Proceedings of KASS Symposium - Spring 2008
Vol. 5, No. 1 (통권 제5호), May, 2-3, 2008

크기최적화 이후에 나타나는 2차원 얕은 아치 트러스의 후 좌굴 거동의 변화에 대한 연구

A Study on the Variation of Post Buckling Behaviour of 2-dimensional Shallow Arch Truss after Size Optimization

이 상 진* 이 인 수**
Lee, Sang-Jin Lee, In-Soo

요 약

본 연구에서는 이산계열 대공간구조물의 크기최적화에 따른 후 좌굴거동의 변화에 대하여 조사하고 그 결과를 기술하였다. 본 연구에서는 35개의 부재를 가지는 얕은 아치형 2차원 공간트러스 구조물을 이용하여 연구를 수행하였다. 먼저 트러스의 최적의 부재 크기 패턴을 조사하기 위하여 수학적 프로그래밍 기법을 도입하였다. 이때 최소화해야하는 트러스의 전체 부재의 중량을 목적함수로 이용하고 하중이 가해지는 절점에서 발생하는 변위 값과 각 부재에서 발생하는 응력 값을 허용치 이하로 제한하는 제약조건으로 사용하였다. 크기최적화에서 도출된 트러스 구조물의 후좌굴 거동은 통합 비선형해석기법을 이용하여 조사 분석하였다. 본 연구에서 제시한 결과는 이산계열 대공간구조물의 설계에 기본 데이터로 유용하게 사용될 것으로 판단된다.

Abstract

This paper investigates the variation of post-buckling behaviours of 2-dimensional shallow arch type truss after sizing optimization. The mathematical programming technique is used to produce the optimum member size of 2D arch truss against a central point load. Total weight of structure is considered as the objective function to be minimized and the displacement occurred at loading point and member stresses of truss are used as the constraint functions. The finite difference method is used to calculate the design sensitivity of objective function with respect to design variables. The postbuckling analysis carried out by using the geometrically nonlinear finite element analysis code ISADO-GN. It is found to be that there is a huge change of post-buckling behaviour between the initial structure and optimum structure. Numerical results can be used as useful information for future research of large spatial structures.

키워드 : 크기최적화, 후좌굴거동, 아치트러스, 수학적프로그래밍
Keywords : size optimization, post-buckling analysis, arch truss, mathematical programming

1. 서 론

초대(형)공간구조의 실현은 과학적이고 정량적인 데이터를 바탕으로 구조시스템을 먼저 정확히 이해하는 과정이 필요하며 이러한 이해를 바탕으로 구조시스템을 설계하는 원천기술을 개발하고 적절히 이용함으로써 가능하다. 이러한 원천기술의 개발과 이용은 앞으로 공간구조의 구조설계 및 건설단계에서 뿐만이 아니라 개념설계단계에서도 다양한 방법으로 이용되어야 하며 미래 거대구조물의 건설을 위해서 반드시 필요하다. 이러한 맥락에서 설계최적화기술은 최근 초대형공간의 원천기술로 인식되고 있으며 미래의 초대공간의 건설을 위해서 다각적으로 그리고 또 심층적으로 연구되고 개발되기 시작했다. 공간구조에 적용되는 설계최적화기술은 부재의 크기를 조절하는 크기최적화와 형상을 조절하는 형상최적화 그리고 형상과 크기를 정성적으로 조절할 수 있는 위상최적화로 나눌 수 있다. 설계최적화의 접근방법은 구조물의 종류에 상관없이 이론적으

* 교신저자, 정회원, 경상대학교 건축공학과 부교수, Ph.D
Tel: 055-751-6541
E-mail : lee@gnu.ac.kr
** 학생회원, 경상대학교 건축공학과 석사과정생
E-mail : bbuhahaha@nate.com

