

## 고속월쉬변환에 의한 비선형계의 적응형 최적제어

유영식, 임윤식

여주대학 전기과, 방송영상제작과

### Adaptive Optimal Control of Nonlinear Systems via Fast Walsh Transform

Yoo, Youngsik, Lim, Yunsik

Yeju Institute of Technology Dept. of Electrical engineering, Dept of Broadcasting Production

**Abstract** - This paper presents the new adaptive optimal scheme for the nonlinear systems, which is based on the Picard's iterative approximation and Fast Walsh transform.

It is well known that the Walsh function approach method is very difficult to apply for the analysis and optimal control of nonlinear systems. However, these problems can be easily solved by the improvement of the previous adaptive optimal scheme. The proposed method is easily applicable to the analysis and optimal control of nonlinear systems.

#### 1. 서 론

최근 비행체의 항해, 유도 및 레이더 추적 등과 같은 비선형계에 관한 많은 연구가 진행되고 있다. 이러한 비선형계의 제어 시스템 설계에 관한 연구는 주로 선형화 과정을 통해 기존의 선형제어이론을 응용하는 방식으로 진행되어 왔다. Matuszewski는 비선형계의 최적제어를 위해 적용최적계획법(adaptive optimal scheme)을 제시한 바 있는데[1], 이 방법은 비선형계를 Pearson이 제시한 방법[2]에 의해 선형계의 형태로 나타낸 후, 시스템행렬에 포함된 상태벡터를 매 시점마다 새롭게 수정하고 미소시간동안 비선형계를 제어하며 이를 반복함으로써 비선형계의 최적제어를 수행하는 방법으로 이를 이용한 많은 연구가 있었다[1,3-5]. 그러나 적용최적계획법은 시스템행렬에 포함된 상태벡터를 미소시간동안 고정된 값으로 처리하고 새롭게 수정해 나가는 과정에서 수정된 상태 벡터값이 정확하지 않으면 그 이후부터 오차가 계속 누적된다는 단점이 있다.

본 연구에서는 위 단점을 보완한 고속월쉬변환을 이용한 비선형계의 적응형 최적제어 방법을 제시하고자 한다. 이를 위해 먼저 비선형계를 Pearson이 제시한 방법에 의해 선형계의 형태로 나타낸 후 시스템행렬에 포함된 상태벡터를 추정하고 비선형계를 제어하며 새롭게 추정된 상태벡터와 비교하여 오차가 "0" 이 될 때까지 시스템행렬에 포함된 상태벡터를 새롭게 수정하는 과정을 반복함으로써 기존의 오차가 누적되는 단점을 보완하였다. 여기에 Picard 가 제시한 반복연산법[6,7]의 연산 과정을 고속월쉬변환(Fast Walsh transform)[7-9]하여 연산함으로서 기존에 미·적분방정식으로 표현되는 비선형계를 대수방정식으로 변환함으로서 컴퓨터에 의한 연산 처리 과정을 간단하게 할 수 있어 비선형계의 해석 및 최적제어의 신뢰성을 높일 수 있다.

#### 2. 고속월쉬변환

적분 가능한 임의의 함수  $x(t)$ 는 구간  $[0, T]$ 에서 월쉬함수 유한급수전개 될 수 있으며 그 값은 부분적으로 연속인 형태로 표현된다. 이때  $i$  번째 세부구간에서의  $x(t)$ 의 값  $\bar{x}_i$ 는 다음과 같다[8,9].

$$\bar{x}_i = \sum_{n=0}^{m-1} X_n \text{Pal}(i, n) \quad (2.1)$$

단,  $i = 0, 1, \dots, m-1$

또한  $n$  번째 월쉬계수  $X_n$ 은 다음과 같다.

$$X_n = \frac{T}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \bar{x}_i \text{Pal}(n, i) \quad (2.2)$$

여기서  $\text{Pal}(n, i)$ 는  $n$  번째 월쉬함수에 대한  $i$  번째 세부구간에

서의 값을 나타내며, 식(2.1)을 이산 월쉬 역변환이라 하고, 식(2.2)를 이산 월쉬변환이라 한다. 고속 월쉬변환은 이산 월쉬변환을 보다 신속하게 처리하기 위해 사용되는데 Welchel 과 Guinn에 의해 제시되었으며 다음의 과정을 따른다[8,9].

