

# 뉴트럴 시간 지연을 포함하는 이산 비선형 시스템의 퍼지 제어기 설계

## T-S Fuzzy Controller for Discrete Nonlinear Systems with neutral type time-delays

송민국<sup>1</sup>, 박진배<sup>1</sup>, 주영훈<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 연세대학교 전기전자공학과  
E-mail: jbpark@control.yonsei.ac.kr

<sup>2</sup> 군산대학교 전자정보공학부  
E-mail: yhjoo@kunsan.ac.kr

### 요 약

본 논문은 퍼지 제어기를 이용하여 이산 비선형 뉴트럴 시스템을 안정화 시킨다. 시간 지연을 가지는 이산 비선형 모델에 퍼지 제어기를 연결하여 폐회로를 구성하고, 이에 대한 안정도 분석 및 성능 평가에 대해 연구한다. 이산 비선형 시스템을 먼저 T-S 퍼지모델로 모델링 하고, 모델링된 시스템을 안정화 시키기 위한 제어기를 설계한다. 퍼지 모델과 퍼지 제어기 모두 같은 멤버십 함수를 가진다고 가정하며, 제어기 이득값 설계를 위한 선형 행렬 부등식 조건을 유도한다. 모의 실험을 통하여 제안된 제어기의 안정도를 입증한다.

**Key Words** : T-S fuzzy model, neutral nonlinear system, time-delay

### 1. 서 론

시간 지연 현상이 다양한 비선형 시스템에서 나타나고 있다. 흔히 시간지연은 시스템의 안정성을 저해하며, 성능을 떨어뜨리게 됨으로, 시간 지연을 포함한 비선형 시스템의 안정도 해석 및 성능에 관한 연구가 주요 연구가 되어 왔으며, 많은 관심을 받아왔다 [1-5]. 시간 지연을 갖는 비선형 시스템에 대해서는 연구가 부족하다. 그것은 비선형 시스템의 복잡한 시스템 특성에 기인한다.

비선형 시스템의 안정도 분석을 위하여 T-S 퍼지 모델이 도입되었다. T-S 퍼지 모델은 수학적으로 표현되기 어려운 시스템의 모델링에 효과적인 동시에 선형 제어 이론을 도입하기에 용이하다. 따라서 최근 몇 년간 T-S 퍼지 이론을 이용한 시간 지연 시스템의 안정도 분석 및 제어기 설계에 관한 연구가 활발히 진행되었다 [6-8].

시간지연을 가지는 비선형 네트워크 시스템의 제어기 설계를 위해 T-S 퍼지 모델로 표현하고 그에 대한 안정도 분석 방법이 Cao에 의해서 제안되었다 [6]. Lee등은  $H_\infty$  의미에서의 강인제어 기법을 동적 출력 제한 제어기를 통

해 제시하였다 [2]. Lo [8]는 퍼지 기법을 이용하여 비선형 시스템을 의미에서 정적 출력 제한 제어기를 통해 강인 제어하는 방법을 제시하였다. 그러나 지금까지의 진행되어온 연구에서는 오직 상태변수의 시간지연만을 고려하였다. 상태변수 뿐만 아니라 상태 변수의 일차 미분에도 시간 지연을 고려하는 시스템을 뉴트럴 시스템이라고 정의한다. 지금까지의 연구에서는 뉴트럴 타입의 시간 지연을 가지는 이산 비선형 시스템에 대한 연구가 진행되지 않았다.

따라서 본 논문에서는 위와같은 동기를 가지고 지금까지 진행되어온 시간 지연을 포함하는 시스템에 관한 다양한 결과를 바탕으로 뉴트럴 타입 시간 지연을 가지는 이산 비선형 시스템에 관해 연구한다..

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 먼저 2장에서는 이산 비선형 시스템을 T-S 퍼지 모델로 변환한다. 퍼지 제어기 설계를 위해 시간 변동 시간 지연에 관한 몇 가지 가정을 덧붙인다. 3장은 선형행렬 부등식을 이용하여 제어기의 이득값을 구한다. 4장에서는 임의의 이산 비선형 시스템에 대하여 본 논문이 제안한 제어기 설계 이론이 타당한지를 확인하며, 5장에

서 저자의 결론을 맺는다.