로는 같은 뿌리를 두고 있으나 적용되는 구조물에 따라서 그 개발과정이 다르며 요구되는 중요 요소 기술도 다르다. 본 연구에서는 공간구조물에 대한 설계최적화기법을 개발하고 이용함에 있어 이러한 기술이 정량화되고 시스템화 되어 가는데 대한 주의와 관심을 불러일으키고자 한다. 본 연구에서는 이러한 목적을 이루기 위해서 설계최적화기법을 이용하여 도출한 얕은 아치형 2차원 트러스 구조물의 최적부재패턴이 설계최적화문제 정의에서 고려되지 않은 후 좌굴거동에 변화에 대한 민감도를 보여주고 이러한 현상이 최적설계에 반드시 고려되어야 함을 증명하려고 한다. 따라서 본 연구를 통하여 공간구조의 설계최적화이후에 변화하는 후 좌굴거동의 변화에 대한 검증절차의 중요성을 경험하고 향후 공간구조의 설계최적화에 이러한 개념이 추가되어야 함을 역설하고자 한다.

2. 트러스의 설계최적화

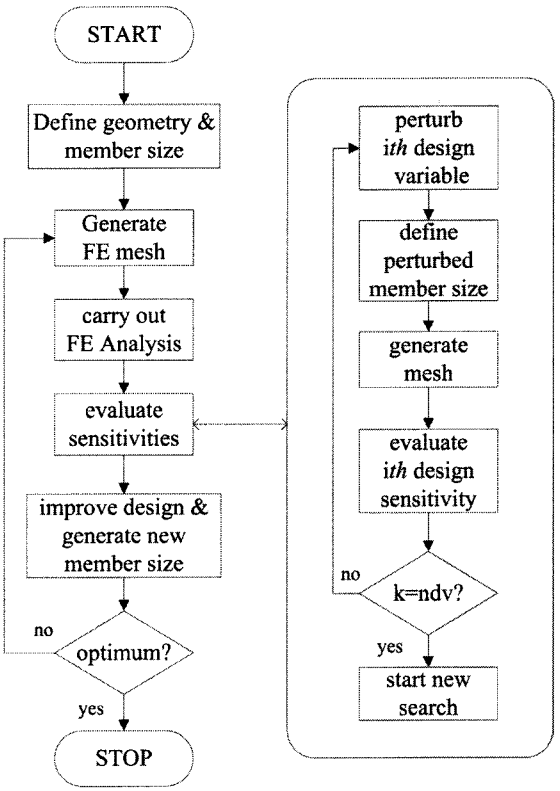
본 연구에서는 최적 설계된 트러스의 후 좌굴 거동에 대한 분석을 위해서 먼저 트러스의 최적화를 수행하였다. 최적화를 위한 목적함수로는 트러스 건설에 사용된 재료의 전체중량을 사용하고 각 부재에서 발생하는 응력과 절점에서 발생하는 변위가 허용치를 초과하지 않는 제약조건을 채택하였다. 따라서 본 연구에서는 수행한 설계최적화문제를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{Minimize} \quad \Psi(A_e) = \sum_{e=1}^{nel} W_e = \sum_{e=1}^{nel} \rho_e A_e \ell_e \qquad (1)$$

$$\text{subjected to} \left| \frac{\sigma_e}{\sigma_{allow}} \right| - 1 \le 0,$$

$$\left| \frac{u_k}{u_{allow}} \right| - 1 \le 0 \qquad (2)$$

여기서 Ψ는 설계최적화 문제의 목적함수이며 W_e, ρ_e, A_e, ℓ_e는 각각 유한요소 e의 중량, 밀도, 단면적, 부재의 길이 그리고 nel은 유한요소의 수이다. σ_e는 요소 e의 응력 값을 나타내고 σ_{allow}는 부재의 허용 응력 값 그리고 u_k는 절점 k에서 발생하는 변위 값을 나타내며 u_{allow}는 허용 변위 값을 나타낸다. 트러스의 설계최적화를 수행하기 위해서 본 연구에서는 <그림 1>에 도시된 바와 같은 과정을 거치게 된다.



