

내가 중학교 기하 영역의 교사용 지도서를 다시 쓴다면?

최 수 일 (용산고등학교)

김 동 원 (서울대학교 대학원)

이 논문은 중학교 기하 영역의 수업에 대한 학생들의 성취도가 낮은 것을 관찰하고, 그에 대한 고민으로 교육과정을 분석하고, 수학교육의 질적 접근을 위한 교수 실험을 통해 실제 중학교 과정에서 운용되는 논증기하 교육의 문제점과 그 대안을 탐색하고자 하였다. 본 연구에서는 교사가 반드시 갖춰야 할 지식으로 Shulman(1986)이 제시한 교과 내용 지식과 교수학적 내용 지식, 그리고 교육과정 관련 지식을 받아들였으며, 중학교 기하 영역에서 이런 지식을 갖추기 위해 교사가 폭넓은 고민을 하여 수업의 개선점을 찾는 과정을 보여주고 있다. 연구를 통해서 학생들에게 명제를 지도할 때 주의할 점과 학습자에게 증명을 하도록 제시하는 방법상의 문제점, 그리고 이등변삼각형의 지도에서의 그 증명이 갖는 의미를 잘 이해하여 학생들에 증명 학습에 진정한 도움이 될 수 있는 방향을 탐색하였다. 그리고 절차만을 학습시키는 현행 작도 수업을 개선하기 위한 여러 시도와 등변사다리꼴의 학습에서와 같이 학생들이 수학 용어를 되돌아보는 수업이 필요성을 탐색하여, 많은 교수 실험을 통한 교육과정의 바람직한 개정을 제안하였다.

I. 서 론

1. 연구의 필요성

우리는 실제 중학교 과정에서 운용되는 논증기하 교육의 문제점과 그 대안을 탐색해 보고자 한다. 현재 중학교 교육과정 상 2학기 과정에 편제되어 있는 기하 부분¹⁾을 살펴보면 가장 의구심을 불러 일으키는 것이 증명과 도형의 성질 사이의 관계 설정이다. 특히 <8-나> 단계에서 다뤄지는 도형의 성질과 닮음 부분은 의구심을 더욱 더 증폭시킨다. 과연 교과서에 진술된 내용을 보면, 증명 교육을 위한 도구적 성격을 지닌 기하 수업인지, 그렇지 않으면 도형의 성질을 가르치기 위한 도구로의 증명인가 하는 것이 분명하지가 않다. 교육과정 상에서는 명백히 삼각형과 사각형의 성질에 대한 학습 목표를 "삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형에 관한 간단한 성질을 증명"(교육부, 1997, p. 50)하는 것이라고 진술하고 있다. 그리고 <9-나> 단계의 피타고라스와 원의 성질 단원에 대한 학습 목표 또한 다음과 같이 기술되어 있다.

1) 국민 공통 기본 교육 과정의 수학 내용을 구성하는 6개 영역 중 <7-나>, <8-나>, <9-나> 단계에 포함된 '도형'에 해당되는 부분을 말한다.

- 피타고라스의 정리를 알고 이를 증명할 수 있다.
- 피타고라스의 정리를 간단한 도형에 활용할 수 있다.
- 원에서 현에 관한 성질을 이해한다.
- 원의 접선에 대한 성질을 이해하고, 이를 증명할 수 있다.
- 원주각의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
- 원에 내접하는 사각형의 성질을 이해할 수 있다.
- 원과 비례에 관한 성질을 이해한다.

하지만 학습 지도 시 유의사항으로 제시된 내용을 살펴보면, 다음과 같이 구체적인 지침이라고 보기 어려울 정도의 사항만 기술되어 있다.

- 도형의 성질을 증명한 후에는 구체적인 예를 통하여 확인시킨다.
- 피타고라스의 정리, 원에 내접하는 사각형의 성질, 원과 비례에 관한 성질의 증명은 간단히 다루고 활용에 중점을 둔다.
- 피타고라스의 정리의 역은 증명 없이 문제 상황을 통해 간단히 다룬다.

그리고 2007년 2월 새롭게 개정 고시된 중학교 교육과정의 경우에도 중학교 2, 3학년 과정의 단원 별 학습목표와 유의사항에 대하여 <표 1>과 같이 기술되어 있다.

