

예조건화 Navier-Stokes 코드를 이용한 교각 유동해석

유일용*, 이승수**, 박시형***

The analysis of flow over the bridge using preconditioned Navier-Stokes code

Ilyong Yoo*, Seungsoo Lee** and Sihyong Park***

Key Words : Fluid Engineering, Computational fluid dynamics, Bridge, Preconditioning method, Vortex flow

Abstract

After the collapse of the Tacoma bay bridge at Tacoma Washington, the accurate prediction of aerodynamics became crucial to the sound design of bridges. CFD(Computational Fluid Dynamics) becomes important tool for the prediction on wind effects on the bridge due to the recent development of CFD. The usage of CFD is further prompted by the advantages in using CFD, such as low-cost and fast feed-back of design. In this paper, an unsteady compressible Reynolds averaged Navier-Stokes code is used for the computation of the flow over bridges. Coakley's $q-\omega$ two-equation turbulence model is used for the turbulent eddy viscosity. For accurate and stable computations, the local preconditioning method is adapted to the code. Aerodynamic characteristics of a couple bridges are presented to show the validity and the accuracy of the method.

1. 서론

1940년 미서부 워싱턴주 타코마에 건설된 교량이 약 35mph(15m/s)의 내풍에 의해 크게 요동치며 붕괴된 사건이 발생하였다. 내풍안정성을 무시한 교량 설계가 원인이 되었으며 이후 교량 설계에 있어서 풍동실험과 같은 모의실험이 교량설계의 중요한 평가기준으로 자리 잡게 되었다. 최근의 CFD(computational fluid dynamics) 학문의 발달과 더불어 저비용, 설계과정에서의 많은 모의실험 등의 장점으로 인해 CFD를 이용한 내풍안정성 예측이 많이 이루어지고 있다. 본 연구에서는 국소 예조건화 기법(local preconditioning method)을 이용하여 저속의 교량 주변 유동장 해석을 수행하였다. 특히 상용해석 프로그램인 Fluent의 해석 결과와의 비교를 통해 개발한 프로그램의 정확도를 확인해 보았다.

2. 지배방정식 및 수치기법

2.1 지배방정식

난류 압축성 유동의 지배 방정식인 2차원 Reynolds averaged Navier-Stokes 방정식과 2-equation 난류모델 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} + S \quad (1)$$

W 는 보존형 유량변수 벡터(conservative variable vector)로 다음과 같이 정의된다.

$$W = [\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad e \quad \rho q \quad \rho \omega] \quad (2)$$

여기에서 ρ 는 밀도, u , v 는 x , y 방향 속도 벡터의 분력, e 는 전에너지, q 는 turbulent velocity scale, 그리고 ω 는 specific dissipation rate이다. E 와 F 는 각각 x 방향과 y 방향의 비점성 유량 벡터(invscid flux vector), E_v , F_v 는 각방향의 점성 유량 벡터(viscous flux vector)를 나타낸다. 난류모델 방정식의 처리 및 자세한 수식은 참고문헌[1]을 참조한다. 또한 S 는 난류 모델과 관련된 생성항이다.

2.2 국소 예조건화 기법

국소 예조건화 된 Navier-Stokes 방정식의 최종 형태는 예조건화 행렬 Γ 을 시간 미분항에 곱해준 형태를 갖는다. 본 논문에서 사용한 예조건화 행렬 Γ 은 Weiss와 Smith[2]의 예조건화 행렬을 사용하였다.

