이산화는 Taylor-Galerkin 방법을 사용하였다.

LS 함수의 재초기화

식 (2)로부터 구한 ϕ 는 일반적으로 재초기화 기법 이 적용되지 않으면 공간상의 임의의 노드에서 ϕ 값은 초기의 함수 값과는 달리 상경계면까지의 최단거리를 나타내지 않게 되므로 아래와 같이 재초기화 되어야 한다. Fig. 1 에서 상경계면과 셀 모서리의 교점 x_s 는 다음과 같이 주변에서의 ϕ 값을 이용한 선형보간법을 통해 구할 수 있다.⁽⁷⁾

$$x_s = x_1 - \frac{\phi_1}{\phi_1 - \phi_2} (x_1 - x_2) \quad (3)$$

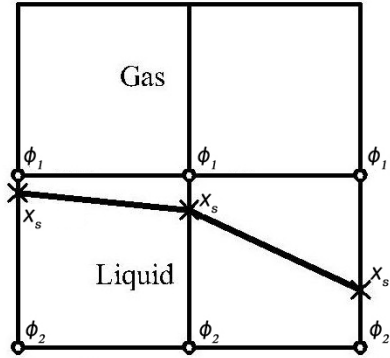


Fig. 1 Schematic representation of the intersection of interface and cell face.

Fig. 1 과 같이 x_s 와 상경계면에서의 법선벡터 n 을 이용하면 각 노드에서의 ϕ 값은 다음과 같은 절차에 의해 재초기화 된다⁽⁸⁾:

1) Set $|\phi| =$ 임의의 큰 값

2) 상경계면이 위치한 요소와 각 노드까지의 최단거리를 다음과 같이 구한다.

$$d(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{s1}) \quad (6)$$

여기서 \mathbf{n} 은 상경계면에서 액상을 향한 법선벡터를 나타낸다.

3) 각 노드에서 상경계면이 위치한 요소에 내린 수선의 발이 그 요소 내에 위치하지 않은 경우에는 다음과 같이 최단거리를 구한다.

$$|\phi| = \min(|\phi|, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_{s1}|, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_{s2}|) \quad (7)$$

4) 이전 시간단계에서의 ϕ 의 부호로부터 재초기화된 ϕ 의 부호를 결정한다.

수치해석 결과

1.3 2 차원 댐 붕괴 문제

개발된 직접접근법의 검증을 위해서 2 차원 댐 붕괴 문제를 해석하였다. 수력학적 평형 상태에 있는 사각 물기둥이 댐이 제거되면서 물 기둥은 중력의 영향으로 붕괴되기 시작하여 자유표면은 전진하는 물결 파를 형성한다. 물의 밀도와 점성계수는 각각 $1000 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ 과 $1 \times 10^{-3} \text{ [kg/m}\cdot\text{s]}$ 이며 공기의 밀도와 점성계수는 각각 $1 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ 과 $1 \times 10^{-5} \text{ [kg/m}\cdot\text{s]}$ 이다. 중력 가속도 $g = 9.8 \text{ [m/s}^2\text{]}$ 이다. 계산 영역은 Fig. 2 에서처럼 $5a \times 1.25a$ 이며 정사각 물기둥($a \times a$, $a = 0.05715 \text{ m}$)은 Martin & Moyce⁽⁹⁾의 실험조건과 같다. Fig. 3 은 시간의 경과에 따른 자유표면의 선단 위치 및 왼쪽 벽에서의 물기둥 높이를 나타내며 각 위치는 최초 물 기둥의 높이 a 로 무차원화

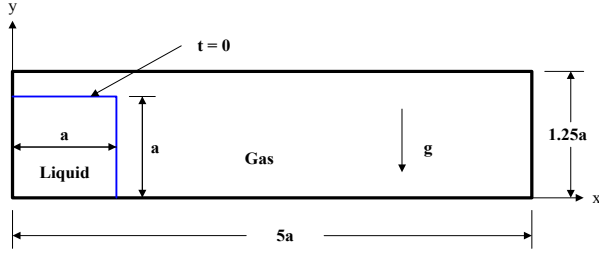


Fig. 2 Schematic of a 2D broken dam.