그리고 교수·학습 방법으로 도형, 그리고 증명과 관련해서는 다음과 같이 제시하고 있다.

수학적 사고와 추론 능력을 발전시키기 위하여 교수·학습에서 다음 사항에 유의한다.

- (1) 귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하게 하고, 이를 정당화하거나 증명해 보게 할 수 있다.
- (2) 수학적 사실이나 명제를 분석하고, 수학적 관계를 조직하고 종합하며, 학생 자신의 사고 과정을 반성하게 한다.

수학적 의사소통 능력을 신장시키기 위하여 교수·학습에서 다음 사항에 유의한다.

- (1) 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 이해하고 정확히 사용하게 한다.
- (2) 수학적 아이디어를 말과 글로 설명하고 시각적으로 표현하여 다른 사람과 효율적으로 의사소통할 수 있게 한다.
- (3) 수학을 표현하고 토론하면서 자신의 사고를 명확히 하고 반성함으로써 의사소통이 수학을 학습하고 활용하는 데 중요함을 인식하게 한다(교육인적자원부, 2007, p. 47).

7차 교육과정과 2007년 2월 고시된 교육과정을 약식으로 비교해 보았을 때, 예를 들어, “어려운 증명의 경우에는 증명을 하기 전에 공학적 도구나 조작 활동을 통하여 증명해야 할 성질을 직관적으로 이해”하게 한다는 것을 기술할 정도로, 그 문장상의 변화만큼 작은 개선의 노력을 읽을 수 있으나, 이것이 현 실태에 대한 정확한 분석에 기반을 둔 것이라 확인할 수는 없다.

<표 1> 2007년 2월 새롭게 개정 고시된 중학교 교육과정

구분	단원별 학습 목표	교수·학습 시 유의사항
2학년	삼각형과 사각형의 성질	① $p \rightarrow q$ 는 명제를 기호로 표현하는 정도로만 다룬다. ② 삼각형의 답음조건과 합동조건을 비교하여 그 차이점을 안다. ③ <u>어려운 증명의 경우에는 증명을 하기 전에 공학적 도구나 조작 활동을 통하여 증명해야 할 성질을 직관적으로 이해하게 한다.</u>
	도형의 답음	
	답음의 활용	
3학년	피타고라스의 정리	① 피타고라스의 정리의 역은 증명 없이 문제 상황을 통해 간단히 다룬다. ② 삼각비 사이의 관계는 다루지 않는다. ③ 삼각비의 값은 0°에서 90°까지의 각도에 대한 것을 다루고, 삼각비의 그래프는 다루지 않는다. ④ 삼각비의 활용은 단순한 소재를 택하여 간단히 다룬다.
	삼각비	
	원과 직선	
	원주각	

2. 연구목적 및 연구문제

우리는 먼저 7차 교육과정 및 교과서 구성, 그리고 공시된 개정 교육과정에 대한 면밀한 검토를 통해 현재 중학교 기하수업의 실태를 1차적으로 분석하고, 이렇게 분석된 내용을 바탕으로 교과 내용을 직접 재구성하여 교수실험을 실시하고, 이에 대한 2차 분석을 통해 개선의 가능성을 탐색하고자 한다. 우리의 첫 번째 방안은 교사용 지도서가 담아야 할 내용이라는 이름으로 제안될 것이다.

교사의 수업 준비를 위한 안내의 목적으로 저술되는 교사용 지도서가 담아야 할 세 가지 요소를 꼽으라고 한다면, 다음과 같이 교육 내용 및 과정의 문제, 교사의 문제, 학생의 문제가 될 것이다.