〈그림 1〉 최적화 기본 알고리듬[1]

본 연구에서는 목적함수의 설계민감도를 계산하기 위해서 유한차분법을 이용하였다[2].

3. 기하학적인 비선형해석

본 연구에서는 2차원 2절점 트러스요소를 정식화하기 위하여 Galerkin의 가중잔차법[3]을 이용하였으며 아래의 세가지 가정을 채택하였다:

- 트러스단면의 수직인 방향으로만 응력이 발생할 수 있다.
- 단면의 수직방향으로 발생하는 응력은 일정하다.
- 트러스의 변형시에 단면의 면적은 일정한 값을 유지한다.

이때 변형된 트러스의 입자를 표현하는 정적 지배방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$(\sigma_{11}F_{j1})_{,1}+\rho b_j=0 \tag{3}$$
$$n\sigma_{11}F_{j1}-T_j=0 \tag{4}$$

여기서 ρ는 물체의 밀도를 나타내고 b는 물체력 그리고 σ_{11}은 2차의 Piola-Kirchhoff응력을 나타내고 F_{j1}는 B_0에서 B_t로의 움직임을 나타내는 변형그래디언트를 나타낸다. 그리고 T_j는 표면력을 나타내며 n은 수직벡터를 나타낸다.

$$F_{j1}=\frac{\partial x_j}{\partial X_1} \tag{5}$$

식(3,4)의 지배방정식과 경계조건을 이용하여 표준의 Canonical form으로 G^e를 형성하면 다음과 같다.

$$G^e(u,\delta u)=\int_{B^e}\sigma_{11}F_{j1}\delta u_{j,1}AdS+\int_{B^e}\rho b_j\delta u_j AdS + \int_{\partial B^e}T_j\delta u_j dA \tag{6}$$

여기서 A는 트러스의 단면을 나타낸다.

Galerkin의 가중장(weight field)는 변위장의 형상함수와 동일하므로 다음과 같다.

$$\delta u(\xi)=\sum_{b=1}^{2}N_b\delta u^b \tag{7}$$

식(5)를 식(4)에 대입하면 다음과 같이 정리된다.

$$\sum_{b=1}^{2}\delta u_j^b(K_j^b-R_j^b)=0 \tag{8}$$

위식에서 δu_j^b는 임의의 값을 가지므로 다음과 같이 정리될 수 있다

$$K_j^b-R_j^b=0 \tag{9}$$

여기서 K_j^b는 내력을 나타내고 R_j^b는 외력을 나타낸다.

식(9)은 비선형방정식이므로 Newton-Raphson계열의 비선형해석법을 사용하기 위해서는 내력 항을 선형화하여야 한다. 따라서 비선형해석을 위한 접선강성행렬은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}DK_{ji}^{ba}&=\frac{\partial}{\partial u_i^a}\left(K_j^b\right)\\&=\frac{\partial}{\partial u_i^a}\left[\int_B\sigma_{11}\frac{\partial x_\ell}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial x_\ell}{\partial u_j^b}\right)dV\right]\\&=\int_B\left[\frac{\sigma_{11}}{\partial u_j^a}\frac{\partial x_\ell}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial x_\ell}{\partial u_j^b}\right)\right]dV\\&+\int_B\left[\frac{\partial}{\partial u_j^a}\left(\frac{\partial x_\ell}{\partial X_1}\right)\sigma_{11}\frac{\partial}{\partial u_j^b}\left(\frac{\partial x_\ell}{\partial X_1}\right)\right]dV\end{aligned} \tag{10}$$

이때 아래와 같은 chain rule을 이용하면,

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial u_i^a}=\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{11}}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial u_i^a} \tag{11}$$

접선탄성계수는 다음과 같이 정리될 수 된다.

$$\begin{aligned}DK_{ji}^{ba}&=DK_E+DK_G\\&=\int_B\left[\frac{\partial x_\ell}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial x_\ell}{\partial u_j^a}\right)E_{1111}\frac{\partial x_\ell}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial x_\ell}{\partial u_j^b}\right)\right]dV\\&+\int_B\left[\frac{\partial}{\partial u_j^a}\left(\frac{\partial x_\ell}{\partial X_1}\right)\sigma_{11}\frac{\partial}{\partial u_j^b}\left(\frac{\partial x_\ell}{\partial X_1}\right)\right]dV\Bigg\}\end{aligned} \tag{12}$$

여기서 DK_E는 탄성강성행렬을 나타내고 DK_G은 기하학적 비선형해석을 위한 기하학적 강성행렬을 나타낸다.