$$\Gamma \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} + S \quad (3)$$

* 인하대학교 항공우주공학과, ilyongyoo@inha.ac.kr

** 인하대학교 항공우주공학과, slee@inha.ac.kr

*** MIDASImformationTechnology, shpark@midasit.com

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Theta & 0 & 0 & -\frac{\rho}{T} & 0 & 0 \\ \Theta u & \rho & 0 & -\frac{\rho u}{T} & 0 & 0 \\ \Theta v & 0 & \rho & -\frac{\rho v}{T} & 0 & 0 \\ \Theta H - 1 & \rho u & \rho v & -\frac{\rho Q}{T} & 0 & 0 \\ \Theta q & 0 & 0 & -\frac{\rho q}{T} & \rho & 0 \\ \Theta \omega & 0 & 0 & -\frac{\rho \omega}{T} & 0 & \rho \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\Theta \equiv \frac{1}{U_r^2} + \frac{1}{C_p T}, \quad H = \frac{e + p}{\rho} \quad (5)$$

$$U_r = \min \left[c, \max \left(|u|, KU_{cut}, \frac{\mu}{\rho \Delta d}, \sqrt{\frac{|p'|}{\rho}} \right) \right] \quad (6)$$

$$K = 0.5, \quad U_{cut} = \min(U_\infty, c_\infty), \quad p' = p - p_\infty \quad (7)$$

식(5)에서 Θ 는 매개변수이고, U_r 은 초음속 유동영역에서 예조건화 되지 않은 기본 지배 방정식의 고유치로 돌아가게 하는 역할과 정체점에서 발생할 수 있는 불안정성을 제거하기 위한 제한자 역할을 하는 기준속도이다. K 는 global cut-off를 위해 고정된 임의의 상수이고 U_{cut} 는 국지적으로 아음속 영역을 포함하는 초음속 유동 해석 시 기준 속도를 최적화 하는 항이다. 또한 $\mu/\rho\Delta d$ 은 저 레이놀즈수의 점성 유동에서 국소 확산 속도이고 $\sqrt{|p'|/\rho}$ 는 정체점에서 압력섭동이 증폭되지 않도록 제한하여 수치적 안정성에 기여하는 항이다.

2.3 수치기법

2.3.1. 공간이산화

앞의 예조건화된 Navier-Stokes 방정식은 간단히 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Gamma \frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}_v + S \quad (8)$$

유한 체적법으로 공간 미분항을 이산화한 준 이산화 방정식은 다음과 같다.

$$\Gamma \frac{dQ}{dt} + R = 0 \quad (9)$$

여기에서 Residual은 다음과 같이 정의된다.

$$R = \frac{1}{V} \{ (\vec{F}_e \Delta S)_{i+1/2} - (\vec{F}_e \Delta S)_{i-1/2} + (\vec{F}_e \Delta S)_{j+1/2} - (\vec{F}_e \Delta S)_{j-1/2} \} + S \quad (10)$$

준 이산화한 방정식 (9)에서 격자 경계면에서의 수치 유속을 구하는 기법으로 Roe의 근사 리만해를 이용해서 비점성 유속 벡터를 계산한다.

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_{i+1/2} &= \frac{1}{2} (\widehat{F}_i + \widehat{F}_{i+1} - \Gamma \widetilde{A}_R |\Delta Q|) \\ &= \frac{1}{2} (\widehat{F}_i + \widehat{F}_{i+1} - \Gamma X_R |\widetilde{A}_R| X_R^{-1} \Delta Q) \end{aligned} \quad (11)$$

Roe의 수치 점성항에서 A_R 는 다음과 같고 기존의 Euler 방정식의 특성치가 바뀌는 것을 볼 수 있다.

$$A_R = \Gamma^{-1} A \frac{\partial W}{\partial Q} \quad (12)$$

여기에서 예조건화로 변환된 고유치는 다음과 같다.

$$\lambda(A_R) = (v_n, v_n, v_n' + c', v_n v_n' - c', v_n, v_n) \quad (13)$$

여기에서

$$v_n' = \frac{v_n}{2}(\beta + 1), \quad c' = \sqrt{\left\{ \frac{v_n}{2}(\beta - 1) \right\}^2 + U_r^2} \quad (14)$$

이 고유치는 예조건화 되지 않은 Navier-Stokes 방정식의 고유치보다 낮은 마하수에서 그 특성이 좋은 것을 알 수 있다.

2.3.2. 비정상유동 해석-이중시간적분법.

