

변형된 창함수의 성능향상에 관한 연구

이 경 효* · 김 남 호*

*부경대학교 공과대학 전기제어공학부

A Study on Performance Improvement of Modified Window Function

Kyung-Hyo Lee* · Nam-Ho Kim*

*School of Electrical and Control Eng., Pukyong National Univ.

E-mail : nhk@pknu.ac.kr

요 약

현대 사회의 정보처리 기술은 디지털 기술을 기반으로 하여 빠르게 성장하고 있다. 이러한 디지털 처리 기술은 신호를-음성 및 영상처리- 전달하고 해석하는 과정에서 다양한 방법을 사용하여 신호를 획득, 저장 하고 있다. 효과적인 신호처리를 위해 다양한 필터가 사용되고 있으며 대표적인 디지털 필터로써는 FIR 필터 와 IIR 필터가 있다. 디지털 FIR 필터는 IIR 필터에 비해 안정적이며, 선형위상 응답특성을 갖고 있다. 하지만, 디지털 FIR 필터의 불연속 구간에서의 깁스현상이 발생하는 문제점을 가지며 이것을 극복하는 것이 주요한 관건이라 하겠다. 따라서 본 논문에서는 창함수를 이용한 FIR 필터를 제시하였으며, 기존에 사용한 창 함수와 비교를 통하여 성능의 우수함을 나타내었다.

ABSTRACT

With basis of the development of information communication techniques in recent year, the digital processing techniquy also has been grewed fast. The digital processing technique have used signals - speech and image processing- for processing of transmission and analysis. After we get and save the signals. Effective signal processing techniques have varied filters and typical digital filters are FIR filter and IIR filter. The FIR digital filter is more secure because phase response characteristics have linear phase. But, FIR digital filters have a problem to product the Gibbs phenomenon generating around a discontinuous point. A propose of filer is to remove the problem. Therefore, in this paper I was proposed a method using FIR digital filter applied a modified window function and the method was compared with conventional methods.

키워드

signal processing, FIR digital filter, Gibbs phenomenon, window function

1. 서 론

현대 사회의 정보처리 기술은 디지털 기술을 기반으로 하여 빠르게 성장하고 있다. 이러한 디지털 처리기술은 신호를-음성 및 영상처리- 전달하고 해석하는 과정에서 다양한 방법을 사용하여 신호를 획득, 저장 하고 있다. 효과적인 신호처리를 위해 다양한 필터가 사용되고 있으며 대표적인 디지털 필터로써는 FIR (finite impulse response) 필터와 IIR (infinite impulse response) 필터로 나누어진다[1].

무한구간 임펄스 응답을 나타내는 IIR 필터는 동일한 진폭 특성을 얻기 위해, FIR 필터보다 낮

은 차수를 필요로 하지만, 비선형위상응답 특성을 나타내며, 이에 안정성을 보장할 수 없다. 반면에, FIR 필터는 IIR 필터보다 높은 차수로써 구현되는 단점이 있으나, 안정적이며 구현하기에 용이하다는 장점을 가진다. 또한 선형위상응답 특성을 나타내므로, 파형 정보 특성이 중요시되는 분야에 사용되고 있다.

FIR 필터는 계수절단에 의해 불연속점에서 발생하는 깁스현상 (Gibbs phenomenon)이 발생하는 문제점을 가진다. 이를 개선하는 것이 주요 관건이다. 다양한 FIR 필터 설계법에는 창함수 설계 기법, 주파수 샘플링 기법, 최적 등리플 기법등이 있지만, 창함수 설계 기법은 이상적인 필터의 무

한 임펄스 응답을 유한 임펄스 응답으로 근사화 하는 가장 간단한 방법으로서, 깃스현상을 감소시킨다.

따라서, 본 논문에서는 창함수를 이용한 FIR 필터를 제시하였으며, 기존의 사용한 창함수와 비교를 통하여 성능의 우수함을 나타내었다.

II. FIR 디지털 필터

선형시불변시스템에서 FIR 필터의 시스템 함수는 일반적으로 식 (1)과 같이 정의한다[2].