4. 비선형 해석 알고리즘

본 연구에서는 아치형 2차원 트러스의 기하학적 비선형 해석을 수행하기 위하여 통합 비선형기법[4]을 이용하였다. 이 기법은 구조물의 시스템이 n개의 미지수를 가지는 연립방정식으로 표현될 경우 하중세기 인자 λ를 포함하여 $n+1$개의 미지수를 이용하여 비선형 방정식을 표현하게 된다. $n+1$개의 미지수를 가지는 평형방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G(u,\lambda) = p(u) - \lambda f = 0 \tag{13}$$

여기서 $p(u)$는 변위 u의 비선형 함수로 나타나는 내력벡터를 나타내고 f는 하중벡터이다. 식(13)는 $n+1$개의 미지수를 가지는 n개의 연립방정식이므로 구속조건을 추가적으로 도입하면 식(13)의 확대식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} G(u,\lambda) \\ f\ (u,\lambda) \end{bmatrix} = 0 \tag{14}$$

식(14)에서 추가된 구속방정식$f(u,\lambda)$는 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k \triangle u_k^2 + \beta_{n+1}\alpha^2 \triangle \lambda^2 = c^2 \tag{15}$$
$$\triangle u_k = u_k^m - u_k^{m-1}; \triangle \lambda_k = \lambda_k^m - \lambda_k^{m-1}$$

여기서 α는 하중계수를 나타내고 c는 지정된 해석단계를 나타낸다.

이때 식(14)를 u와 λ를 이용하여 이전단계에 대하여 선형화하면 평형방정식과 구속방정식은 다음과 같다.

$$\partial p^{i,m} \triangle u^{i,m} - f \triangle \lambda^{i,m} = r^{i,m} = \lambda^{i,m} f - p(u^{i,m})$$
$$2\sum_{i=1}^{n} \beta_k (u^{i,m} - u^{m-1}) \triangle u^{i,m} + 2\beta_{n+1}\lambda^2 (\lambda^{i,m} - \lambda^{m-1}) \triangle \lambda^{i,m}$$
$$= c^2 - \sum \beta_k (u_k^{i,m} - u_k^{m-1})^2 - \beta_{n+1}\alpha^2 (\alpha^{i,m} - \alpha^{m-1})^2 \tag{16}$$

여기서 $r^{i,m}$은 불형평력을 나타내고, $\partial p^{i,m}[=\partial p(u^{i,m})]$는 접선강성행렬을 나타내며 윗첨자 (i,m)은 m번째의 하중단계에서 i번째의 반복 계산일 때의 값을 나타낸다.

구속방정식으로 확대된 선형화된 비선형방정식은 행렬의 형식으로 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} \partial p^{i,m} & f \\ C_1^T & C_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \triangle u^{i,m} \\ \triangle \lambda^{i,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{i,m} \\ r^{i,m} \end{pmatrix} \tag{17}$$

여기서 상수 C_1^T과 C_2는 다음과 같다.

$$C_1^T = 2\beta_1 (u_1^{i,m} - u_1^{m-1}), \ldots, 2\beta_n (u_n^{i,m} - u_n^{m-1})_{(n\times 1)}$$
$$C_2 = 2\beta_{n+1}\alpha^2 (\alpha^{i,m} - \alpha^{m-1}) \tag{18}$$