비정상 유동현상을 예측하기 위하여 이중시간 적분법을 사용하며 예조건화 된 2차원 Navier-Stokes 방정식에 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\phi}{2}\right) M \frac{\Delta \overline{Q}_p}{\Delta t} - \frac{\phi}{2} \frac{\Delta W^{n-1}}{\Delta t} + \Gamma \frac{\Delta Q^i}{\Delta \tau} + \theta R^{i+1} \\ + (1 - \theta) R^n = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

예조건화를 적용한 후, l 은 2중시간의 iteration level, n 은 time level이다. 또한, 추가로 정의된 correction은 다음과 같다.

$$\Delta \overline{W} = W^{l+1} - W^n \quad (16)$$

식 (15)를 선형화하면,

$$\left[D + \frac{\theta \Delta \tau}{V} (A + B) \right] \Delta Q = -\Delta \tau \tilde{R} \quad (17)$$

여기에서

$$D = \left(1 + \frac{\phi}{2}\right) M \frac{\Delta \tau}{\Delta t} + \Gamma - \theta \Delta \tau K \quad (18)$$

수정된 잔류량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{R} = \left(1 + \frac{\phi}{2}\right) \frac{W^l - W^n}{\Delta t} - \frac{\phi}{2} \frac{W^n - W^{n-1}}{\Delta t} + \theta R^l \\ + (1 - \theta) R^n \end{aligned} \quad (19)$$

이중시간 적분법이 수렴하면, $\tilde{R} = 0$ 이며

$$W^{l+1} = W^l = W^{n+1} \quad (20)$$

이므로 위 식(20)은 비정상 방정식으로 바뀌게 되어 정확한 시간해를 구할 수 있게 된다. 식(17)은 ADI기법을 사용해서 다음과 같이 근사 분해할 수 있다.

$$\left[D + \frac{\theta \Delta \tau}{V} A \right] D^{-1} \left[D + \frac{\theta \Delta \tau}{V} B \right] \Delta Q = -\Delta \tau \tilde{R} \quad (21)$$

$C_1 = 1 + \frac{\phi}{2} = 0$, $C_2 = \frac{\phi}{2} = 0$ 로 하고 $\tau = t$ 이면, 위 식은 steady경우의 식을 포함한다.

3. 수치 적용 및 해석

3.1 Code의 검증

3.1.1. Circular cylinder 주위의 유동

그림 1에는 circular cylinder 주위의 격자계를 보여주고 있다. 격자의 크기는 257×257 이고 그림에는 격자를 명확히 보이게 하기 위하여 매 2격자마다 표시하였다. Cylinder의 크기는 반경이 0.5이다. Cylinder 주위의 유동은 $Re > 40$ 인 경우에는 비정상유동이며 유동의 박리로 인하여 vortex shedding이라는 현상이 발생하는 것으로 알려졌다. 이 vortex의 shedding frequency는 Strouhal number라는 무차원 변수에 의하여 결정될 수 있음이 알려졌다. Strouhal number는 다음과 같다.

$$St = \frac{fD}{U_\infty} \quad (22)$$

여기에서 f 는 vortex의 shedding frequency이고 D 는 cylinder의 직경이다. 또한 U_∞ 는 균일 유동장의 크기이다. 전산해석으

로 균일 유동장으로부터 cylinder 주위에 vortex의 shedding과 이로 인한 비정상 유동의 해를 얻기 위해서는 매우 많은 계산시간을 필요로 한다. 그러므로 균일 유동장과 비대칭 유동을 중첩하여 이를 계산의 초기조건으로 사용하였다. 이중시간 step의 iteration수는 10으로 하였다. 계산의 조건은 $Re = 150$ 이고 $M = 0.2$ 이다. 계산은 laminar로 이루어졌다. 그림 2에는 시간에 따라 변화하는 공기력을 도시하였다. 그림 2의 $t - C_z$ 로부터 주기를 구하고 이를 이용하여 Strouhal number를 구하면

$$27.3761 = \frac{Ta_\infty}{D} = \frac{U_\infty}{fD} \frac{1}{M} \quad (23)$$

그러므로

$$St = 0.1826 \quad (24)$$

또한 c_x 와 c_y 의 변화는 다음의 표 1과 같다. 이 표에는 참고문헌[3]의 결과도 같이 하였다.