## 2. 비선형 이산 시스템의 T-S 퍼지 모델링

다음과 같은 시간 지연  $\tau(k)$ 와  $g(k)$ 을 가지는 비선형 이산 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} & x(k+1) - (D + \Delta D)x(k+1-g(k)) \\ &= (A + \Delta A)x(k) \\ & \quad + (A_d + \Delta A_d)x(k-\tau(k)) + Bu(k), \\ & x(k) = \phi(k), \quad k = -d_M - d_M + 1, \dots, 0 \\ & y(k) = Cx(k). \end{aligned} \tag{1}$$

여기서  $x(k) \in R^n$ 는 상태변수,  $u(k) \in R^m$ 는 제어 입력이며,  $\phi(t)$ 는 연속적인 벡터 초기 함수이다.  $h$ 는 시간 변동 시간 지연  $\tau(t)$ 와  $g(t)$ 의 상위 경계이며,  $A, A_d, B, C$ 와 그리고  $D$ 는 알려진 차원의 행렬이다.

T-S 퍼지 모델은 다음과 같은 퍼지 규칙을 사용하여 비선형 이산 시스템을 나타낸다.

Rule  $i$  :

$$\begin{aligned} & \text{IF } x_1 \text{ is } \Gamma_1^i, \dots, \text{ and } x_n \text{ is } \Gamma_n^i, \\ & \text{THEN } x(k+1) - (D + \Delta D)x(k+1-g(k)) \\ &= (A + \Delta A)x(k) + (A_d + \Delta A_d)x(k-\tau(k)) + Bu(k), \\ & (1 \leq i \leq c) \end{aligned} \tag{2}$$

여기서  $\Gamma_h^i (h=1, 2, \dots, q)$ 는  $h$ 는 전반부 변수의 퍼지 집합이며,  $c$ 는 퍼지 규칙의 개수를 표시한다.

중심값-평균 비퍼지화, 곱셈 추론, 싱글톤 퍼지화에 의하여 비퍼지화된 이산 T-S 퍼지 플랜트는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \dot{x}(t) - (D + \Delta D)\dot{x}(t-g(t)) \\ &= \sum_{i=1}^c \mu_i (A + \Delta A)x(t) \\ & \quad + (A_d + \Delta A_d)x(t-\tau(t)) + Bu(t), \\ & y(t) = Cx(t) \end{aligned} \tag{3}$$

여기서,

$$w_i(x(k)) = \prod_{h=1}^n \Gamma_h^i(x_h(k)), \mu_i(x(k)) = \frac{w_i(x(k))}{\sum_{i=1}^c w_i(x(k))}, \text{ 그리고}$$

$\Gamma_h^i(x_h(k))$ 는  $h$ 번째 전반부 변수  $x_h(t)$ 의 퍼지 집합  $\Gamma_j^i$ 에 대한 소속등급이다. T-S 이산 퍼지 시스템의 안정도 조건을 구하기 위해 다음의 가정 1, 2을 가정하고 3장에서 이용하도록 한

다.

가정 1. 행렬  $D$ 는 다음을 만족한다.

$$D \neq 0, \|D\| < 1.$$

가정 2. 불확실성을 표현하는 행렬은 다음과 같이 표현가능하다.

$$[\Delta A \ \Delta B \ \Delta A_d] = GF(t)[E_a \ E_b \ E_{a_d}]$$

본 논문에서 사용된 퍼지 제어기는  $c$ 개의 부제어기로 구성이 된다. 퍼지 제어기의  $i$ 번째 규칙은 다음과 같이 나타낸다.