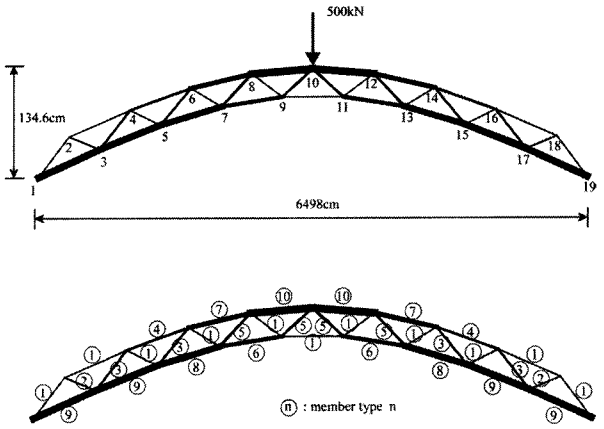
여기서 $\partial p^{i,m}$는 변위벡터 $u^{i,m}$에 대한 접선강성행렬을 나타낸다. 이때 변위 u^m은 하중단계 m에서 수렴된 값을 뜻한다. 변위와 하중파라메타는 다음과 같은 증분의 관계를 가진다.

$$u^{i+1,m} = u^{i,m} + \triangle u^{i,m}$$
$$\lambda^{i+1,m} = \lambda^{i,m} + \triangle \lambda^{i,m} \tag{19}$$

구속방정식의 매개변수 β를 조절함으로써 해석 알고리즘의 종류를 선택할 수 있다.

5. 아치형 2차원트러스

본 연구에서는 크기최적화이후에 나타나는 트러스 구조물의 후 좌굴거동에 대한 변화를 조사하기 위서 총 35개의 부재수를 가지는 2차원 얕은 아치형 트러스를 이용하였다. 트러스의 양끝의 절점이 고정되어 있고 트러스의 중앙에 집중하중 $P = 500kN$이 가해지는 상태이다. 트러스의 형상은 <그림 2>에 도시되어 있으며 트러스의 형상을 부각시키기 위해서 수직방향의 좌표값을 10배 확대하여 도시 하였다.



〈그림 3〉 2차원 아치 트러스: (상) 집중하중의 가력위치와 치수 및 (하) 재료 종류

트러스구조물의 절점좌표값과 부재연결상태는 <표 1>에 기술한 바와 같고 트러스 구조물의 건설

에 사용된 부재의 종류는 모두 10가지이며 자세한 내용은 <표 2>과 같다. 먼저 제 2절에서 기술한 최적화기법을 이용하여 아치형 트러스의 크기최적화를 수행하였다. 반응해석에 사용된 탄성계수 $E=20340000N/cm^2$이고 질량은 $\rho=7.85t/m^3$ 그리고 하중은 절점 10번에 집중하중에 가하였다. 본 예제에서는 돔의 중량을 목적함수로 채택하였고 부재의 응력은 인장영역은 $600N/cm^2$ 그리고 압축영역 $50N/cm^2$를 넘지 못하게 하였으며 트러스의 최상부의 절점 10에서 발생하는 변위가 $\pm 2.8cm$를 넘지 못하게 하였다.

〈표 1〉 트러스 절점 좌표 및 요소연결상태

유한요소절점			유한요소			
no	x	y	no	연결상태	no	연결상태
1	-3429.0	0.0	1	1-2	20	13-12
2	-3048.0	50.65	2	19-18	21	9-10
3	-2667.0	34.75	3	2-4	22	11-10
4	-2286.0	83.82	4	18-16	23	7-9
5	-1905.0	65.30	5	4-5	24	13-11
6	-1524.0	110.85	6	16-15	25	6-8
7	-1143.0	87.99	7	6-7	26	14-12
8	-762.0	128.50	8	14-13	27	5-7
9	-381.0	100.05	9	8-9	28	15-13
10	0.0	134.60	10	12-11	29	1-3
11	381.0	100.05	11	2-3	30	19-17
12	762.0	128.50	12	18-17	31	3-5
13	1143.0	87.99	13	3-4	32	17-15
14	1524.0	110.85	14	17-16	33	8-10
15	1905.0	65.30	15	5-6	34	12-10
16	2286.0	83.82	16	15-14	35	9-11
17	2667.0	34.75	17	4-6		
18	3048.0	50.65	18	16-14		
19	3429.0	0.0	19	7-8		