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{1-M} \quad (1)$$

$$= \sum_{n=0}^{M-1} b_n z^{-n}$$

그리고 임펄스 응답 $h(n)$ 은 식 (2)와 같이 표현되며, 이에 따르는 차분방정식 표현은 식 (3)와 같이 표현된다.

$$h(n) = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_{M-1} x(n-M+1) \quad (3)$$

디지털 필터는 주파수 선택적 연산을 실행할 수 있기 때문에 다양한 분야에 응용되고 있다. 사용되는 필터는 필터의 크기와 위상 응답과 같은 주파수 영역에서의 사양이 요구되며, 통과대역에서는 선형위상응답 특성을 가져야 한다.

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \angle H(e^{j\omega}) \quad (4)$$

식 (4)는 시스템의 주파수 응답 $H(e^{j\omega})$ 를 나타내고 있으며, 이는 크기응답 $|H(e^{j\omega})|$ 와 위상응답 $\angle H(e^{j\omega})$ 으로 나누어진다. FIR 디지털 필터가 선형 위상응답 특성을 갖기 위해서는 식 (5)과 같이, $\angle H(e^{j\omega})$ 가 ω 에 대해서 선형인 조건이 필요하다.

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\tau_p \omega, \quad -\pi < \omega \leq \pi \quad (5)$$

이 때, τ_p 가 고정 위상 지연이 되기 위해서는 임펄스 응답 $h(n)$ 이 시간 축 상의 중심에 대해 우대칭이어야 한다. 이를 나타내면 식 (6)과 같이 정리된다.

$$h(n) = h(M-1-n), \quad 0 \leq n \leq M-1 \quad (6)$$

또한, 원점을 지나지 않은 직선의 경우를 식 (7)과

같이 나타내며,

$$\angle H(e^{j\omega}) = \beta - \tau_g \omega, \quad -\pi < \omega \leq \pi \quad (7)$$

τ_p 가 일정한 군지연 특성을 갖기 위해서는 식 (8)와 같은 조건이 만족되어야 한다.

$$\frac{d \angle H(e^{j\omega})}{d\omega} = -\tau_g, \quad -\pi < \omega \leq \pi \quad (8)$$

그러므로 τ_g 는 고정 군지연이 되며, 이 경우 주파수들이 하나의 무리코써 일한 비율로 지연된다. 이러한 형태의 선형위상응답 특성을 식으로 표현하면 식 (9)과 같이 나타내며, 이는 기대칭이다.

$$h(n) = -h(M-1-n), \quad 0 \leq n \leq M-1 \quad (9)$$

두 경우에서 보는 것과 같이, $h(n)$ 는 모든 경우에 대해서 동일한 대칭 지수 $(M-1)/2$ 을 갖는다.

III. 창함수 설계법 이용한 FIR 필터

통과대역에서의 이득의 크기가 1이며, 선형위상 응답 특성을 갖고, 저지대역에서의 응답 0인 필터의 값을 얻는 경우, 이러한 필터를 이상적인 주파수 선택적 필터이라 한다.

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\omega\gamma}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (10)$$

이 필터에서, 대역폭이 $\omega_c < \pi$ 인 이상적 저역통과 필터는 식 (10)과 같이 표현되며, γ 는 표본 지연을 ω_c 는 차단주파수를 나타낸다. 이와 같이 표현되는 필터는 식 (11)와 같이 무한 임펄스 응답으로 구성되어 있다.

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (11)$$

$$= \frac{\sin[\omega_c(n-\gamma)]}{\pi(n-\gamma)}$$

따라서, 인과성을 만족시키는 유한차수의 임펄스 응답을 얻기 위해, 필터 계수에 대한 절단이 필요하다.

$$h_w(n) = h_d(n) w(n) \quad (12)$$

그러나 이러한 계수 절단에 의해, 주파수 특성상 불연속점 부근에서 깃스현상이 발생한다. 이와 같은

깁스현상은 창함수 $w(n)$ 을 적용하여 완화할 수 있으며, 창함수 연산이 수행된 후의 임펄스 응답 $h_w(n)$ 을 식 (12)과 같이 정의한다[3].

$$H_w(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \otimes W(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\phi}) H(e^{j(\omega-\phi)}) d\phi \quad (13)$$

그리고 주파수 영역에서 인과적 FIR 디지털 필터의 응답 $H_w(e^{j\omega})$ 는 식 (14)와 같이, 이상적인 필터의 주파수 응답 $H_d(e^{j\omega})$ 와 창함수의 주파수 응답 $W(e^{j\omega})$ 의 주기적 컨벌루션으로 표현된다.

