

퍼지 PWM 시스템에 대한 안정도 분석

Stability Analysis for Fuzzy PWM System

성화창¹, 주영훈², 박진배¹

¹서울시 서대문구 연세대학교 전기전자공학과
E-mail: {casfirspear, jbpark}@yonsei.ac.kr

²전라북도 군산시 군산대학교 전자정보공학부
E-mail: yhjoo@kunsan.ac.kr

요 약

본 논문은 퍼지 펄스 폭 변조 (Pulse-width-modulation: PWM) 시스템의 안정도에 대해 다루게 된다. 복잡성을 가진 비선형 시스템은 Takagi-Sugeno (T-S) 퍼지 모델에 의해 효율적으로 논의될 수 있다. 본 논문에서는 기존의 LTI 시스템에서 논의되었던 PWM 제어기 설계 문제를 퍼지 시스템으로 확장시킴으로써 PWM 제어기에 대한 논의의 저변을 확대시키고자 한다. 또한, 리아푸노프 (Lyapunov) 안정도에 기반 한 안정도 증명을 통해 퍼지 PWM 시스템의 안정도를 분석하고자 한다.

Key Words : PWM 제어기, T-S 퍼지 시스템, 리아푸노프 안정도.

1. 서 론

펄스 폭 변조 (Pulse-width-modulation: PWM) 기법은 방법론 자체의 우수성으로 인하여 적응제어 시스템, 신호 처리, 전력 제어, 인공위성 자세 제어 등의 수많은 시스템에 적용되고 있다. PWM 제어 기법의 장점은 무엇보다도 간단하면서도 효율적인 제어기 구현이 가능하다는 것이다. +1 과 -1의 두 개의 값 혹은 0을 포함한 세 개의 값으로 표현되며, 이들의 스위칭 작동에 의하여 제어기가 구현 될 만큼 심플하다.

그러나 PWM 제어 법칙의 도입에 의한 시스템의 비선형화라는 문제점, 그리고 연속 시간 (continuous-time) 신호와 이산 시간 신호 (discrete-time) 신호의 혼재에 의한 제어 시스템의 혼합화는 PWM 제어 시스템의 해석을 어렵게 한다 [8]. 그로인해, PWM 제어 이론의 경우 방법론 자체의 우수성에 비하여 이에 대한 이론적 기반이 부족한 편이었다. 최근 Hou에 의한 선형 및 비선형 시스템에 대한 PWM 안정도 분석 이후로 PWM 논의에 대한 새 지평이 열렸으며, 그 이후 다양한 접근을 통해 PWM 시스템 분석이 이루어지고 있다 [1], [7].

한편, T-S (Takagi-Sugeno) 퍼지 모델 기반 제어 기법은 복잡한 비선형 시스템을 퍼지

규칙 기반 식으로 표현함으로써 시스템의 제어 및 분석에 효율적인 방법이다 [2-5]. Zadeh에 의해 최초로 도입된 퍼지 논리 개념을 바탕으로 하여 퍼지 규칙의 구조와 파라미터 동정과 연관된 자기 학습 알고리즘을 포함하는 일반적인 퍼지 시스템 동정 기법을 통해 비선형 시스템을 부분적인 선형 합들로 표현함으로써 제어 기법 사용에 효율성을 기하였다. 이와 같은 우수성으로 인하여 많은 연구가 이루어졌다.

본 논문에서는 PWM 시스템 분석의 연장선으로 퍼지 PWM 시스템에 대한 안정도 분석을 제안하고자 한다. 우선, 복잡한 비선형 시스템에 대한 T-S 퍼지 모델 기반 제어 시스템을 구축하게 된다. 그리고 입력 신호로써 PWM 제어 입력을 사용하게 되며, 그로 인해 연속 시간과 이산 시간이 혼재된 시스템이 나타나게 된다. 주어진 시스템은 리아푸노프 안정도 분석에 의해 안정도 가능성을 살펴본다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 PWM 시스템 및 T-S 퍼지 시스템을 수학적 으로 표현한다. 3절에서는 2절에서 구성된 시스템의 안정도 가능성을 연구하게 되며 4절에서는 결론을 제시하며 논문을 마무리 하게 된다.

