

# 케이블 돔 구조물 설계를 위한 수치해석 방법

## A Numerical Analysis Approach for Design of Cable Dome Structures

김재열\*  
Kim, Jae-Yeol

장동우\*\*  
Jang, Dong-Woo

### Abstract

This paper deals with the method of self-equilibrium stress mode analysis of cable dome structures. From the point of view of analysis, cable dome structure is a kind of unstable truss structure which is stabilized by means of introduction of prestressing. The prestress must be introduced according to a specific proportion among different structural member and it is determined by an analysis called self-equilibrium stress mode analysis. The mathematical equation involved in the self-equilibrium stress mode analysis is a system of linear equations which can be solved numerically by adopting the concept of Moore-Penrose generalized inverse. The calculation of the generalized inverse is carried out by rank factorization method. This method involves a parameter called epsilon which plays a critical role in self-equilibrium stress mode analysis. It is thus of interest to investigate the range of epsilon which produces consistent solution during the analysis of self-equilibrium stress mode.

키워드 : 케이블 돔, 자기평형모드, 일반역행렬, 케이블돔구조

Keywords : cable dome, self-equilibrium stress mode, generalized inverse, cable dome structures

### 1. 케이블 돔 구조물

지붕구조물에 작용하는 하중은 기초구조물에 전달되어 지지된다. 지지해야 할 하중의 감소는 지지구조물의 크기를 결정하는데 중요한 요소이며, 이것은 구조물의 건설비용을 줄일 수 있다. 이를 위해서는 경량의 지붕이 필요하다. 이러한 지붕의 경량화를 만족시킬 수 있는 재료중의 하나가 막 구조물이다. 그러나 구조 막은 일정양의 프리스트레스가 필요하고, 이 프리스트레스에 의해 발생된 지지구조물의 반력을 적절히 조절할 필요가 있다. 지지구조물의 크기를

줄이면서 반력을 조절할 수 있는 가장 효과적인 방법 중 하나는, 지붕과 지지구조물이 자기평형응력상태인 구조시스템으로 설계하는 것이다. 케이블 돔 구조물이 이러한 자기평형 구조시스템이 좋은 예이다. 케이블 돔 구조시스템은 전 세계적으로 스포츠시설에 적용되어 왔으며, 케이블 돔 구조물 개념에 기초를 둔 구조설계의 아주 좋은 국내의 예는 부산월드컵경기장을 들 수 있다.

#### 1.1 케이블 돔 구조물의 구성요소

일반적으로 케이블 돔 구조의 주요 요소는 중앙부 인장링(하부측 및 상부측), 바깥쪽 압축링, 방사(radial) 케이블(하부측 및 상부측), 그리고 압축 마스트(mast)로 이루어지며, 인장막은 케이블 마스트에 의해 지지된다. 하부 인장링과 상부 인장링은 압축 마스트로 연결되며, 마스트의 양 끝은 상하부 방사 케이블에 의해 연결된다. 케이블 돔구조의 구조 시스템이 나타나 있다. 인장 막은 케이블 마스트 시스템에 의해

\* 정희원, 협성대학교 건축공학과 교수, 공학박사  
Tel: 031-299-0758 Fax:031-298-2737  
E-mail : jykim@uhs.ac.kr

\*\* 정희원, 서울산업대학교 산업대학원 건축학과 석사과정  
Tel: 031-299-0758 Fax:031-298-2737  
E-mail : mir728@empal.com

지지된다. 바람과 같은 외부 하중은 우선 내부 인장링, 방사케이בל, 압축링과 외부 압축링의 조합에 의해 지탱되는 인장 막에 작용한다. 방사성분 반력은 가까운 외부링의 압축작용에 의해 지탱된다. 반면, 케이블 마스트 시스템으로 부터의 수직성분 반력은 압축링을 지지하고 있는 구조에 의해 지탱된다. 케이블 마스트 시스템은 현지형태의 조인트로 연결된 케이블 그룹으로 방사케이בל(하부축 및 상부축)과 내부링(하부축 및 상부축)으로 구성되어 있다. 이 시스템에 요구되는 형태유지를 위해 필요한 강성에 도달할 수 있게 프리스트레스를 도입해야한다. 케이블마스트 시스템의 부재에 도입되는 프리스트레스의 크기는 시스템에 요구되는 형태를 얻을 수 있게 적절하게 결정되어야 한다. 케이블 마스트 시스템 부재들의 프리스트레스에 대한 상대적 값을 자기평형응력 모드라고 한다.