3.1.2. 기본형상의 교량 주위의 유동 해석

그림 3에는 교량 주위의 격자계를 확대하여 보여주고 있다. 원방경계의 위치는 교량길이의 10배가 되도록 하였다. 격자계는 5개의 block으로 구성된 격자로 그 크기는 각각 다음과 같다.

151 × 40, 389 × 70, 349 × 70, 101 × 20, 61 × 40
 계산은 먼저 정상해석을 통하여 유동이 형성된 초기조건을 찾았다. 난류모델은 Coakley의 $q - \omega$ 모델을 사용하였다. 이 모델은 수치적으로 매우 안정적이어서 해를 얻는데 유리하다. 이렇게 얻은 초기조건은 비정상 계산시 보다 빨리 안정적인 비정상 영역으로 도달하게 한다. 비정상 해석에 $\Delta t = 0.005$ 를 사용하였으며, 이중시간의 가상시간 항에 사용하는 반복횟수를 10으로 하였다. 계산에 사용된 마하수와 레이놀즈수는 각각 0.0294와 2×10^7 이며 경계조건의 적용에 벽면함수를 적용하여 격자수를 줄일 수 있었다. 비정상 계산을 무차원 시간인 $t = 200$ 만큼 수행하여 교량의 공력계수를 그림 4에 나타내었다. 결과의 비교를 위하여 Fluent를 사용하여 동일한 계산을 수행하였다. Fluent를 사용한 계산에서는 Fluent 경계조건의 부족으로 인하여 그림 3의 외곽경계 중 위/아래의 경계조건으로 대칭조건을 사용하였다. 그러나 이러한 경계조건은 물리적으로 타당하지 않다. 본 논문의 연구에 사용된 해석코드(qt2d)의 계산에는 모든 외곽경계를 원방경계조건(Farfield boundary condition)을 적용한 경우 (BC1)과 Fluent와 동일한 경계조건을 적용한 경우 (BC2) 모두를 계산하여 경계조건의 차이에 의한 공력값의 변화 역시 확인해보았다. 또한 표 2에는 4주기의 공력계수를 평균한 공력계수를 비교하였다. BC2를 사용한 경우에는 Fluent의 결과와 유사한 것을 보여주고 있으나 이 계산은 앞에서 언급하였듯이 물리적으로 타당하지 않다. 그림 5에는 교량 상판에서의 속도장을 도시하였다. 상판에 발생하는 대형 박리를 명확히 볼 수 있다.

3.2. 복잡한 형상의 교량 해석

앞서 해석한 교량과 같은 유동조건에서 이번에는 보다 복잡한 형상을 갖는 교량을 해석해 보았다. 교량의 형상과 격자계는 그림 6에 나타나 있으며 사용된 격자의 개수는 990,760개 이다. 교량 위의 여러 개의 교각들과 지지대를 표현하기 위해 총 57개의 Block이 사용되었다. 또한 벽면 근처에서의 격자의 응집도는 10^{-5} 가 되게 구성하였다. 비정상 계산에 사용된 시간간격은 0.01이며 가상의 시간 항에 적용되는 반복횟수는 이전과 마찬가지로 10회로 하였다. 그림 7에는 일정한 시간에서의 속도벡터를 통해 표현한 교량 주변의 와류의 형성 모습이다. 빨간 색 원 안에 나타난 것이 와류들이며 교량의 반쪽만을 나타냈다. 그림 8

의 공력계수를 통해서도 예측할 수 있듯이 교량 주변에 형성된 다수의 와류가 생성 및 쇠퇴를 반복함을 알 수 있으며 그 주기가 다양한 것으로 해석할 수 있다.