2. PWM 시스템 및 퍼지 시스템

2.1 PWM 시스템

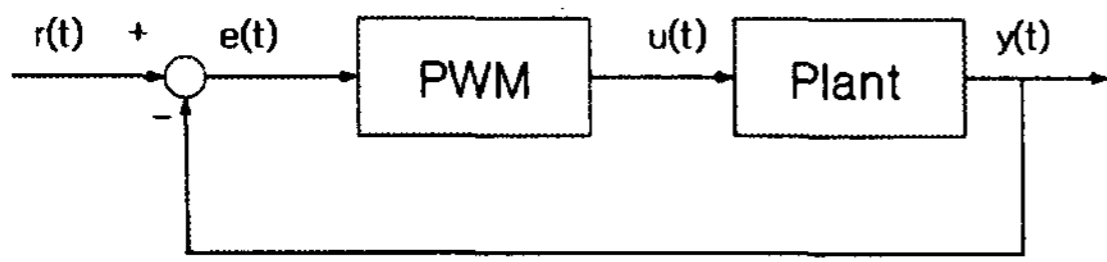


그림 1 PWM 폐환 시스템

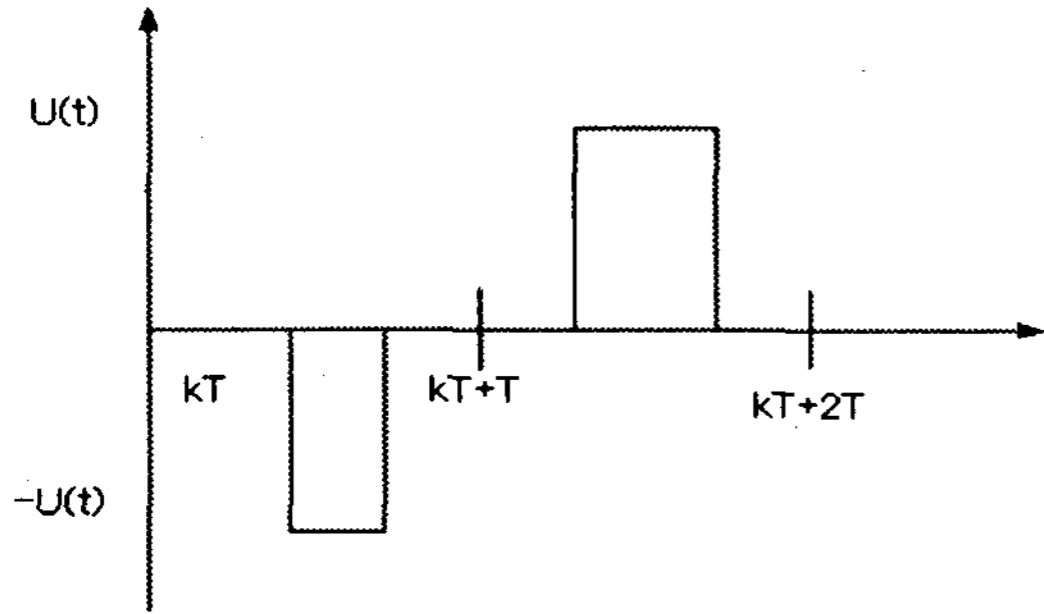


그림 2 PWM 제어 입력 신호

그림 1과 같은 PWM 시스템을 고려해보자. 주어진 PWM 시스템의 입력은 다음과 같다 [1].

$$u(t) = m(e(t)) = \begin{cases} M \operatorname{sgn}(e(kT)), & t \in [kT, kT + T_k] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

여기서 $k = 0, 1, 2, \dots$ 이다. 그림 2에서 나타난 것이 바로 (1)의 해당 입력들을 의미한다. 펄스의 넓이 (width)를 나타내는 T_k 와 signum 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$T_k = \begin{cases} \beta |e(kT)|, & |e(kT)| \leq \frac{T}{\beta} \\ T, & |e(kT)| > \frac{T}{\beta} \end{cases} \quad (2)$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma > 0, \\ 0, & \sigma = 0, \\ -1, & \sigma < 0. \end{cases} \quad (3)$$

샘플링 시간 T 및 펄스의 크기인 M 과 β 는 모두 상수로 가정된다.