1.2 케이블 돔 구조물 모델링

케이블 돔 구조물의 평면 형태는 내외부 링의 형태에 의해 결정된다. 기본적으로 내외부 링은 원형이나 타원형이다. 본 연구에서 다루고 있는 타원형은 그림 1과 같이 서로 다른 반경을 가진 두개의 아치의 조합으로 이루어진 것이다.

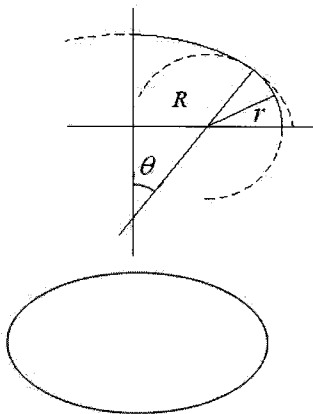


그림 1 직경이 다른 두 아치에 의해 조합된 타원형 케이블 돔

케이블 돔구조의 절점은 이 형상의 원주를 따라 분포되어 있고(그림 2, 그림 3), 두 절점간의 거리는 등간격이다. 각 절점의 위치는 좌표계에 의해 나타내어지며, 각 형태의 중심점은 좌표계의 원점으로 정의

된다. 타원의 원주를 따라 있는 절점 위치에 있어서 중요한 것은 좌표축의 주축에 대해 대칭이어야 한다는 것이다. 이 절점들은 다각형을 형성하기 위해서 케이블 부재들끼리 연결된다.

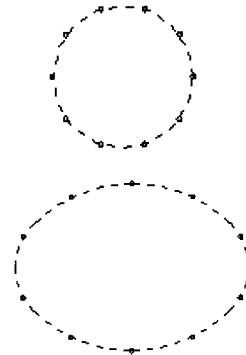


그림 2 원형이나 타원형의 절점 분포

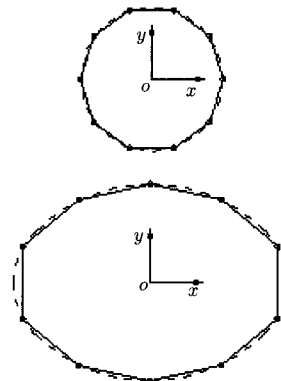


그림 3 원형이나 타원형의 다각형 형태

본 연구에서 생성된 모델은 전부 2중 내부링과 하나의 외부링으로 구성된다. 내부링사이의 수직길이는 마스트의 높이가 되고, 일정하거나 가변적으로 설계된다. 이 마스트 치수의 크기는 그림 4와 같이 두개의 원에 따른 코사인 함수를 기본으로 한다. 이 함수의 변수는 내부링의 원주길리와 링 당 절점수로부터 유도된다. 각 변수들을 함수에 대입함으로써, 대응되는 마스트의 높이를 얻을 수 있다.

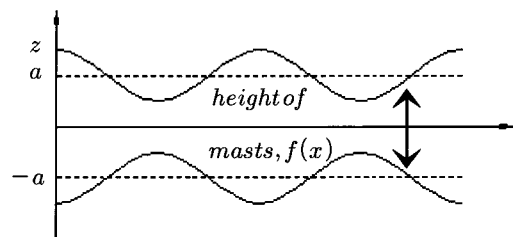


그림 4 마스트 높이 변화

절점과 요소의 번호 매김은 부재연결을 정의 하기 위해 필요하다. 이렇게 하여 모든 부재들이 연결되고 해석을 위한 완전한 케이블 돔 구조가 만들어진다. 그림 5가 절점번호와 부재번호가 매겨진 전형적인 케이블 돔구조이다.

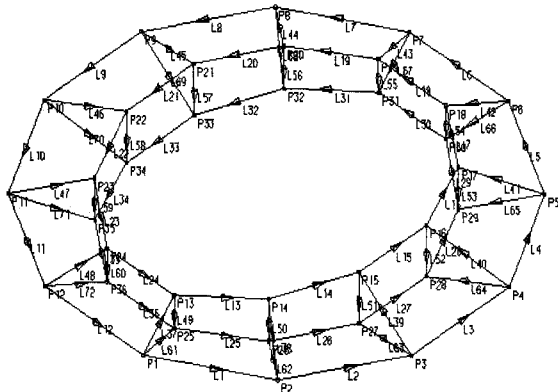


그림 5 케이블 돔 구조의 모델링 예

평면형태, 마스트의 높이, 절점수를 가변으로 하여 다양한 모델을 만들 수 있다. 내부 링 과 외부 링은 원형-원형, 타원형-타원형, 원형-타원형, 타원형-원형의 각각 다른 4종류로 하였다(그림 6). 각 모델들은 그림 7과 같이 마스트의 높이를 일정하게 하거나 변화시켜 모델화 하였다. 반면에, 각 모델 타입에 대한 절점수는 12-60까지 다양하다.