Rule  $i$  :

$$\begin{aligned} & \text{IF } x_1 \text{ is } \Gamma_1^i, \dots, \text{ and } x_n \text{ is } \Gamma_n^i, \\ & \text{THEN } u = -K_i x \quad (1 \leq i \leq c) \end{aligned} \tag{4}$$

여기서  $K_i$ 는 제어기의 이득값이다. 중심값-평균 비퍼지화, 곱셈 추론, 싱글톤 퍼지화에 의하여 비퍼지화된 제어기의 최종 출력은 다음과 같다.

$$u(k) = \sum_{i=1}^c \mu_i K_i x(k) \tag{5}$$

식 (3)과 (5)에서부터 우리는 이산 비선형 시스템을 다음과 같은 폐루프를 포함하는 이산 T-S 퍼지 시스템으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & x(k+1) - (D + \Delta D)x(k+1-g(k)) = \\ & \sum_{i=1}^c \mu_i (x(k))(A + \Delta A + BK)x(k) + \\ & (A_d + \Delta A_d)x(k-\tau(k)) \end{aligned} \tag{6}$$

식 (6)을 [6]에서 연구된 모델 변환을 이용하여 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned} & s(k+1) - (D + \Delta D)x(k+1-g(k)) = \\ & \sum_{i=1}^c \mu_i (x(k))((A + \Delta A + BK + A_d + \Delta A_d)x(k) \\ & - \sum_{k-\tau(k)}^k x(k)) \end{aligned} \tag{7}$$

이산 퍼지 제어기를 이용하여 T-S 퍼지 시스템 (7)을 안정하게 하는 제어기 이득값  $K_i$ 를 설계하는 것이 본 논문의 목적이다.

### 3. 뉴트럴 타입 T-S 퍼지 시스템의 제어기 설계

#### 3.1 이산 T-S 퍼지 시스템의 안정도 분석

이산 뉴트럴 T-S 퍼지 시스템 (7)의 안정도 조건에 대해서 논의한다. 리아프노프-크라조브스키의 안정도 이론을 이용하여 본 논문에서는 뉴트럴 타입 T-S 퍼지 시스템 (7)의  $g(k)$ 에는 독립적이며,  $\tau(k)$ 에는 종속적인 안정도 조건을 다음의 정리 1과 같이 유도한다.

**정리 1.** 다음의 양한정 행렬  $R, Q, S, Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3$  그리고  $P_1$ 과 임의의 행렬  $P_2, P_3$ 이 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하면 뉴트럴 이산 T-S 퍼지 시스템 (7)은 안정하다.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Psi P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} - Y^T P^T \begin{bmatrix} 0 \\ D \end{bmatrix} \\ * - (1 - \tau(k))S & 0 \\ * & 0 & -(1 - g(k))Q \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

여기서,

$$\Psi = P^T \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_0 - I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A_0 \\ I - I \end{bmatrix} P + hZ + \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & hR + Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Y = [Y_1 \ Y_2], Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ * & Z_3 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

**증명)** 공간상 증명 생략. ■

#### 3.2 퍼지 제어기 이득값 설계

뉴트럴 타입 T-S 퍼지 시스템 (7)을 안정화 시키는 퍼지 제어기 이득값  $K_i$ 를 설계하기 위한 충분 조건을 선형 행렬 부등식의 형태로 나타낸다. 3.1 장에서 구하여진 선형 행렬 부등식에서 출발하여 우리가 구하고자 하는 제어기 이득값을 구하기 위한 조건을 구하여 보면 다음의 정리 2와 같다.

**정리 2.** 다음의 양한정 행렬  $R, Q, S, Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3$  그리고  $P_1$ 과 어떤 적합한 행렬  $P_2, P_3$ 이 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하면 뉴트럴 이산 T-S 퍼지 시스템 (7)은 안정하며,

$$\begin{bmatrix} X_2 + X_2^T & * & * & * & * & * \\ \Psi_1 & -X_3 - X_3^T & * & * & * & * \\ * & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} - Y^T - (1 - \tau(t))S^{-1} & * & * & * & * \\ * & P^T \begin{bmatrix} 0 \\ D \end{bmatrix} & 0 & -(1 - g(t))Q^{-1} & * & * \\ X_2 & X_3 & 0 & 0 & -(1 - g(t))Q^{-1} & * \\ \tau(t)X_2 & \tau(t)X_3 & 0 & 0 & 0 & -(1 - \tau(t))S^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

이때 제어기 이득값은  $K = WX_1^{-1}$ 이며,  $\Psi_1 = X_3 - X_2^T + X_1(A_0 + A_D) + C^T W^T$ 이다.