- 교육 내용 및 교육과정에 대한 문제 - 내용의 배치 및 강조점
- 교사에 대한 문제 - 기하 교수학습에서 교사가 고려해야 할 사항들
- 학습에 대한 문제 - 기하 학습을 통해 학생들이 갖추어야 할 능력, 역량에 대한 고려

그리고 이와 같은 요소를 적절히 갖추고 있을 교사용 지도서에 교사가 원활한 수학 수업을 진행하기 위해 갖추어야 할 지식의 원천이라는 역할을 부여한다면, 결국 수학 수업을 구성해야 할 책임자인 동시에 학생들 눈에 수학의 대표자로 비춰질 수학 교사(Lampert, 1990)의 한 전형을 교사용 지도서가 담아야 한다면, 우리의 논의는 하나의 수학 교사론의 등치개념이 될 것이다. 즉, 교사용 지도서가 담아야 할 내용은 교사가 갖추어야 할 지식과 직결된다. Shulman(1986)은 교사가 갖추어야 할 지식으로, 교과와 내용과 관련된 지식을 세 가지 범주로 분류한다. 첫 번째는 내용 지식(content knowledge)이다. 이것은 교사의 수학에 대한 지식의 양과 그것이 조직화된 정도에 관한 것이다. 두 번째는 교수학적 내용 지식(pedagogical content knowledge)인데, 이것은 교수를 위한 교과 지식이라고 해석할 수 있다. 이는 학교 수학과 수학에 대한 명확한 차이의 인식에서 출발한다. 마지막으로, 교육과정과 관련된 지식(curricular knowledge)이다. 주로는 교육과정에서 제시하는 내용의 배치와 강조점에 대한 지식과 관련된다. 이렇듯 교사가 갖추어야 할 Shulman의 세 가지 범주는 교사용 지도서의 세 요소와 대응되는 것을 알 수 있다. 우리는 2년 동안 기하탐구교실 운영을 통하여 중학교 2학년의 기하 영역의 지도에 관한 여러 쟁점들을 도출하였으며, 그 쟁점들을 Shulman(1986)의 세 가지 범주와 관련시켜 교사용 지도서가 담아야 할 내용으로 제시하고자 한다.

II. 본론

1. 기하탐구교실 운영

1.1. 기하탐구교실의 운영의 목적

우리는 중학교 기하를 구성하고 있는 핵심적인 내용을 가르치는 방식에 대해 철저하게 고증을 하고, 이에 대한 분석의 결과에 근거하여 교육과정 상, 교과서 구성 상, 실제 수업 운영 상 개선방식을 제언하는 것을 그 목적으로 기하탐구교실을 운영하였다. 기하탐구교실은 중학교 기하 내용에 대한 교수학적 분석, 증명 교육의 필요성 제고, 증명 교육의 시행 방식 탐색, 증명 능력 향상을 위한 수업 환경의 조성에 대한 답을 찾을 목적으로 수행되었다.

1.2. 기하탐구교실 세부 운영 절차

우리는 2006년 5월부터 참여 학생들이 고등학교에 진학을 하게 된 2008년 2월말까지 서울 시내 세 개의 중학교에서 2학년 학생을 모집하여 기하탐구교실을 개설 운영해왔다. 예비 수업을 한 학기 진행 한 후, 10월 중순부터 본 수업을 진행하였다. 우리는 처음 기하탐구교실을 운영하기 위해 학생들을 모집하고 학부모와 학생들을 대상으로 설명회를 개최하였다. ‘중학교 논증기하 교육과정의 개정 방안 연구’라는 제목을 달고, 수업에 대한 면밀한 관찰을 통해 학생들이 기하를 인식하는 과정을 확인하고, 새로운 교육의 방법을 모색하고, 이를 바탕으로 교육과정 개정 방안의 수립을 궁극적 목적으로 하는 연구라고 설명했다. 그리고 학부모와 학생들을 동시에 대상으로 한 설명회임을 감안하여, 학생들이 기하탐구교실에 참여할 때 이점이 될 만한 부분들을 설명 내용에 포함시켰다. 수학에 대한 개념을 명확히 가지게 될 것이며, 기하에 대한 학습 효과를 볼 것이고, 수학적 개념에 대한 설명과 정당화 능력이 향상될 것이라는 기대감을 심어주었다. 수업 방법도 개인별 학습 후 조별 토론 과정을 거치고, 다시 전체 토론으로 이어진 다음 정리하는 과정으로 전개될 것이라고 예고했다. 수업 내용의 구성은 수학의 중요한 내용, 1학년 기하 복습, 2학년 이후의 기하에 대한 학습의 세 가지 요소로 구성되며, 준비물(개별 노트 + 클리어 파일)도 별도로 공지했다. 의무사항으로 제시한 것은 학생들은 수업에 적극적으로 참여하여 활발하게 토론하고 발표해야 하고, 무단으로 수업에 빠지는 것을 허용하지 않는다는 것, 과제는 지정된 기한 내에 반드시 제출할 것 등이다. 이어서 향후 수업 일정을 발표한 다음, 학생들에게는 [나의 수학 신상 기록], [학생 동의서]를, 학부모들에게는 [학부모의 수학 신상 기록], [학부모 동의서]를 작성해 주십사 부탁을 드렸다. 학생들이 작성한 [나의 수학 신상 기록]에는 학교에서의 수학 성적, 초등학교 수학과 중학교 수학의 관계에 대한 자신의 생각, 수학이라는 과목과 자신의 적성과의 관계, 학교 수업을 제외한 자신의 생활 일정, 수학을 잘하는 비결에 대한 생각 등이 요소로 포함되어 있다. [부모님의 수학 신상 기록]은 자신의 학생이 수학적 재능이 있는지에 대한 판단, 학창 시절 가졌던 수학에 대한 생각, 학생의 적성과 수학의 관계, 학생이 수학을 잘하기 위한 공부 방법, 학생이 기하탐구교실에 참여하는 것을 허락한 심정 등으로 이루어졌다. 그리고 학생 동의서 및 학부모 동의서를 통해 기하탐구교실에서 이뤄지는 수업의 모든 과정을 여러 장비를 이용하여 녹화하여 순수한 연구 목적으로 사용하는 것에 대하여 동의를 구하였다.