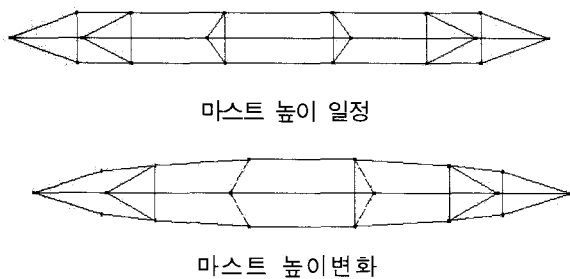


그림 6 마스트의 높이 분포

## 2. 케이블 돔구조의 자기평형

케이블 돔구조의 자기평형응력모드 해석을 위해 3차원 2절점 케이블-트러스 요소를 도입하여 전체 해석 모델에 대한 평형방정식들은 다음과 같이 행렬식으로 표시될 수 있다.

$$B_n = p \quad (1)$$

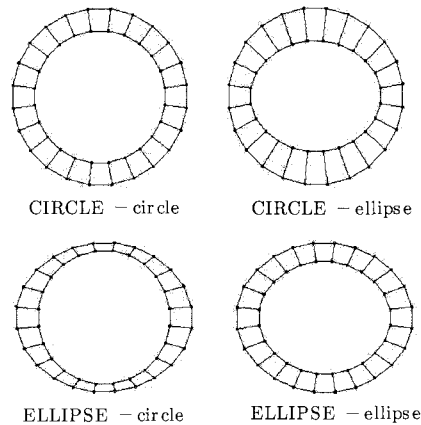


그림 7 평면형태에 따른 돔 구조물

여기서  $B: N \times m$  크기를 갖는 장방형행렬,  $N$ : 총 자유도 수,  $m$ : 총 요소의 수,  $n$ : 축력  $n_\alpha (\alpha=1, \dots, m)$ 의 벡터이고  $p$ 는 외부 절점력의 벡터이다. 자기평형응력모드는  $p=0$ 으로 하는 식(1)의 해로 주어질 것이다. 식(15)에서  $p=0$ 으로 하면 다음 식이 된다.

$$B_n = 0 \quad (2)$$

### 2.1 자기평형응력모드해석 순서

케이블 스트럿 돔구조에 있어서 자기평형응력모드의 결정에 관련되는 과정들은 이 장에서 설명될 것이다. 기본적으로 그 과정들은 다음과 같다.

- (1) 해석모델의 정의: 절점좌표와 요소 연결부
- (2) 경계조건
- (3) 식 (2)에서  $B$ 행렬의 조합과  $B^+$ 의 계산
- (4) 행렬  $[I_m - B^+ B]$ 의 구성과 그 안의 선형 독립 열벡터 수의 결정
- (5) 벡터  $n$ 의 결정

벡터  $n$ 이 자기평형응력모드를 나타낸다. 적용되는 응력의 크기는 케이블 돔구조의 건설시 사용되는 설계고려사항과 재료성능으로부터 결정되어진다.

### 2.2 $n$ 개의 미지수와 $m$ 개의 방정식에 대한 선형 관계식

$n$  개의 미지수와  $m$  개의 방정식에 대한 선형관계식을 푸는 방법을 설명하겠다.

$n$  개의 미지수와  $m$  개의 방정식으로 이루어진 선형관계식을 고려하자.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

윗 식은 다음과 같은 매트릭스형태로 나타낼 수 있다.

$$A_x = B \quad (4)$$

여기서  $A$ 는  $m \times n$  매트릭스이고,  $x$ 는 크기  $n$  인 벡터,  $b$ 는 크기  $m$  인 벡터이다.

일반역행렬을 이용하여, 선형방정식에 대한 해의 존재 조건은 다음과 같다.

$$AA^+b = b \quad (5)$$

윗 식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$(I_n - A^+A)b = 0 \quad (6)$$

여기서,  $I_n$  은 크기  $n$  인 단위매트릭스이다.

