Proceedings of
The 5th National Congress on Fluids Engineering
March 26-28. 2008, Jeju, Korea

최소자승법과 Level-set 방법을 이용한 자유표면 유동의 수치해석

최 형권

Numerical analysis of free surface flows using least square/level-set method

Hyoung G. Choi*

Keywords : *free surface flow(자유표면), least-square(최소자승법),level-set(레벨셋), sloshing (슬로싱)*

Abstract

In the present study, a least square/level set based two-phase flow code has been developed using finite element discretization, which can be utilized for the analysis of a free surface flow problem in a complex geometry. Since the finite element method is employed for the spatial discretization of governing equations, an unstructured mesh can be naturally adopted for the level set simulation of a bubble-in-liquid flow without an additional load for the code development except that solution methods of the hyperbolic type redistancing and advection equations of the level set function should be devised in order to give a bounded solution on the unstructured mesh. For the discretization of hyperbolic type redistancing and advection equations, least square method is adopted. From the numerical experiments of the present study, it is shown that the proposed method is both robust and accurate.

1. 서 론

자유 표면을 가지는 유동장의 해석 방법은 여러 가지가 존재한다. Level-set 방법은 1990년 대 초에 제안된[1] 이후로 이전에 개발된 volume of fluid (VOF)[2]나 front-tracking method[3], body fitted coordinate[4] 방법과 함께 많은 자유표면 해석 연구에 사용 되고 있다. 자유표면 해석을 위한 각각의 방법들은 장점 과 단점을 동시에 가지고 있다. Level –set 과 VOF 방법은 배경격자를 사용하며, 자유표면의 분리/합체를 구현하기가 다른 기법들에 비하여 알고리즘상으로 용이하다. 한편, 자유표면의 정의에 있어서 VOF 방법은 매 시간 단계마다 각 셀에서의 VOF 값의 분포로부터 자유표면을 재정의 하는 IRP (interface reconstruction procedure) 과정을 거쳐야 한다. 이에 반해서, level-set 방법은 level-set 함수의 이송방정식과 redistance 방정식을 푸는 것으로 자유표면을 재정의 하는 과정을 대신한다. 위의 두 미분방정식을 푸는 것은 VOF의 IRP보다 덜 번거로운 작업이지만 쌍곡선형 형태인 두 방정식을 풀기 위해서는 특별한 주의가 필요하다. 또한, 위 두 방정식의 해석이 정확하지 않은 경우에는 질량의 보존이 보장되지 못하는 큰 결함이 있다. 따라서, level-set 방법이 도입된 초기에는 대부분의 연구자들은 쌍곡선형 형태인 두 방정식을 풀기 위해서 유한 차분법에 ENO 방법을 도입하여 성공적인 결과를 얻었다. 하지만, 이 방법은 정렬 격자계에서만 사용이 가능하기 때문에 임의의 형상을 가지는 복잡한 물체 주위의 자유표면의 해석에는 한계를 가지고 있다.

이의 약점을 극복하기 위해서, Pillapakkam과 Singh[5] 및 Lin등[6]은 유한요소법을 이용하여 level-set 공식화를 해석하였다. 이들의 연구는 유한요소법을 이용하여 유동장을 해석하므로 비정렬 격자계를 사용하는 것이 가능하였다. 한편, Lin등[6]은 characteristic Galerkin 방법을 사용하여 쌍곡선형 형태인 redistance 및 이송방정식의 안정화된 해를 얻었으며, Pillapakkam과 Singh은 쌍곡선형 형태의 방정식을 위해 상류도식법을 적용하였다. 본 연구에서는 선행 연구들의 장점을 살려 유한요소법을 이용하여 level-set 공식화를 수행하고자 하며, 쌍곡선형 형태의 방정식의 수치해석을 위하여 최소자승법을 도입하고자 한다. 제안된 방식는 기존의 방법들에 비하여 수치적으로 구현이 용이하며, 좀 더 단순화 된 형태의 식을 제공하는 이점이 있다. 제안된 수치 기법의 검증을 위하여 몇 가지 표준 예제들을 해석한 후 기존의 결과와 비교하고자 한다.