설명회가 끝난 다음 주부터 계획대로 수업을 시작하였다. 수업을 진행한 교사는 참여관찰자들에게 적극적 참여를 다음과 같이 요청함으로써, 관찰자의 위치를 규정해 주었다.

관찰자가 수업 중 학생에게 또는 교사에게 질문이나 어떤 요구를 할 수 있다. 수업 끝나고 인터뷰하는 것도 좋겠지만 그때그때 의문 나거나 퍼뜩 떠오르면 즉시 수업에 개입하여 적극적으로 질문을 하고 수업이 윤택하도록 도와주길 바랍니다. - 교사가 연구팀 게시판에 작성한 글 中

처음에는 16명으로 시작하여, 4명씩 4개조로 조별 수업을 실시하였다. 한편 인원이 개편된 9월부터는 2개조로 수업을 실시하였다. 모든 수업을 캠코더 3대를 이용하여 녹화하였으며, 2대는 고정, 1

대는 이동식으로 녹화하였다. 녹화된 비디오는 동영상 파일로 변환하여 분석 시 활용하였으며, 원본 테이프는 별도로 보관하고 있다. 수업은 학생들이 중학교를 졸업하는 2008년 2월말까지 지속되었으며, 그때까지의 모든 수업 또한 지금과 동일한 방식으로 녹화되었다. 한편 모든 비디오는 전사되어 분석의 기초자료로 활용되었으며, 학생들의 활동지, 과제, 학습일기도 수합하여 원본은 보관한 채 복사본과 스캐너를 활용하여 작성한 PDF 문서를 통해 전사 자료와 더불어 분석 자료로 활용하였다.

2. 연구 결과

우리는 지난 2년 동안 기하탐구교실 운영을 통하여 중학교 2학년의 기하 영역의 지도에 관한 다음과 같은 쟁점들을 도출할 수 있었다. 그리고 그 쟁점들을 Shulman(1986)의 세 가지 범주와 관련시켜보면 <표 2>와 같다. 구체적인 논의는 이들 중 + 표시된 6가지의 쟁점들에 대해서만 제시 하였다.