(6)식의 조건이 만족하면, 식(4)의 해는 다음과 같다.

$$x = A^+b + (I_n - A^+A)a \quad (7)$$

여기서,  $A^+b$ 는  $Ax = b$ 에 대한 특이해,  $[I_n - A^+A]a$ 는  $Ax = 0$ 의 일반해이다. 여기서,  $a$ 는 크기  $n$  인 임의계수 벡터이다.

$Ax = 0$ 의 일반해의  $[I_n - A^+A]$  항은 벡터로 나타낼 수 있다.

$$H = (I_n - A^+A) = (h_1, h_2, \dots, h_n) \quad (8)$$

만약,  $rank(A) = r$ 이라면  $rank[I_n - A^+A] = n - r$ 이다. 이것은  $H$ 가  $(n - r)$  개의 선형독립벡터

$h_1, h_2, \dots, h_{n-r}$  라는 것을 보여주는 것이다.

$p = n - r$  이라고 하면, (8)식의 해는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x = A^+b + ah_1 + ah_2 + \dots + ah_p \quad (9)$$

$p = n - r$  은  $A_x = 0$ 의 일반해에서의 임의계수의 수이다.

### 3. 해석 예 및 결과

해석 모델 제원은 다음과 같다.

Outer ring: ellipse

Inner rings: ellipse

Regularity of masts: various

Number of joints per ring: 12

Total number of joints: 36

Total number of members (n): 72

모델은 그림 8과 같고, 계수매트릭스  $B$ 의 크기는  $m = 108, n = 72$ 이다.

$B$ 매트릭스는  $rank$ 인수분해 과정에서 상삼각매트릭스  $U$ 와 하삼각매트릭스  $L$ 로 재구성된다.  $e$ 의 범위는 해가 최소가 될 때까지 여러 번 해석을 시도하여 구한  $U$ 를 통하여 결정된다.

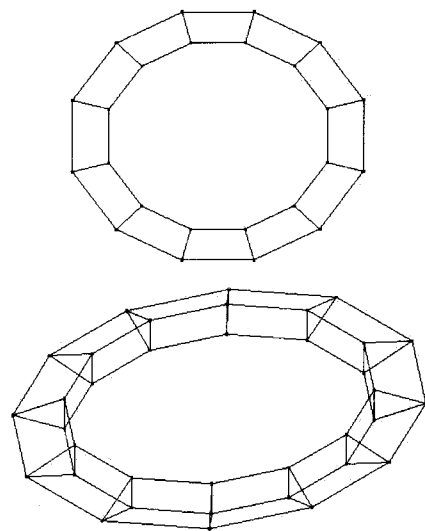


그림 8 해석모델

이 모델은 3번의 시도가 있었다. 각각의 과정은 다음과 같다.

[Trial number 1]  
 Epsilon used: 1.000000E-05  
 Rank (r) = 72  
 Statical indeterminacy (n - r) = 0  
 Number of solution sets = 0

상삼각 매트릭스는 다음과 같다.

$$U = \begin{bmatrix} p_{r=1,k=1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,71} & u_{1,72} \\ 0 & p_{r=2,k=2} & \cdots & u_{2,71} & u_{2,72} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & p_{r=71,k=71} & u_{71,72} \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & p_{r=72,k=72} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

여기서,

- pr,k : peak pivot
- r : row number
- k : column number / principle step number
- ur,k : coefficient above peak pivots
- xr,k : coefficient below peak pivots

peak pivot하부의 0은 매우 작은 것으로 기계적에  
 러이다. 첫번째 시도에서는 어떠한 peak pivot도  
 e범주를 만족하지 못했다.

[Trial number 2]  
 Epsilon used: 0.500000  
 Rank(r) = 70  
 Statical indeterminacy (n - r) = 2  
 Number of solution sets = 2

$$U = \begin{bmatrix} p_{r=1,k=1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,48} & u_{1,49} & \cdots & u_{1,71} & u_{1,72} \\ 0 & p_{r=2,k=2} & \cdots & u_{1,48} & u_{2,49} & \cdots & u_{2,71} & u_{2,72} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & x_{r=48,k=48} & p_{r=48,k=49} & \cdots & u_{48,71} & u_{48,72} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & p_{r,k=48} & \vdots & \vdots & p_{r=70,k=71} & x_{r=70,k=72} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & p_{r,k=72} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{108,48} & 0 & \cdots & 0 & x_{108,72} \end{bmatrix}$$

48열 Peak pivots pr,k = 48 과 72 열 pr,k = 72  
 은 e범주를 만족한다.

pr,k = 48 = 0.418802 < epsilon = 0.500000  
 pr,k = 72 = 0.418802 < epsilon = 0.500000  
 B 매트릭스에 두개의 특이 열이 있다.