위의 식 (13)에 상응하는 FIR 디지털 필터의 전달함수는 식 (14)와 같이, $w(n)$ 과 $h(n)$ 의 곱으로부터 얻어진다.

$$H_w(z) = \sum_{n=0}^M (h_d(n) w(n)) z^{-n} \quad (14)$$

또한 영상처리를 위해, 필터의 전달함수는 식 (15)과 같이 2차원으로 확장된다.

$$H_w(z_u, z_v)$$

$$= \sum_{u=0}^M (h(u) w(u)) z^{-u} \sum_{v=0}^N (h(v) w(v)) z^{-v} \quad (15)$$

제한한 창함수의 비교를 위해 사용되는 함수는 기존의 창함수들로서, 다음과 같이 식 (16)~(18)로 정의한다.

$$w_{hn}(n) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & -\frac{M}{2} \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

$$w_{hm}(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & -\frac{M}{2} \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (17)$$

$$w_{bl}(n) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right), & -\frac{M}{2} \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18)$$

제시한 함수는 각 순서에 맞게 Hanning window, Hamming window, Blackman window를 나타낸다.

본 논문에서는 아래에 최대부엽의 크기를 최소화 하며 최대부엽의 크기가 작은 형태의 창함수 모델을

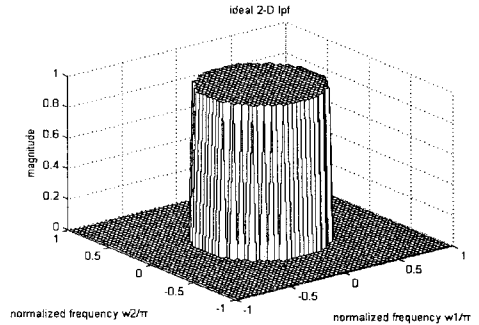
식 (19), (20)으로 제안하였다.

$$w_{p1}[n] = \begin{cases} 0.586 + 0.428 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) - 0.021 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right) \\ + 0.007 \cos\left(\frac{6\pi n}{M}\right), & -\frac{M}{2} \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19)$$

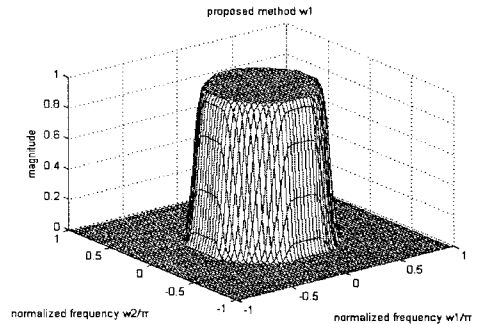
$$w_{p2}[n] = \begin{cases} 0.589 + 0.426 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) - 0.023 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right) \\ + 0.008 \cos\left(\frac{6\pi n}{M}\right), & -\frac{M}{2} \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (20)$$

IV. simulation & result

본 논문에서는 제안한 함수는 FIR 디지털 필터의 성능 향상을 위해 창함수를 이용하여 설계하였으며, 이를 비교하기 위해 기존의 창함수와 비교하였다.



(a) Ideal filter

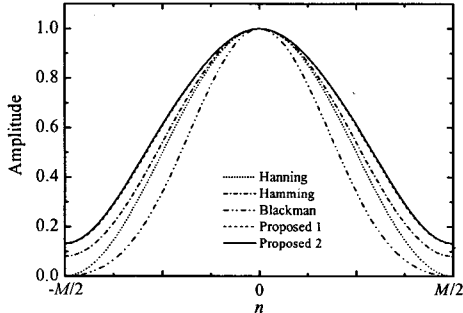


(b) Proposed filter w_{p1}

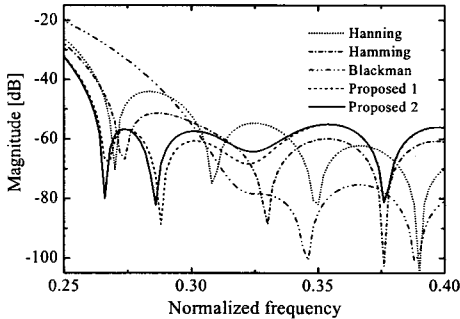
Fig. 1. 2D Modeling of Filter. $\omega_c=0.5$.