2.1. 명제를 가정과 결론으로 구분하기²⁾

<표 2> 발생한 쟁점

주 제	세부 쟁점	Shulman의 범주
명제와 증명	+명제를 가정과 결론으로 구분하기 · 증명의 뜻과 실행 +증명 문제를 제안하는 방식 · 학생들을 증명 과정에 참여시키는 방식	· 교수학적 내용 지식 · 교수학적 내용 지식 · 교수학적 내용 지식 · 교수학적 내용 지식
이등변삼각형	+이등변삼각형의 용어들 · 문장으로 주어진 명제의 기호화 +이등변삼각형과 보조선의 지도	· 교육과정 지식 · 교수학적 내용 지식 · 교과 내용 지식
작도와 증명	+작도와 합동의 지도 순서 · 작도와 증명의 연결	· 교과 내용 지식 · 교육과정 지식
삼각형의 오심	· 삼각형의 외심, 내심, 무게중심의 증명법	· 교과 내용 지식
사각형	· 도입의 순서 · 사다리꼴의 성질 발견하기 +등변사다리꼴의 정의	· 교과 내용 지식 · 교수학적 내용 지식 · 교육과정 지식

모든 명제는 가정과 결론으로 구분할 수 있다. 도형에 관한 명제를 증명할 경우 주어진 명제를 가정과 결론으로 나누고 가정과 그에 관련된 정의(定義), 정리(定理), 성질을 이용하여 결론을 이끌어

2) 중학교 수준에서는 한정사(모든, 어떤)에 대한 고민까지는 무리겠지만, 고등학교 수준에서는 한정사에 대해서도 명확하게 지도되어야 한다.

내면 된다.³⁾ 그런데 교과서에 주어진 명제는 『 p 이면 q 이다』의 꼴로 쓰인 것이 거의 없어서 학생들이 가정과 결론을 명확하게 구분하기가 어려운 것이 많다. 그래서 이것이 증명을 어렵게 하는 원인이기도 하다. 가정과 결론을 구분해야 하는 것은 증명을 하는 과정에서 가정은 이용해도 되지만, 결론을 이용해서는 안 되기 때문이다.

2.2. 증명 문제를 제안하는 방식(성질을 발견하도록 하는 교수법)

전통적인 논증기하 교육 방식은 미리 정선된 수많은 정리와 증명을 암기하는 것으로 일관하고 있기 때문에 논증기하가 증명을 통한 비판적·반성적 사고의 개발이라는 본래의 목적 달성을 의심스럽게 한다. 중학교 학생들은 대부분 본인의 능력과 관심에 관계없이, 국가 수준의 교육과정에 의해 선택된 수십 개의 정리들을 배우도록 되어 있다. 기하학적인 도형에 대하여 어떤 성질은 가정되어 있고, 학생들은 이미 결정된 도형의 성질을 논리적 증명으로 입증해야 한다.

학생들은 교과서에 제시된 여러 가지 도형의 성질들을 논리 연역적 전개 순서에 따라 증명 했어도 그 중 많은 것이 기억 속에 남아있지 않고 사라져 버린다. 그것은 그러한 성질들을 학생 스스로 발견한 것이 아니고 이미 교과서에 제시되어 있어서 학생들로 하여금 증명하도록 강요되었기 때문이다. 이런 방법으로는 수학적 성질에 관한 학생들의 발견 감각을 키우기 어렵고, 학생들의 사고 방향을 고정시켜줄 우려가 있다. 그러므로 발견 감각을 키우고, 학생들의 사고를 자극하기 위해서는 증명해야 할 수학적 사실을 미리 제시하지 않는 것이 좋다. 이것은 구성주의 철학에서 요구하는 안내자로서의 교사의 역할, 그리고 능동적 창조자(active creator)로서의 학생의 역할이 함께 아우러지는 방식이다.

구체적인 방법으로는 결론을 비워두고, 주어진 가정으로부터 다양한 결론을 도출하게 하는 방법을 생각할 수 있다. 이것은 가정만 주고서 결론을 학생 스스로 추측하고, 그 추측된 사실을 증명하게 하는 것이다. 이 방법을 사용하면 우리가 기대하고 있는 결론이 나오지 않을 가능성도 있지만, 그 동안 전형적으로 가르쳐온 수학적 사실 외에도 다양한 결론이 도출될 수 있는 장점이 있다. 그리고 그 결론은 학생의 사고와 동떨어진 것이 아니라 그들의 생각 속에서 나온 것이므로 시간이 지나더라도 동일한 추측이 가능하기 때문에 학습 효과는 전형적인 방법보다 좋을 것으로 기대된다. 만일 꼭 학습해야 하는 결론이 나오지 않을 때는 교사가 수업을 그쪽으로 유도해서 진행하면 본래의 목적은 얼마든지 달성할 수 있다.