[1] 월쉬함수  $m$  항 전개를 이용하는 경우 고속월쉬 변환은  $\log_2 m$  개의 단으로 나눈다.

[2] 최초의 단( $p=0$ )에  $\bar{x}_i$ 를 비트 자리바꿈(bit-reverse)하여 증가순서대로 재배열한다.

$p$ 번째 단과  $p-1$ 번째 단 관계는 다음과 같다.

$$x_{(1+k \times 2^p)}^p = x_{(1+k \times 2^p)}^{p-1} + x_{(j+1+k \times 2^p)}^{p-1} \quad (2.3)$$

$$x_{(j+1+k \times 2^p)}^p = x_{(1+k \times 2^p)}^{p-1} - x_{(j+1+k \times 2^p)}^{p-1} \quad (2.4)$$

$$j = m/2^p, k = 0, 1, \dots, 2^{p-1}-1, l = 0, 1, \dots, j-1$$

[3] 고속 월쉬변환과 역변환은 똑같은 과정에 의해 이루어지며 식(2.2)에서 고속 월쉬변환의 경우에는 식(2.3)과 식(2.4)의 계산결과에  $T/m$  를 곱하면 된다.

#### 3. 고속월쉬변환을 이용한 비선형계의 적응형 해석

비선형계는 Pearson 이 제시한 방법에 의해 다음과 같이 표현할 수 있다[1-5].

$$\frac{d}{dt} x(t) = A(x(t), t)x(t) + B(x(t), t)u(t) \quad (3.1)$$

$$\text{초기값 } x(0) = x_0$$

식(3.1)의 시스템행렬  $A(x(t), t)$ 과  $B(x(t), t)$ 에 포함되어 있는 상태벡터의 변화를  $x(t) = x^L(t)$ 로 다음 상태의 초기 값이라 가정하면 다음과 같은 선형시변계로 표현할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} x(t) = A(x^L(t), t)x(t) + B(x^L(t), t)u(t) \quad (3.2)$$

단, 최초  $L = 0$  일 때는  $x^L(t) = x(0)$ 이다.

식(3.2)를 적분하면 다음과 같다.

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A(x^L(\tau), \tau)x(\tau)d\tau + \int_0^t B(x^L(\tau), \tau)u(\tau)d\tau \quad (3.3)$$

식(3.2)의 최초의 해를  $x^0(t) = x_0$ 으로 가정하고 반복 적용할 때  $k$ 번째 결과는 다음과 같다.

$$x^k(t) = x_0 + \int_0^t g^{k-1}(\tau)d\tau + \int_0^t h(\tau)d\tau \quad (3.4)$$

$$\text{단, } g^{k-1}(\tau) = A(x^L(\tau), \tau)x^{k-1}(\tau) \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k(t) - x^{k-1}(t)\| = 0 \quad (3.5)$$

식(3.2)의 상태방정식이 Lipschitz 조건을 만족한다면 Picard의 반복 연산식에 의하여 식(3.4)는 식(3.5)를 만족하는 상태방정식의 해가 존재한다[6,7].

여기에서 구한  $x^k(t)$ 를  $x^L(t)$ 라하고 다시 식(3.2)의 시스템 행렬에 포함된 상태벡터를 새로운 상태값으로 수정한 후 식(3.3)부터

식(3.5)의 과정을 반복하여 식(3.6)의 오차가 “0”으로 수렴하는  $\mathbf{x}^L(t)$ 를 식(3.1)의 해인  $\mathbf{x}(t)$ 로 결정한다.

$$e(t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^L(t) - \mathbf{x}^{L-1}(t)\| \quad (3.6)$$

$\mathbf{x}^{k-1}(t)$ 를 알고 있다고 할 때 구간  $[0, T]$ 에서 고속월쉬함수를 적용하여 식(3.4)의 해를 구하는 문제를 고려한다.