그림 1 (a),(b)은 이상적인 창함수 모델과 제안된 창함수의 모델로써 2차적 저역필터 특성을 시

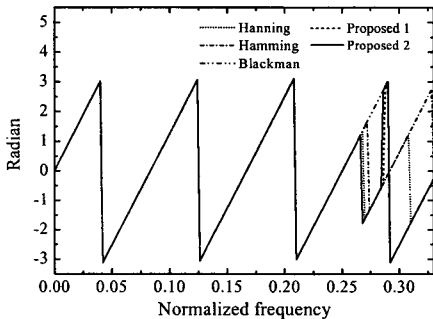
플레이션 한 것이며, 이 때 사용되는 차단 주파수 ω_c 는 0.5로 적용하여 나타내었다.



(a) Profiles of each window function.



(b) Peak side-lobe characteristics.



(c) Phase delay.

Fig. 2. Lowpass filter designed by each window function. $\omega_c=0.2$.

또한, 본 논문에서는 창함수의 특성을 비교하기 위해, 차수 $M=48$ 과 차단주파수 $\omega_c=0.2$ 일 때의 저역통과필터를 설계하여 주파수특성을 시뮬레이션하였다. 그림 2(a)는 최대부역의 크기 특성과 천이대역폭의 특성을 보다 알기 쉽게 특정 부분을 확대하여 나타낸 것이며, 그림 2(b)는 이러한 필터들이 통과대역 내에서 선형적 위상 특

성을 나타내고 있는 것을 보여준다.

제안한 창함수는 기존의 창함수보다 나은 결과를 얻을 수 있었으며, 이를 표 1로써 정리하였다.

표에 나타난 ps 는 저지대역에서 가장 큰 크기를 나타내는 최대부역을, ΔF 는 -3 [dB]인 주파수로부터, 천이대역 상에서 ps 와 동일한 크기를 갖는 주파수까지의 폭을 나타낸다.

기존의 방법들에서 ΔF 는 Hanning window, ps 특성은 Blackman window가 우수한 결과를 보였으나, 이러한 두 창함수는 서로 다른 특성에서 미흡한 결과를 보였다. 이에 반해, Hamming window는 ΔF 와 ps 특성모두 완만함을 나타내었다. 그러나 본 논문에서 제안한 두 종류의 창함수 모델에 의한 결과는 기존의 창함수에 의한 결과보다 우수한 특성을 나타내었으며, 특히 ps 에서는 Proposed 1, ΔF 에서는 Proposed 2가 더욱 개선된 결과를 나타내었다.

Table 1. Characteristics of each window function.

	Hanning	Hamming	Blackman	Proposed 1	Proposed 2
ps [dB]	44.0238	51.3234	75.3684	55.123	55.023
ΔF	0.0831	0.0856	0.1383	0.0791	0.0785

V. 결 론

본 논문에서는 FIR 디지털 필터의 천이대역폭 (ΔF)과 최대부역(ps)특성을 보다 향상시키기 위해, 새로운 창함수 모델을 제안하였다.

시뮬레이션의 결과는 기존의 창함수 모델과 비교하였으며, 시뮬레이션 결과로써 본 논문에서 제안한 두 가지 창함수 모델이 기존의 창함수 모델보다 더 나은 필터특성을 나타내었다. 제안한 두 가지 모델은 각기 천이대역폭(ΔF)과 최대부역(ps [dB])특성에 특성화되어 있으며, FIR 디지털 필터가 사용되는 각종 통신 및 방송 등 분야에 유용하게 적용되리라 사료된다.

참 고 문 헌

- [1] A. Peled and B. Liu, Digital Signal Processing, John Wiley & Sons, 1976.
- [2] V. K. Ingle and J. G. Proakis, Digital Signal Processing Using MATLAB, PWS Publishing Company, 1998.
- [3] T. Saramaki, "A class of window functions with nearly minimum sidelobe energy for designing FIR filters", IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems, vol. 1, pp. 359-362, May 1989.