	St	$c_x(C_d)$	$c_y(-C_l)$
Present Method	0.1826	1.327 ± 0.024	± 0.515
Ref. 3	0.182	1.334 ± 0.03	± 0.530

Table 1. The aerodynamic characteristic around Circular Cylinder

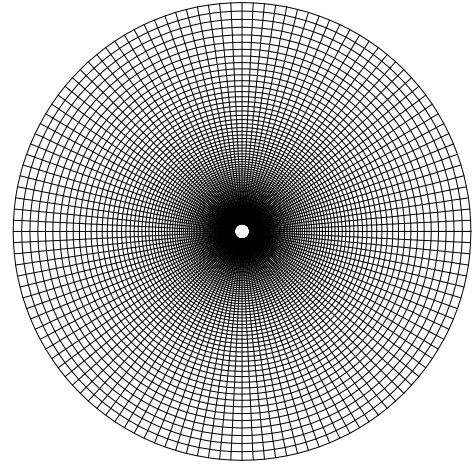


Fig 1. The grid system over the circular cylinder

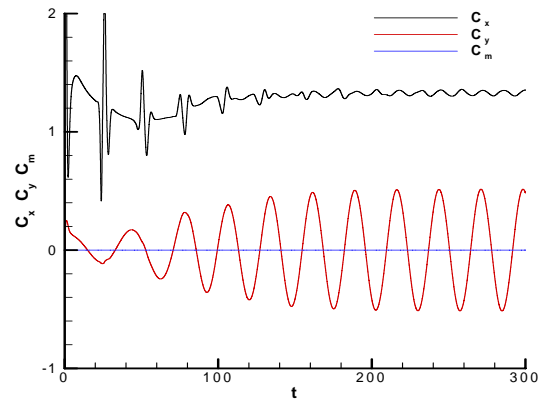


Fig 2. The time histories of aerodynamic coefficients

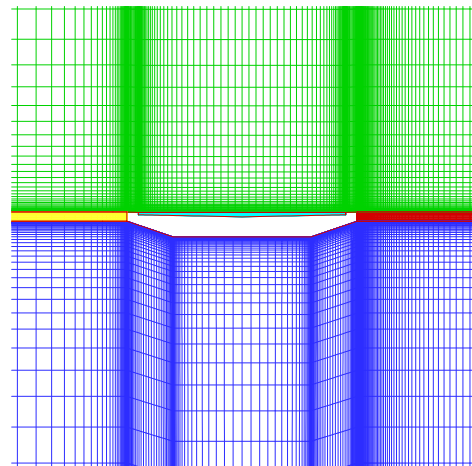


Fig 3. The grid system around the bridge

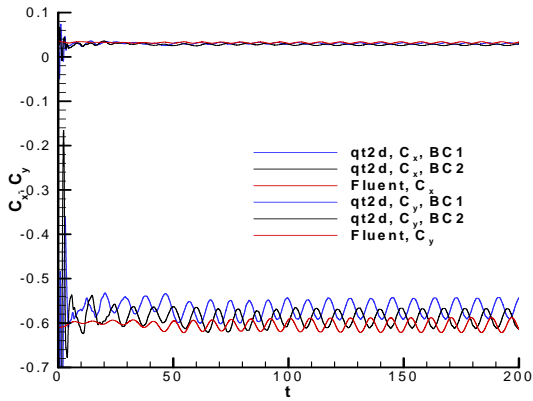


Fig 4. The comparisons for an aerodynamic coefficients

	$c_x(C_d)$	$c_y(C_l)$
qt2d with BC1	0.0298	-0.5665
qt2d with BC2	0.0274	-0.5893
Fluent	0.0323	-0.6046