〈표 2〉 트러스에 이용된 부재종류

재료번호	단면적(cm^2)	부재번호
1	1.783767	1-10, 35
2	2.229969	11-12
3	2.898752	13-16
4	3.344607	17-18
5	3.567881	19-22
6	5.574576	23-24
7	6.689560	25-26
8	8.919183	27-28
9	10.03417	29-32
10	10.70330	33-34

최적화에는 모두 10개의 설계변수를 이용했으며 최적값을 검색하기 위하여 Sequential Quadratic Programming(SQP)기법[5,6]을 사용하였다. 최적화를 수행하기 위해서 이용한 설계변수의 하한치와 상한치 그리고 최적화를 수행하여 구한 최적부재의 크기는 <표 3>에 기술된 바와 같다. 또한 최적화과정을 통해서 구해진 최적의 설계변수분포는 <그림 3>에 도시하였다. 참고로 트러스의 최적부재사이즈는 목적함수와 제약조건에 따라서 크게 달라질 수 있으며 이 예제에서는 이절에서 기술한 제약조건을 만족하는 경우에만 국한하여 최적화를 수행하였다.

〈표 3〉 초기 설계변수값과 및 정규화된 목적함수값

i	s_i^o	s_i^ℓ	s_i^u	SQP
1	1.0E-10	0.178D+01	1.0E+10	0.398D+01
2	1.0E-10	0.223D+01	1.0E+10	0.182D+00
3	1.0E-10	0.290D+01	1.0E+10	0.154D+01
4	1.0E-10	0.335D+01	1.0E+10	0.136D+01
5	1.0E-10	0.357D+01	1.0E+10	0.362D+01
6	1.0E-10	0.558D+01	1.0E+10	0.192D+01
7	1.0E-10	0.669D+01	1.0E+10	0.462D+01
8	1.0E-10	0.892D+01	1.0E+10	0.650D+01
9	1.0E-10	0.100D+02	1.0E+10	0.919D+01
10	1.0E-10	0.107D+02	1.0E+10	0.112D+02
$\bar{\Psi}(s)$	-	-	-	9.64320E+04

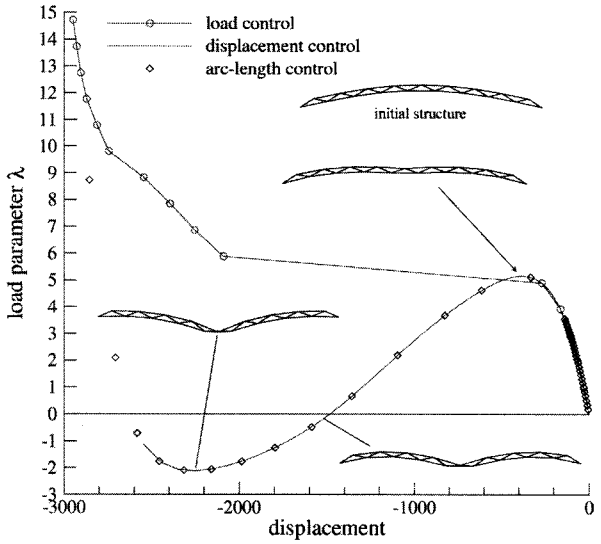
$\Psi_0=\rho\times 1.05366E+05,\ \bar{\Psi}_0=\Psi/\rho$