2.2 T-S 퍼지 시스템

일반적으로 비선형 시스템은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $x(t) \in R^n$ 는 상태 벡터를 $u(t) \in R^m$ 는 입력 벡터를 의미한다. 위의 식 (1)은 다음의 퍼지 모델 식으로 표현 가능하다.

$$\begin{aligned} R^i: & \text{IF } x_1(t) \text{ is } \Gamma_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n(t) \text{ is } \Gamma_n^i \\ & \text{THEN } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t). \\ & y(t) = C_i x(t) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, R^i 는 i 번째 퍼지 규칙을, $z_h(t)$ 는 h 번째 전건부 변수를 의미하며, A 와 B 는 적절한 크기를 지닌 실제 행렬이다. Γ_h^i , i 번째 규칙에서 h 번째 전건부 변수의 퍼지 집합이다. 중심값-평균 비퍼지화, 곱셈 추론, 싱글톤 퍼지화를 사용하면 식 (5)는 다음과 같은 전역 동특성 식으로 나타나게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) C_i x(t) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서

$$\begin{aligned} \omega_i(z(t)) &= \prod_{h=1}^n \Gamma_h^i(z_h(t)), \\ \mu_i(z(t)) &= \frac{\omega_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))} \end{aligned}$$

이다.

3. PWM 시스템의 안정도 분석

본 장에서는 퍼지 시스템 (6)에 대한 제어 입력을 PWM 입력인 (1)로 설정하여 시스템을 구성하게 된다. 그전에 식의 효율적인 전개를 위해 다음의 가정을 도입하자.

가정 1[3]: 모든 샘플링 구간에서 퍼지 추론 시스템의 i 번째 규칙의 발화정도 $\mu_i(z(t))$ 는 샘플링 순간의 값으로 근사화 될 수 있다. 즉 구간 $[kT, kT + T)$ 에서

$$\mu_i(z(t)) = \mu_i(z(kT)) \quad (7)$$

이다. 결과적으로 비선형 행렬 $\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) A_i$

와 $\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) B_i$ 는 상수 행렬 $\sum_{i=1}^r \mu_i(z(kT)) A_i$

와 $\sum_{i=1}^r \mu_i(z(kT)) B_i$ 로 근사화 가능하다.

식 (6)과 (1)에 의하여 구성된 퍼지 PWM 제어 시스템의 일반해는 다음과 같이 구성된다.

$$x(t) = e^{\sum_{i=1}^r \mu_i(z(kT)) A_i T} x(kT) + \int_{kT}^t e^{\sum_{i=1}^r \mu_i(z(kT)) A_i (t-\tau)} d\tau B M \operatorname{sgn}(Cx(kT)) \quad (8)$$

여기서 $t \in [kT, kT + T_k]$ 이다. 그리고 남은 구간 $t \in [kT + T_k, kT + T]$ 에서는

$$x(t) = e^{\sum_{i=1}^r \mu_i(z(kT)) A_i T} x(kT) \quad (9)$$

과 같이 나타난다. 특별히 $t = kT + T$ 에서의 일반해는 다음과 같이 나타내어진다.

$$x(kT + T) = e^{\sum_{i=1}^r \mu_i(z(kT)) A_i T} (I + M\beta W_{\tau_k}) x(kT) \quad (10)$$

여기서 $\tau_k =: \beta |Cx(kT)|$ 이며,

$$W_{\tau_k} =: \begin{cases} 0, & \sigma > 0, \\ \frac{I - e^{-A\tau_k}}{\tau_k} A^{-1} BC, & \sigma = 0, \\ \frac{I - e^{-AT}}{\tau_k} A^{-1} BC = \frac{T}{\tau_k W_T}, & \sigma < 0. \end{cases}$$

이며, I 는 적절한 크기를 지닌 단위행렬이다. 식 (10)에 대한 안정도 정리는 다음과 같이 나타내어진다.

이론 1: $x = 0$ 에서의 Jacobian $\frac{\delta f}{\delta x}(0)$ 인 행렬 A 가 Hurwitz 안정하다고 가정하면, 퍼지 PWM 시스템 (3)과 (4)의 결합으로 이루어진 시스템 (1)은 평형점 $x = 0$ 에서 점근적으로 안정하다.