2.3. 이등변삼각형의 용어들

이등변삼각형에는 스스로만이 가지는 여러 가지 용어들이 있다. 이들은 다른 도형에서 거의 사용되지 않는 독특한 성격을 가지고 있다. 길이가 같은 두 변이 이루는 각을 꼭지각이라 하고, 꼭지각의 대변을 밑변이라 하며, 밑변의 양 끝각을 밑각이라 한다. 그러므로 이등변삼각형과 그 성질을 정확하

3) 강행고 외 8인(2001). 중학교 수학 <8-나>. 중앙교육진흥연구소, p. 44

게 이해하기 위해서는 이등변삼각형이 포함하고 있는 용어들의 뜻을 정확히 알아야 한다.

2.4. 이등변삼각형과 보조선의 지도

삼각형의 성질이 시작되면서 본격적으로 증명 지도가 전개된다. 그리고 이때 이등변삼각형의 성질이 대두된다. 왜 증명 지도를 이등변삼각형으로 시작할까? 이등변삼각형의 성질을 증명하자면 두 삼각형의 합동조건을 사용해야 하는데, 이등변삼각형은 단지 한 개의 삼각형일 뿐이라서 선뜻 두 삼각형이 보이지 않는다. 그래서 반드시 보조선을 그어 삼각형을 두 개로 만들어야 하는 복잡함이 수반되는데 왜 처음부터 이런 어려운 작업을 해야 하는 이등변삼각형이 주어져야만 하는 것일까? 증명 지도의 첫 소재로 이등변삼각형의 지도가 갖는 의미를 살펴보면 다음과 같다.

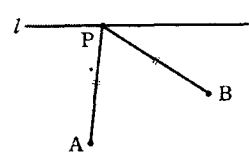
그것은 첫째로 삼각형의 성질에서 가장 기본이 되는 성질이 있다면 그것은 분명히 이등변삼각형의 성질이라는 점이다. 이등변삼각형의 성질은 직각삼각형의 합동조건을 찾아내는데 이용되며, 이것은 삼각형의 내심과 외심의 학습으로 연결된다.

또한 둘째로 이등변삼각형을 증명하는 방식 자체가 여러 가지라는 점이다. 모든 교과서가 지면의 제약으로 단 한 가지의 방법으로만 증명하고 있지만 실제로는 다양한 방법으로 증명이 가능하며, 보조선을 긋는 과정에서 여러 가지 시행착오를 경험하는 기회도 제공할 수 있다는 점에서 이등변삼각형의 바람직한 지도 방안을 찾을 수 있다.

2.5. 작도와 합동의 지도 순서

중학교 1학년 수업을 관찰하던 중 교과서 연습 문제를 다 같이 해결하는 시간에 특정한 한 문제를 학생들이 아무도 해결하지 못하고 만 일이 벌어졌다. 그것은 바로 다음 문제4)였다.

1 오른쪽 그림에서 두 점 A, B는 직선 l 위에 있지 않고 점 P는 직선 l 위에 있다. 이 때, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 인 점 P를 작도하는 방법을 설명하여라.



<그림 1> 선분의 수직이등분선의 성질의 적용

이 문제를 학생들이 잘 해결하지 못하자 교사는 그래도 기하 시간에, 특히 작도에 대해서 아주 탁월한 발표력을 보였고, 능력이 충분하다고 생각되는 학생을 지명하여 풀도록 하기까지 했으나 그 학생마저도 교사의 기대를 저버리고 말았다. 그 학생은 그 전 시간까지 작도에 대해서는 완벽하게 이

4) 배종수 외 7인(2000). 중학교 수학 7-나. 한성교육연구소, p. 81.

해하고 있었다고 생각할 정도의 대단한 학생이었다. 관찰 기록을 보면 작도 수업을 마친 그 다음 시간 교사가 복습을 통해 작도 과정을 반복 학습할 때, 수업을 하는 교사는 물론 뒤에서 보고 있던 관찰자들마저도 놀랄 정도로 확실한 발언을 하였다. 그 학생은 선분의 수직이등분선의 작도에 대하여 다음과 같이 말하였다.

“컴퍼스로 주어진 선분의 양 끝점에서 크기가 선분의 절반보다 약간 큰 길이의 원을 각각 그린 다음 생기는 두 교점을 자로 이으면 됩니다.”