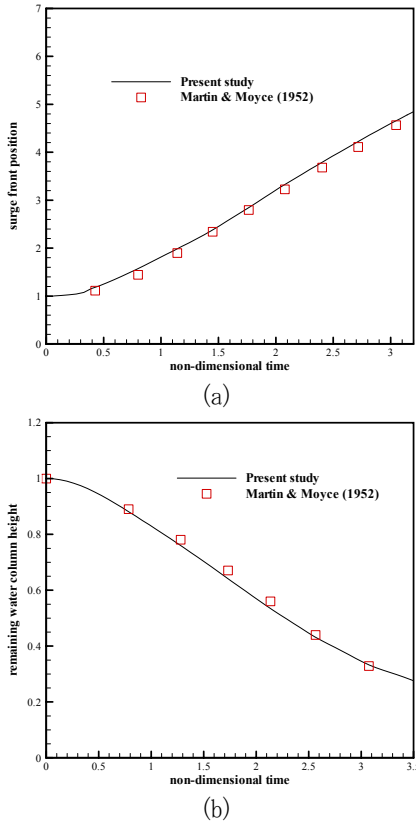


Fig. 3 (a) The position of the water surge front and (b) the height of the remaining water column as functions of non-dimensional time in 2D broken dam problems.

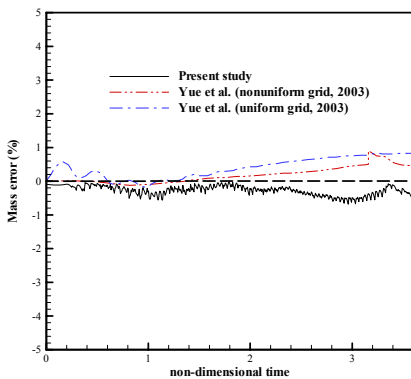


Fig. 4 Mass errors of broken dam cases versus non-dimensional time.

하였다. Fig. 3에서 볼 수 있듯이 기존의 실험결과인 Martin & Moyce의 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있으며 시간은 $t_g = \sqrt{a/g}$ 로 무차원화 하였다. Fig. 4는 질량보존 오차에 대한 시간진전을 나타내며, 기존의 Yue 등⁽¹⁰⁾의 결과와 비교 해 볼 때 질량보존에도 큰 문제가 없음을 확인할 수 있었다.

Time reversed single vortex flow

엄밀해(exact solution)가 주어진 유동장을 이용하여 일정시간(주기, T)이 지난 후에 와류가 원래의 형태를 어느 정도 유지하고 있는지, 즉 얼마나 질량보존이 되고 있는가를 측정하였으며 이때 주어진 속도장은 다음과 같다:

$$\begin{aligned} u &= 2 \sin^2(\pi x) \times \sin(\pi y) \times \cos(\pi y) \times \cos(\pi t / T) \\ v &= -2 \sin(\pi x) \times \cos(\pi x) \times \sin^2(\pi y) \times \cos(\pi t / T) \end{aligned} \quad (8)$$

Table 1은 time reversed single vortex 유동에서 각각의 재초기화 방법을 사용했을 때, 한 주기 후의 ϕ 값과 엄밀해와의 차이를 나타낸다. 오차는 상경계면 주위에서의 LS 함수 분포가 중요하기 때문에 ϕ 값의 절대치가 ε ($1.5 \times \Delta x$)보다 작은 점들만을 고려하여 계산하였으며, 오차는 다음과 같이 정의된다⁽⁴⁾.

$$Error = \sqrt{\frac{\sum_{|\phi| < \varepsilon} (\phi_{Num} - \phi_{Exact})^2}{M}} \quad (9)$$

여기서 M은 ϕ 의 절대치가 ε 보다 작은 절점의 개수를 나타낸다. ENO(Essentially-Non-Oscillatory), CSUPG(Consistent Streamline Upwind Petrov-Galerkin)와 직접접근법은 비슷한 정확도를, TG(Taylor-Galerkin)는 다른 방법들에 비해 좀 더 높은 정확도, 그리고 SUPG(Streamline Upwind Petrov-Galerkin)는 상대적으로 오차가 큰 것을 알 수 있다. Fig. 5는 128×128 격자계에서 time reversed single vortex 유동을 TG 및 직접접근법을 이용하여 재초기화 하였을 때 $t = T/2, T$ 에서의 상경계면의 모양을 나타낸다. 두 방법 모두 한 주기 이후에 비교적 원형 모습을 잘 유지하고 있는 것을 볼 수 있으며, TG 방법에 비해 직접접근법은

Table 1 Error of level set function in time reversed single vortex flow.