2. 수치 기법

2.1 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 level-set 유한요소 공식화

계산 초기에 속도장과 level-set 함수의 분포가 주어지면 다음의 지배 방정식을 P1P1 분리 유한요소법을 이용하여 푼다.

$$\rho(\phi)\frac{Du}{Dt} = \nabla p + \nabla\cdot(2\mu(\phi)D) - \sigma\kappa(\phi)\delta(\phi)\nabla\phi + \rho(\phi)\vec{g} \quad (1)$$
$$\nabla\cdot u = 0$$

여기서, ϕ 는 level-set 변수를 나타내며 유체의 물성치와 상경계면에서의 곡률은 level-set 변수의 함수로 표시가 된다.

---

* 서울 산업대학교 기계공학과, hgchoi@snut.ac.kr

2.2 이송 방정식의 유한요소 공식화

위의 식 (1)을 풀어서 다상 유동장의 속도를 구한 후에는 다음의 level-set 변수에 대한 이송 방정식을 풀어서 새로운 상경계면을 정의한다.

$$\phi_t + (u \cdot \nabla)\phi = 0 \qquad (2)$$

위의 식 (2)는 쌍곡선형 형태의 방정식이므로 최소 자승법을 적용하여 유한요소 공식화 한다. 최종적인 식은 다음과 같이 표시된다.

$$\int \left(N_i + \Delta t\, \bar{u} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \Delta t\, \bar{v} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \left(N_j + \Delta t\, \bar{u} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \Delta t\, \bar{v} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \phi_j^{n+1} =$$
$$\int \left(N_i + \Delta t\, \bar{u} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \Delta t\, \bar{v} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \sum \phi_j^n N_j d\Omega$$

이송 방정식을 푼 후에는 다음의 redistance 방정식을 푼다. 선행 연구결과[]에 따르면 redistance 방정식을 정확하게 푸는 것은 다상 유동의 해석에서 질량 보존에 매우 중요한 요소가 된다.

$$\phi_t + C_i \cdot \nabla \phi = S_o \qquad (3)$$

위의 쌍곡선형 형태의 방정식을 최소 자승법을 적용하여 유한요소 공식화하면 다음과 같이 표시된다.

$$\int (N_i N_j + N_i \Delta t\, C_\kappa \frac{\partial N_j}{\partial x_\kappa} + \Delta t\, C_\kappa \frac{\partial N_i}{\partial x_\kappa} N_j + \Delta t^2\, C_\kappa \frac{\partial N_i}{\partial x_\kappa} C_\ell \frac{\partial N_j}{\partial x_\ell}) \phi^{n+1} d\Omega =$$
$$\int (N_i + \Delta t\, C_i \cdot \nabla N_i)(\phi^n + \Delta t\, S_o) d\Omega$$

위의 식은 Lin등과 최형권 등[7]이 사용했던 characteristic Galerkin 방법 및 Taylor-Galerkin 방법과 비교할 때 계산 영역의 경계를 따르는 적분이 존재하지 않는다. 이는 특히 복잡한 형상 주위의 3차원 다상 유동을 해석할 때 매우 큰 장점이 된다고 할 수 있다. 다음 절에서는 최소 자승법과 level-set 방법을 사용하 여 개발된 유한요소 코드로 몇 가지 표준예제 해석결과를 보여주고자 한다.

2.3 Redistanec 방정식의 경계조건

위의 2.2 절에서 최소자승법을 이용하여 이산화한 redistance 방정식은 쌍곡선형 방정식으로 신호가 전파되는 원천에서의 경계조건이 부여되어야 한다. 그림. 1은 sloshing 문제의 해석에서 자유표면의 형상과 Dirichlet 경계조건이 부여되는 요소를 표기한 것이다. 그림. 1에서처럼 자유표면이 지나가는 요소의 절점들의 level set 값은 Dirichlet 경계조건이 부여되어 redistance 방정식의 해석과정에서 level set 함수값이 고정된다.