이런 학생이 위 문제를 해결하지 못하고 설명하지 못하는 것을 볼 때 이해할 수가 없었다. 고민이 시작되었다. 관찰자들의 토론 속에서 나온 결론은 작도 교육이 작도 절차만 가르치고 있어서 작도 결과에 대하여 확실하게 확인할 길이 없기 때문에 벌어진 결과일 거라는 추측이었다.

2.6. 등변사다리꼴의 정의

등변사다리꼴의 정의는 『아랫변의 양 끝각의 크기가 같은 사다리꼴』로 되어 있다. 실제로 기하 탐구반 수업에서는 『평행하지 않은 두 변의 길이가 같은 사다리꼴』을 강력하게 주장하는 학생들이 있었는데, 그들의 주장의 근거는 이름이 변으로 규정되었기 때문에 변에 관한 조건을 주어야 한다는 것이었다. ‘평행하지 않은’이라는 조건을 붙인 이유는 평행사변형을 배제하기 위한 배려라고 볼 수 있다. 하지만 변으로 정의하면 직사각형이 등변사다리꼴이 될 수가 없는 모순이 나온다. 따라서 등변사다리꼴은 각으로 정의하는 것이 안전하다고 할 수 있다.

III. 결론 및 논의

수학이라는 과목이 학생 개개인에게 도움이 되지 않는다는 인식을 주면 학생들은 수학을 배울 의욕을 가지지 않을 것이다. 학생들이 수학을 계속 배우고 싶은 마음을 갖게 하지 못한다면 수학이라는 교과는 설 자리를 잃을 것이다. 그런 의미에서 수학 교육의 질적 접근이 더욱 절실하게 요청된다. 그동안 수학 교육에 대한 질적 접근을 시도한 교수 실험이 없이 계속되어온 교육과정 개정으로 교육 내용의 변화는 있었지만, 교수·학습에서 교사가 고려해야 할 사항이나 학생들의 학습 과정에 대한 고려가 부족하였다. 이런 의미에서 2년 동안의 교수 실험을 통한 중학교 2학년의 기하 영역의 지도에 대한 본 연구의 결과는 중요한 시사점을 가진다고 할 수 있다. 논의된 쟁점들을 중심으로 정리하면 다음과 같은 결론을 제시할 수 있다.

첫째, 명제를 지도할 때 명제를 반드시 가정과 결론으로 구분하도록 하되, 처음에는 가정과 결론이 명확히 구분된 명제만 주고서 지도한 이후에 보통의 명제를 가정과 결론으로 구분하는 연습을 통하

여 학생들로 하여금 보통의 명제에 서서히 익숙할 수 있도록 배려해야 한다.

둘째, 이미 정해진 도형의 성질을 주고 아무런 의미에 대한 이해가 없이 증명하도록 하는 것보다는 학습자 스스로 결론을 추측하도록 하는 과정을 거쳐서 그 추측된 결과를 증명하도록 하는 절차를 수행하는 것이 학생들에게 증명의 진정한 의미를 이해시킬 수 있다.

셋째, 이등변삼각형은 그 용어들이 특이하므로 용어에 대하여 정확한 이해를 시킨 이후에 여러 성질들을 가르치는 것이 필요하며, 다양한 그림을 제시하여 이등변삼각형에 대한 고정 관념이 깨지는 경험을 하게 하는 것이 중요하다.

넷째, 이등변삼각형의 성질에 대한 증명이 갖는 의미를 잘 이해하여, 학생들에 증명 학습에 진정한 도움이 될 수 있는 고민이 필요하다. 특히 보조선을 다양하게 긋는 시도를 통하여 사고의 유연화 및 증명의 다양성을 학습시킬 수 있는 기회를 꼭 가져야 한다.

다섯째, 절차만을 학습시키는 현행 작도 수업을 개선하기 위한 여러 시도가 필요하다. 한 가지 방안으로는 합동을 공리적으로 먼저 가르치고, 이를 통하여 작도 결과를 증명 또는 확인하는 학습을 하도록 하면 작도에 대한 응용력이 더욱 높아질 것이다.