Method	Grid resolution	
	64 × 64	128 × 128
SUPG ⁽⁴⁾	1.50E-02	7.98 E-03
CSUPG ⁽⁴⁾	1.07 E-02	5.06 E-03
ENO ⁽⁴⁾	9.02 E-03	4.55 E-03
TG ⁽¹¹⁾	7.90 E-03	3.50 E-03
Present study	9.60 E-03	5.11 E-03

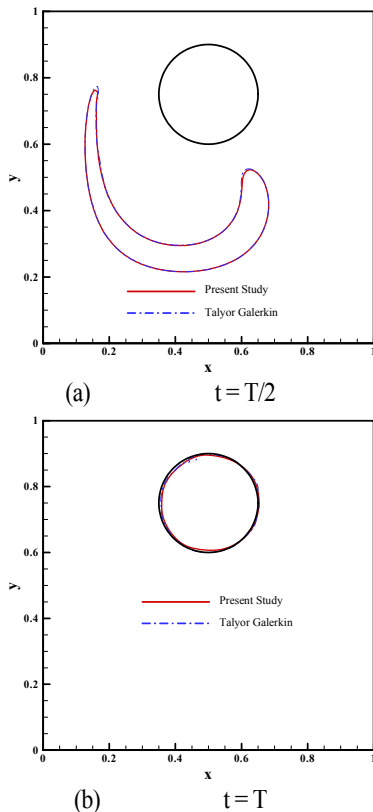


Fig. 5 Advection of LS function in time reversed single vortex flow (128 × 128 grid)

상경계면이 날카로운 부분(sharp interface)에서 좀 더 큰 질량손실을 보이는 반면에, 원형 형상을 더 잘 유지하고 있는 것을 확인할 수 있다. 이는 직접접근법이 편미분 방정식을 푸는 TG 방법에 비해 좀 더 안정적인 해를 가져다 주는 것으로 판단된다.

2. 결론

본 연구에서는 LS 방법의 재초기화 과정을 기존의 편미분 방정식을 푸는 대신에 각 셀에서의 법선벡터, 그리고 상경계면과 셀 모서리의 교점을 이용하는 직접접근법을 개발하였다. 재초기화 과정을 직접접근법으로 해석한 경우에 기존의 편미분 방정식으로 푸는 경우에 비해서 질량보존을 크게 훼손시키지 않으면서도 좀 더 안정적인 해를 얻을 수 있었으며 또한 물리적으로 타당한 경계조건을 부여해야 하는 부담에서도 좀 더 자유로울 수 있었다. 다만, 상경계면이 셀과 만나는 교점을 구하는 방식에서 좀 더 고차의 정확도를 가지는 보간법을 선택할 필요가 있을 것으로 판단된다.

후 기

이 연구는 NGV 기술개발사업의 지원으로 수행되었으며 이에 감사 드립니다.

참고문헌

- [1] Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S., 1994, "A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow," *J. Comput. Phys.*, Vol. 114, pp. 146~159.
- [2] Chang, Y. C., Hou, T. Y., Merriman, B. and Osher, S., 1996, "A level set formulation of Eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 124, pp. 449~464.
- [3] Hirt, C. W. and Nichols, B. D., 1981, "Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries," *J. Comput. Phys.*, Vol. 39, pp. 201~225.
- [4] Choi, H. G., Kang S. W., Yoo, J. Y. and Lee Y. P., 2005, "Level set redistancing 알고리즘의 유한요소 이산화 기법에 대한 연구," 대한기계학회논문집 B 권, 29, 6, pp. 703~710.
- [5] Sussman, M. and Puckett E. G., 2000, "A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3D and axisymmetric incompressible two-phase flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 162, pp. 301~337.
- [6] Choi H. G., Choi H., Yoo J. Y., 1997, "A fractional four-step finite element formulation of the unsteady incompressible Navier-Stokes equations using SUPG and linear equal-order element methods," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 143, pp. 333-348.
- [7] Shin, S. and Lee, W. I., 2000, "Finite element analysis of incompressible viscous flow with moving free surface by selective volume of fluid method," *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 21, pp. 197~206.
- [8] Son, G., 2003, "Efficient implementation of a coupled level-set and volume-of-fluid method for three-dimensional incompressible two-phase flows," *Numer. Heat Trans., Part B*, Vol. 43, pp. 549~565.
- [9] Martin, J. C. and Moyce W. J., 1952, "An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane," *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, Math. Phys. Sci.*, Vol. 244, pp. 312~324.
- [10] Yue, W., Lin, C. L. and Patel, V. C., 2003, "Numerical simulation of unsteady multidimensional free surface motions by level set method," *Int. J. Numer. Methods Fluid*, Vol. 42, pp. 853~884.
- [11] Choi, H. G., Kang, S. W. and Yoo, J. Y., 2006, "Level set based finite element method of bubble-in-liquid simulation," *Proceedings of the 4th Int. Conf. Comput. Fluid Dynamics*, pp. 37-38.