Table 2. The average aerodynamic coefficient

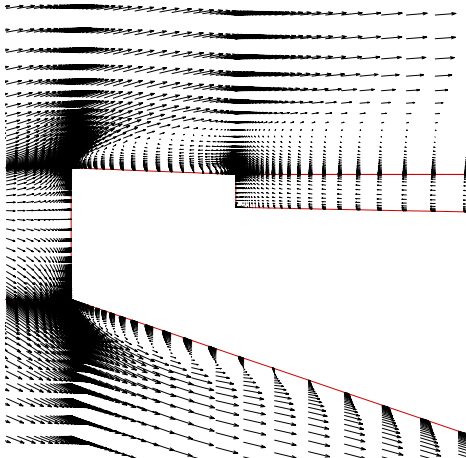


Fig 5. The velocity field over the bridge

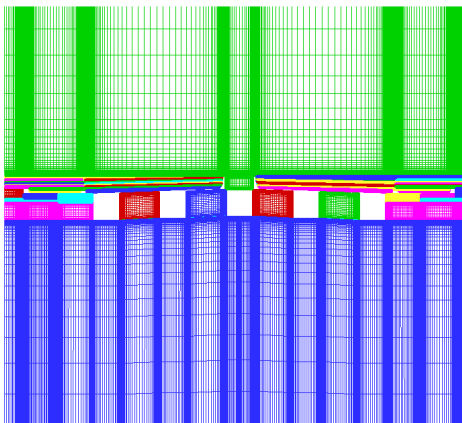


Fig 6. The grid system over the bridge

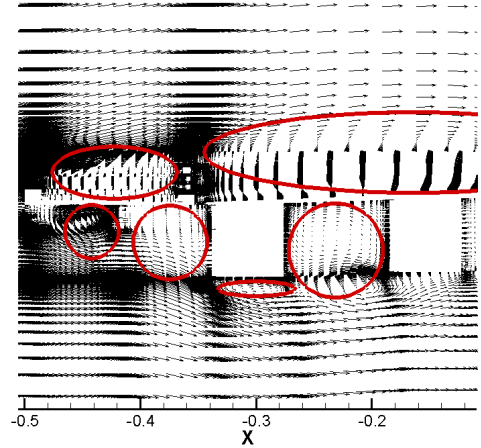


Fig 7. The vortices marked in red

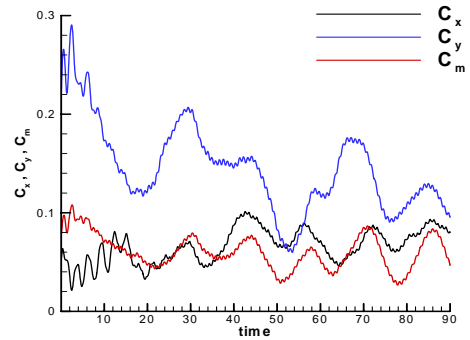


Fig 8. The aerodynamic coefficient in time

4. 결론

압축성 해석 코드를 이용하여 약 10m/s인 저속의 교량 주변 유동을 해석하기 위해서는 수렴성의 문제로 인하여 예조건화가 필요하다. 본 논문은 2차원 Reynolds averaged Navier-Stokes 방정식과 2-equation 난류 모델 방정식을 지배방정식으로 하는 해석 프로그램을 예조건화하여 저속의 유동장에서 공력 성능 해석이 가능하도록 하였다. 개발된 해석 코드를 이용하여 기본 형상을 갖는 교량 주변의 유동을 해석하였다. 그 결과, 상용 해석 프로그램인 Fluent의 해석결과와 유사한 해석치를 나타냄을 알 수 있었다. 그리고 보다 복잡한 형상을 갖는 교량 주변의 유동을 해석하여 교량 주변의 와류의 생성 및 소멸 등의 유동 특성을 확인할 수 있었다.

참고문헌

- [1] 류세현, 이승수, 김범수, '저속 압축성 유동에 대한 국소 예 조건화 기법 적용연구', 한국군사과학기술학회, 제9권 2호, 2006.
- [2] Weiss, J.M., Smith, W.A., "Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows", AIAA J., Vol. 33, No. 11, 1995.
- [3] Liu, C., Zheng, X. and Sung, C.h., "Preconditioned Multigrid Methods for Unsteady Incompressible Flow", JCP, Vol. 139, 1998.