증명: 다음의 리아푸노프 함수를 정의하자.

$$V(x) = x^T P x \quad (11)$$

이로써 식 (10)은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= V(x(kT + T)) - V(x(kT)) \\ &= x^T(kT) (I + M\beta W_{\tau_k})^T (P - I) \\ &\quad \times (I + M\beta W_{\tau_k}) x(kT) - x(kT)^T P x(kT) \\ &\leq -|\theta_{M\beta}| \|x(kT)\|^2 + 2\|(P - I) \\ &\quad \times (I - M\beta W_{\tau_k})\| \|x(kT)\| \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 $\theta_{M\beta}$ 의 설정에 따라 안정도 여부가 결정될 수 있으며, 이는 다시 $M\beta$ 의 값을 통해 나타난다. 이의 설정은 아래의 이차 방정식 해로 나타낼 수 있다.

$$\theta_{M\beta} =: \lambda_{\max}(-I + M\beta W_{\tau_k}^T (P - I) - M\beta (P - I) W_{\tau_k})$$

$$+ M^2 \beta^2 W_{\tau_k}^T (P - I) W_{\tau_k}) < 0 \quad (13)$$

식 (10)에 대한 일반해의 놈 (norm)은 다음의 부등식을 만족하게 된다.

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq e^{\sum_{i=1}^r \mu_i(z(kT)) A_i T} \|x(kT)\| \\ &\quad + \left\| \int_{kT}^t e^{\sum_{i=1}^r \mu_i(z(kT)) A_i (t-\tau)} d\tau \right\| \|B\| \|M\| \\ &\quad \times \|\operatorname{sgn}(Cx(kT))\| \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 구간 T_k 는 $T_k \leq \beta \|C\| \|x(kT)\|$ 를 만족하게 되며, 이는 Gronwall 부등식에 의해 구간 $t \in [kT, t_0]$ 에서 다음의 부등식을 만족하게 된다.

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq (1 + M\beta \|B\| \|C\|) e^{\sum_{i=1}^r \mu_i(z(kT)) A_i T} \\ &\quad \times \|x(kT)\| \\ &\leq \eta_1 \|x(kT)\| \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 η_1 은 k 에 독립적으로 선정된다. 이를 통해 식 (13)에서의 일반해 $M\beta$ 를 통해 퍼지 PWM 시스템은 점근적으로 안정하다는 것을 알 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 퍼지 PWM 시스템의 안정도에 대해서 다루었다. 시스템의 복잡한 비선형성을 해결하기 위하여 T-S 퍼지 모델 기반 제어 시스템을 구성하였으며, PWM 입력을 사용하여 퍼지 PWM 시스템을 구성하였다. 그리고 리아푸노프 안정도 분석을 통해 시스템의 안정도 가능성을 연구하였다.

감사의 글 : 이 논문은 2008년도 두뇌한국21 사업에 의하여 지원되었음
본 연구는 산업 자원부 전력기반 조성사업 센터의 고급인력양성 사업의 통한 연세대학교 개통 적용 신 전력기기 연구센터의 지원으로 수행되었습니다.

참고 문헌

- [1] L. Huo, and A. N. Michel, "Stability analysis of pulse-width-modulated feedback systems." *Automatica*, vol. 37, pp. 1335-1349, 2001.
- [2] H. J. Lee, J. B. Park, and G. Chen, "Robust fuzzy control of nonlinear systems with parametric uncertainties," *IEEE Fuzzy Syst.* vol. 9, pp. 369-379,

2001.

- [3] H. J. Lee, H. B. Kim, Y. H. Joo, W. Chang, and J. B. Park, "A new intelligent digital redesign for T-S fuzzy systems: global approach," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* vol. 12. pp. 274-284, 2004.
- [4] H. J. Lee, J. B. Park, and Y. H. Joo, "An efficient observer-based sampled-data control: digital redesign approach," *IEEE Trans. Circuit Syst. I.* vol. 50. no. 12. pp. 1595-1601, 2003.
- [5] B. Wie, *Spacecraft dynamics and control: applications of dynamical systems theory*, Lecture Note, Arizona State University, 1995.
- [6] L. S. Shieh, X. M. ZHAO, and J. W. Sunkel, "Hybrid state-space self-tuning control using dual-rate sampling," *IEE Proc. Control Theory Appl.* vol. 138. pp. 50-58, 1991.
- [7] A. R. Teel, L. Moreau, D. Nesic, "Input to state set stability for pulse width modulated control systems with disturbances," *Systems & Control Letters.* vol. 51, pp. 23-32. 2004.
- [8] 이호재, 주영훈, 박진배, "퍼지 펄스폭 변조 제어: 전역적 지능형 디지털 재설계 접근법," *퍼지 및 지능시스템학회 논문지*, vol. 15, pp. 91-97, 2005.