〈그림 3〉 2차원 아치 트러스 최적부재 패턴

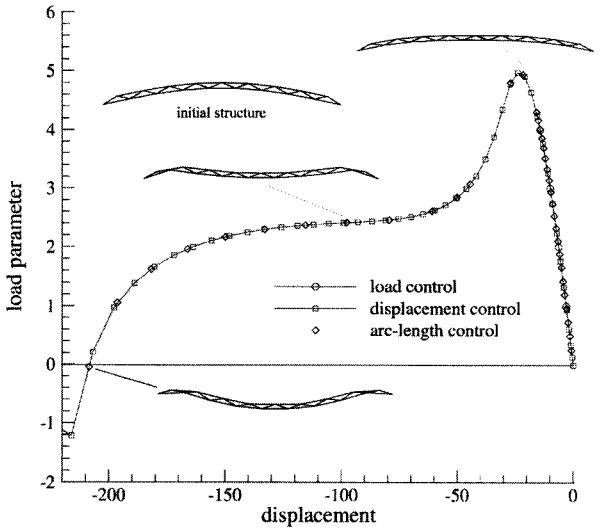
초기 트러스구조물에서는 35번 요소에서 1333.7 N/cm^2의 최대응력이 발생하였으나 최적설계를 통하여 허용응력을 $600N/cm^2$로 감소시켰다. 이때 나타난 2차원 아치트러스의 최적부재패턴은 <그림 3>에 나타난 바와 같다.

본 연구에서는 최적화 전과 최적화 후에 나타나는 후 좌굴거동의 변화를 알아보기 위하여 제 4절에서 기술한 통합비선형해석기법을 이용하여 후 좌굴해석을 수행하고 그 결과를 <그림 4>와 <그림 5>에 각각 도시하였다. 최적화 전과 최적화 후에 나타나는 좌굴이후의 거동은 최적화로 인해서 매우 달

라졌음을 알 수 있었다. 특히 최적화 전과 최적화 후의 하중의 정점을 비교해보면 최적화로 인해서 하중의 정점값이 다소 감소했으며 하중-변위 경로의 변화도 매우 큰 것으로 나타났다. 이러한 후 좌굴 거동의 매우 큰 변화는 트러스의 전체적인 붕괴 메카니즘의 변화를 나타내는 것으로 최적화문제에 주어지는 목적함수와 제약조건을 만족하는 구조물일 지라도 트러스의 후 좌굴경로를 반드시 검증해야 하는 교훈을 준다.



〈그림 4〉 2차원 아치 트러스의 후좌굴거동 (초기형상)



〈그림 5〉 2차원 아치 트러스의 후좌굴거동 (최적형상)

6. 결 론

본 연구에서는 설계최적화 이후에 나타나는 아치형 트러스의 후 좌굴의 거동의 변화에 대하여 조사하고 그 결과를 기술하였다. 최적화 문제 정의에 따른 얕은 아치형 트러스의 성능개선은 사용자가 원하는 목적함수와 제약조건을 만족하게 되지만 최적화 전과 최적화 후에 나타나는 후좌굴 거동은 매우 상이한 것으로 나타났다. 따라서 최적설계단계에서나 최적설계 이후에도 공간구조의 기하학적 비선형성에 대한 충분히 검토가 이루어져야 하는 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 건설교통부가 출연하고 한국건설교통기술평가원에서 위탁 시행한 첨단도시개발사업비로 수행되었음(과제번호: C106A1030001-06A050300120).

참고문헌

1. Lee, S.J. and Hinton, E., "Dangers inherited in shells optimized with linear assumptions," Computers and Structures, Vol. 78, 2000, pp. 478-486
2. Lee, S.J. and Kanok-NUchulchai, W., "A nine-node assumed strain finite element for large deformation analysis," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 42, pp. 777-798, 1998.
3. Haftka R.T. and Adelman, H.M., "Recent developments in sensitivity analysis," Structural Optimization, Vol. 1, 1989, pp137-151
4. Chaiomphob, T., Kanok - Nuckuchai, W. and Nishino, F., "Automatic arc-lenth control algorithm for tracing equilibrium paths of nonlinear structures", JSCE, 5, 205-208, 1988
5. Vanderplaats, G. N., Numerical Optimization Techniques for Engineering Design, McGraw-Hill, 1984
6. DoT manual VMA Engineering, 1996.