[Trial number 3]  
 Epsilon used: 0.100000  
 Rank(r) = 71  
 Statical indeterminacy (n - r) = 1  
 Number of solution sets = 1

$$U = \begin{bmatrix} p_{r=1,k=1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,71} & u_{1,72} \\ 0 & p_{r=2,k=2} & \cdots & u_{2,71} & u_{2,72} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & p_{r=71,k=71} & x_{r=71,k=72} \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & p_{r,k=72} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{108,72} \end{bmatrix}$$

pr,k = 72 = 2.707291E-05 < epsilon = 0.100000  
 72열 Peak pivots pr,k = 72 는 e범주를 만족한다.

B 매트릭스에 한 개의 특이 열이 있다. 이러한 시도  
 에 따르면 해의 최소 개수는 1이다.(정적 부정정차수  
 =1) 그러한 해를 얻을 수 있는 e값의 범위는  
 2.707291E-05 ~ 0.418802이다. 2.707291E-05보다 작  
 은 값을 사용하면 첫번째 시도에서 해가 없을 것이고,  
 반대로 0.418802보다 큰 값을 사용하면 두번째 시도  
 에서 1개 이상의 해가 나올 것이다. 세번째 시도에서  
 자기평형응력모드를 얻을 수 있었다.

#### 4. 결론

케이블 구조물의 자기평형응력모드 결정에 대한  
 수치해석방법을 제시하였다. 일반역행열을 이용하  
 여 해를 얻기 위해 개수분해법이 도입되었으며, 계산  
 에 큰 영향을 끼치는 파라메타에 대해 알아 보았다.  
 개수분해법을 도입하는데 있어서 ε는 매우 민감하게  
 작용하고 있으며, 이것을 적절히 정해주는 것이 해를  
 구하는데 매우 중요한 역할이다.

## 감사의 글

본 연구는 건설교통부 첨단도시개발사업의 연구비 지원(#과제번호#06 R&D b03)에 의해 수행되었으며 이에 감사를 드립니다.

## 참고문헌

1. Amrita d/o Sivapatham, "Analysis of Self-equilibrium Stress Mode for Bicycle Wheel Like Structures with Eccentric Opening", Undergraduate Final Year Project Report, School of Civil Engineering, Universiti Sains Malaysia, 2004
2. Anitawati, "Determination of Self-equilibrium Stress Mode for Bicycle Wheel Like Structures using Moore-Penrose Generalized Inverse Matrix", Undergraduate Final Year Project Report, School of Civil Engineering, Universiti Sains Malaysia, 2000
3. Choong, K.K., "Self-Equilibrium Stress Mode Analysis for Cable-Dome Structures with the Use of General Inverse", Proceedings of JPZ-UKM Seminar, Bangi, Selangor, 18 August 2005
4. Choong, K.K., Kim, J.Y. and Kang, J.W., "Development of Computational Tool for Structural Investigation of Bicycle Wheel-Like Roof Structure", Proceedings of CDS05, Singapore, 25-26 August 2005
5. Choong, K.K., Tanami, T. and Yamamoto, C. (2000), "Determination of Self-Equilibrium Stress Mode for Bicycle Wheel-Like Structural Systems", Proc. of 6th Asian Pacific Conference on Shell and Spatial Structures, Vol. II, ed. Taek-Jin Kwun and Dong-Guen Lee, Seoul Korea, 16-18 October 2000, pp.826-836
6. Courrieu, C., "Fast Computation of Moore-Penrose inverse Matrices", Neural Information Processing - Letters and Reviews, August 2005, Vol.8, No.2, pp.25-29
7. Hangai, Y. and Kawaguchi, K., "Generalized Inverse and Its Application to Shape Finding Analysis", Baifukan, 1991
8. Judith, P.G. and Ibrahim, N.I., "Using Rank Factorization in Calculating the Moore-Penrose Generalized Inverse", IEEE Proc., Southeastcon, 1989, pp.427-431
9. Oda, K. and Hangai Y., "Optimal Self-equilibrium Stress in Cable Structures", Proc. of International Symposium on Spatial Structures: Heritage, Present and Future, Milano, Italy, ed. Gian Carlo Giuliani, 1995, pp.859-864
10. Stewart, G.W., "The Decompositional Approach to Matrix Computation", Computing in Science and Engineering, January/February 2000, pp.50-58