**증명)** 공간 제약으로 생략한다. ■

### 4. 수치적 예제

본 장에서는 제안된 뉴트럴 이산 T-S 퍼지 시스템의 안정도 분석 및 제어기 설계를 확인한다. 모의 실험에 사용하는 비선형 시스템은 [8]에서 쓰인 예를 이용한다. 본 논문에서 사용한 형태의 T-S 이산 퍼지 시스템으로 구하여 보면 다음과 같다.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.9 & 3 \\ -0.6 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{d1} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.2 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 1.5 \\ -0.4 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{d2} = \begin{bmatrix} -0.2 & 1.8 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A_i = 0.15 \times A_i, \quad \Delta A_{di} = 0.15 \times A_{di}, \quad \Delta D_i = 0.3 \times D_i$$

$$D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.3 \\ 0.2 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad \tau(k) = 3\sin k, \quad g(k) = 3$$

이제 제어기 이득 값  $K_i$ 를 구하기 위하여 정리 2를 이용한다. 정리 2의 선형 행렬 부등식을 MATLAB을 이용하여 풀어보면 다음과 같은 해가 존재함을 확인할 수 있다.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 135.54 & -54.15 \\ -83.15 & 127.5 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 43.4 & 45.45 \\ -241.4 & 48.8 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 15.13 & 74.1 \\ -74.5 & 34.1 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1445.1 & -1778.1 \\ 29.4 & 142.1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 78.5 & -154 \\ 21 & 4.54 \end{bmatrix}.$$

위에서 구한 선형 행렬 부등식의 해를 이용하여 뉴트럴 이산 T-S 퍼지 시스템을 안정화 시키는 제어기 이득  $K_i$ 를 구해보면 다음과 같다.

$$K_1 = \begin{bmatrix} -15.15 \\ 34.154 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -45.152 \\ 348.45 \end{bmatrix}$$

상태 변수  $x_1(k)$ 와  $x_2(k)$ 의 제어 입력이 활성화 되었을때의 시스템 응답은 그림 1과 같다. 그림 1로부터 상태 변수는 시간이 지날수록 0에 수렴함을 확인할 수 있다. 이는 제안된 제어기의 이득값이 주어진 시스템을 안정화시킨다는 사실을 입증한다.