3. 결과

3.1 Broken dam 문제

개발된 코드의 검증을 위해서 broken dam 문제를 해석하였다. 물기둥의 선단 위치를 시간의 함수로 나타내고 실험결과와 비교하였다. 선단 위치는 실험결과와 잘 일치함을 알 수 있다. 본 문제의 해석 시

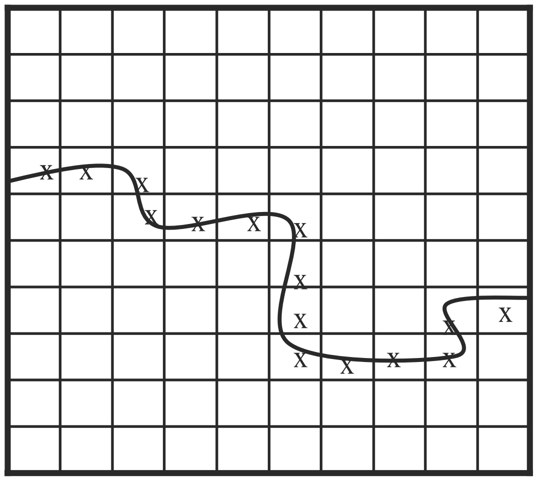

그림. 1 Redistance 방정식의 경계조건의 부여

에 redistance 방정식은 안정된 수렴이력을 보임을 확인하였다.

3.2 sloshing 문제

코드의 검증을 위하여 좀 더 복잡한 문제로 임의의 형상을 가지는 탱크 내의 자유표면 거동을 해석하였다. 탱크는 임의의 주기적인 운동을 하고, 탱크의 왕복 운동에 의해서 탱크 내의 액체는 주기적인 왕복 운동울 하게 되며 자유표면의 형상도 주기적으로 변하게 된다. 그림. 2는 사용된 격자계와 임의의 시각에서 탱크 내의 자유표면의

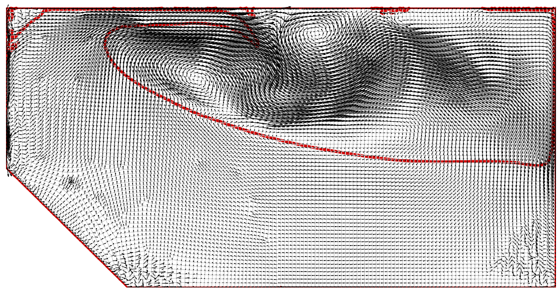

그림. 2 Sloshing 문제에서의 자유표면의 형상과 속도장

모양을 속도장과 함께 나타낸다. 본 문제의 해석을 통하여 최소자승법을 이용한 level-set 알고리즘의 해석이 경계조건의 처리 없이 견고한 해를 줌을 확인하였다.

4. 결 론

1. 최소자승법과 level-set 알고리즘을 이용한 자유표면의 해석을 위한 유한요소 코드를 개발하고 표준예제의 해석을 통하여 검증하였다.

2. 제안된 알고리즘은 경계조건의 처리 없이 redistance 방정식을 안정적으로 해석함을 확인하였다.
3. 개발된 알고리즘은 복잡한 형상을 가지는 3차원 물체 주위의 자유표면의 해석에 유용하게 사용되리라 여겨진다.

참고문헌

[1] Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S., 1994, "A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow," J. Comput. Phys., Vol. 114, pp. 146-159.
[2] Hirt, C. W. and Nichols, B. D., 1981, "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," J. Comput. Phys., **39**, pp. 201- 225.
[3] Unverdi, S. O. and Tryggavason, G., 1992, "A Front Tracking Method for Viscous, Incompressible, Multi-fluid Flows," J. Comput. Phys., **100**, pp. 25-37.
[4] Ryskin, G. and Leal, L. G., 1984, "Numerical solution of free-boundary problems in fluid mechanics. Part 1. The finite-difference technique," J. Fluid. Mech., Vol. 148, pp. 1~17.
[5] Pillapakkam, S. B. and Singh P., 2001, "A level-set method for computing solutions to viscoelastic two-phase flow," J. Comput. Phys., Vol. 174, pp. 552-578.
[6] Lin, C., Lee, H., Lee, T. and Weber, L. J., 2005, "A level set characteristic Galerkin finite element method for free surface flows," Int J. Numer. Meth. Fluids, Vol. 49. pp. 521~547.
[7] Choi, H. G., Kang, S. W. and Yoo, J. Y., 2006, "Level set based finite element method of bubble-in-liquid simulation", ICCFD4.

]