여섯째, 등변사다리꼴의 학습에서와 같이 학생들이 수학 용어를 주어진 대로 받아들이는 것에서 그 정의를 반성하고 되돌아보는 수업이 필요하다. 이런 수업은 수학 용어가 갖는 전반적인 의미를 이해할 수 있으며, 수학 용어가 학생들에게 주는 오개념의 문제를 해결할 수 있는 방안이기도 하다.

바라건대 앞으로의 교육과정 개정에 있어서 이와 같은 교수 실험을 통한 연구 결과를 개정에 반영하는 소극적인 방법뿐만 아니라, 국가적인 차원에서 교육과정의 바람직한 개정을 위한 교수 실험이 계속되었으면 한다.

참 고 문 헌

현행 7차 교육과정의 중학교 16종 교과서.

교육부 (1997). 수학과 교육 과정(교육부 고시 제1997-15호 별책8). 대한교과서주식회사.

교육인적자원부 (2007). 수학과 교육 과정(교육부 고시 제2007-79호 별책8). 대한교과서주식회사.

교육인적자원부 (2007). 수학·과학 교과서 편수자료집. 교육인적자원부.

권석일 (2006). 중학교 기하 교재의 '원론' 교육적 고찰. 서울대학교 대학원 교육학 박사학위논문.

김용욱 (2006). 7차 교육과정에 제시된 수학 용어에 대한 개선방안 탐색. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

나귀수 (1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석. 서울대학교 대학원 교육학 박사학위논문.

나미영 (2006). 풍부한 발표환경에서 상호작용에 관한 반성적 실험연구. 서울대학교 대학원 석사논문.

서동엽 (1999). 증명의 구성요소 분석 및 학습-지도 방향탐색-중학교 수학을 중심으로. 서울대학교

대학원 교육학 박사학위논문.

- 전광숙 (2004). 학교 수학 용어 지도의 쟁점과 학습 지도 방향: 사다리꼴을 소재로 하여. 전남대학교 교육대학원 교육학석사학위논문.
- 조승제 (2005). 제7회 Math Festival 전체강연. (사)수학사랑.
- 조영달 (2001). 한국 중등학교 교실수업의 이해. 서울: 교육과학사.
- 최원숙 (2007). 증명 수업에서 나타난 학생들의 침묵과 교사의 선택 : 8-나 삼각형과 사각형 성질에 대한 증명을 중심으로. 서울대학교 대학원 석사논문.
- A. C. Clairaut (1765). 장혜원 역 (2005). 클레로의 기하학 원론. 경문사.
- Ball, D. L; Hoyles, C.; Jahnke, H. N. & Movshovitz-Hadar, N. (2002). *The teaching of proof*. Paper presented at the ICM 2002.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Hanna, G. & Jahnke, H.N. (1996). Proof and proving, in A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp 877.908.
- Harel, G. & Soweder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory students. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education (Vol. 3, pp. 234-283)*: American Mathematical Society.
- Harold P. Fawcett. (1935). *The Nature of Proof*. Reston: NCTM. 장경운 · 류현아 · 한세호 역.(2006). 증명의 본질. 서울: 경문사.
- James E. Elander. (1992). *Geometry for Decision Making*. South-Western Publishing Co. Cincinnati, Ohio.
- James Hiebert et al. (1997). *Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Heinemann. 김수환 외 3인 역. (2004). 어떻게 이해하지? 수학교실 연구시리즈 1. 경문사.
- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27, 29-63.
- Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 41(1), 47-68.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*.
- Ray C. Jurgensen et al. (2004). *Geometry*. Houghton Mifflin Co. Evanston, Illinois.
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand : Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

- Thomas L. Heath translate with introduction and commentary(1925). *The Thirteen Books of Euclid's Elements Vol.1-3*. Dover Publications, Inc. New York.
- Thomas L. Heath translate with introduction and commentary(1925). *The Thirteen Books of Euclid's Elements Vol.1-3*. Dover Publications, Inc. New York. 이무현 역(1997). 기하학원론 해설서 바-자. 교우사.
- Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument* (Updated Edition ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- Wan Kang, (1990). *Didactic Transposition of Mathematical Knowledge in Text Books. Ph. D. Dissertation*. The University of Georgia Graduate College.