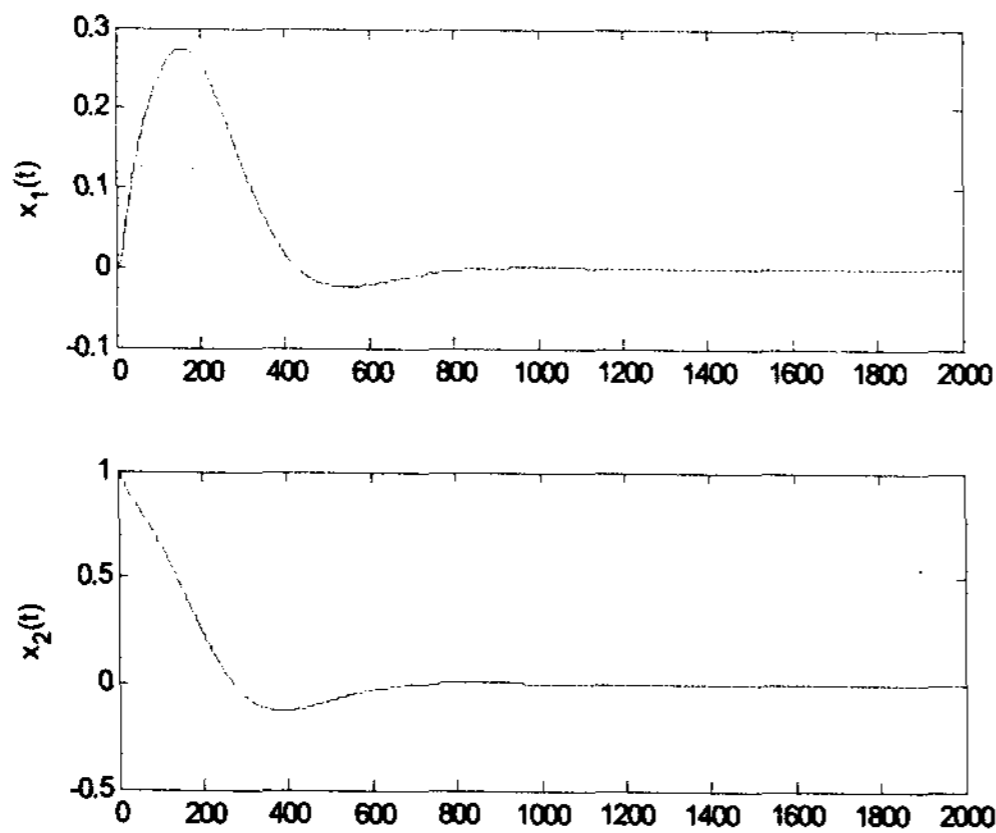


그림 1. 제어 시스템의 시간 응답  
Figure 1. Time response of the controlled system

### 5. 결 론

본 논문은 이산 비선형 뉴트럴 시스템의 안정도 분석 및 제어기 설계를 T-S 퍼지 제어 이론을 이용하여 제안하였다. 이산 뉴트럴 비선형 시스템의 안정도를 판별하기 위하여 T-S 퍼지 모델로 모델링하였다. 리아프노프-크라조브스키의 안정도 이론을 이용하여 안정도를 분석하고 주어진 퍼지 제어기 설계의 충분 조건을 유도하였다. 제어기의 이득값 설계 조건을 선형 행렬 부등식의 꼴로 나타내고, 선형행렬 부등식의 해를 이용하여 퍼지 제어기의 이득값을 설계하였다. 본 논문에서 제안한 방법이 효율적임을 모의 실험을 통하여 증명하였다.

감사의 글 : 본 연구는 학술진흥재단(D00159) 프로젝트에서 지원하여 연구하였음.

### [참 고 문 헌]

[1] G. Fena and J. Ma, "Quadratic stabilization of uncertain discrete-time fuzzy dynamic systems," IEEE Trans. Circuits syst., Vol 48, No. 11, pp. 1337-1344, 2001.  
[2] Y.Gu, H. O. Wang, and K. tanaka, "Fuzzy control of nonlinear time-delay systems: Stability and design issues," Amer. Contol Conf., VA, 2001, pp. 25-27.

[3] Bing Chen and Xiaoping Liu, "Fuzzy Guaranteed cost control for nonlinear systems with time-varying delay," IEEE Trans. Fuzzy syst., vol 13, No 2, pp. 238-249, 2005.  
[4] He. Y., Wu M., She J. H., and Liu. G. P., "Delay-dependent robust stability criteria for uncertain neutral systems with mixed delays," Syst. Control Lett., vol. 51, pp. 57-65, 2004.  
[5] P. Zitek, "Anisochronic state observers for hereditary systems," Int. J. Control, Vol. 42, pp. 581-599, 1998.  
[6] Y. Y. Cao and P. M. Frank,, "Analysis and synythesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach," IEEE Trans. Fuzzy Syst., Vol 8,, No 2, pp. 200-211, 2000.  
[7] K. R. Lee, J. H. Kim, E. T. Jeung, and H. B. Park,, "Output ffeedback robust  $H_{\infty}$  control of uncertain fuzzy dynamic systems with time-varying delay", IEEE Trans. Fuzzy Syst., Vol 8, No.6, pp. 657-664, 2000.  
[8] H. Gao, J. Lam, C. Wang and Y. Wang, "Delay-dependent output-feedback stabilization of discrete-time systems with time varying state delay," IEE Proc. control-theory, Vol. 151, No. 6, pp. 697-695, 2004.