식(3.4)의  $\mathbf{g}^{k-1}(\tau) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^L(\tau), \tau) \mathbf{x}^{k-1}(\tau)$  와  $\mathbf{x}^k(t)$ 를 각각 월쉬함수로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{g}^{k-1}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{G}_i^{k-1} \text{Pal}(i, t) = \mathbf{G}^{k-1} \text{Pal}(t) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{x}^k(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{X}_i^k \text{Pal}(i, t) = \mathbf{X}^k \text{Pal}(t) \quad (3.8)$$

단,  $\text{Pal}(t)$ 는  $m$ 차 월쉬벡터이다.

여기서  $\mathbf{G}^{k-1}$ 은  $\mathbf{g}^{k-1}(\tau)$ 의 월쉬계수 행렬로  $\mathbf{A}(\mathbf{x}^L(\tau), \tau)$ 와 바로 전 단계에서 결정된  $\mathbf{x}^{k-1}(\tau)$ 의 곱으로부터 고속월쉬변환을 이용하여 결정할 수 있다. 또한  $\mathbf{X}^k$ 는 상태벡터  $\mathbf{x}^k(t)$ 의  $n \times m$  월쉬계수 행렬로 결정해야 할 값이다.

$\mathbf{x}_0$ 와  $\mathbf{h}(t)$  역시 월쉬함수로 전개하고 식(3.7)과(3.8)의 관계를 식(3.4)에 대입하면 다음과 같다.

$$\mathbf{X}^k \text{Pal}(t) = \mathbf{X}_0 \text{Pal}(t) + \mathbf{G}^{k-1} \int_0^t \text{Pal}(\tau) \tau + \mathbf{H} \int_0^t \text{Pal}(\tau) d\tau \quad (3.9)$$

식(3.9)에 펠리배열 월쉬함수의 적분연산행렬[9,11]을 도입하고 양변에 있는 월쉬벡터를 소거하면 다음과 같고

$$\mathbf{X}^k = \mathbf{X}_0 + \mathbf{G}^{k-1} \mathbf{P} + \mathbf{H} \mathbf{P} \quad (3.10)$$

이 대수방정식으로부터  $\mathbf{x}^k(t)$ 의 월쉬계수 행렬인  $\mathbf{X}^k$ 를 구할 수 있다. 이를 고속 월쉬 역변환하면  $\mathbf{x}^k(t)$ 를 구할 수 있으며 전 단계에서 구한  $\mathbf{x}^{k-1}(t)$ 와 비교하여 식(3.5)를 만족하는  $\mathbf{x}^k(t)$ 가 식(3.4)의 해가된다.

이상에서 구한  $\mathbf{x}(t)$ 는 구간  $[0, T]$ 에서의 값이고  $t=T$ 에서의 상태벡터 값은 식(3.3)에 월쉬함수를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다[7].

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(T) &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{G} \int_0^T \text{Pal}(\tau) d\tau + \mathbf{H} \int_0^T \text{Pal}(\tau) d\tau \\ &= \mathbf{x}_0 + T[\mathbf{G}_0 + \mathbf{H}_0] \end{aligned} \quad (3.11)$$

$\mathbf{G}_0$ 와  $\mathbf{H}_0$ 는 각각  $\mathbf{g}(\tau)$ 와  $\mathbf{h}(\tau)$ 의  $\text{Pal}(0, \tau)$ 에 대한  $n$ 차 월쉬계수벡터이며, 여기서 구한  $\mathbf{x}(T)$ 는 다음 구간의 초기조건으로 이용된다.

#### 4. 고속월쉬변환에 의한 비선형계의 적용형 최적제어

주어진 비선형계에 대한 평가함수를 다음과 같이 정의한다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \{ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \} dt \quad (4.1)$$

최소화하는 제어입력을 결정하는 문제를 고려한다. 본 연구의 비선형계를 위한 적용형 최적제어는 다음의 과정을 따른다.

[1] 일반적인 비선형시스템은 식(3.1)로 모델링한다.

[2] 식(3.1)의 상태방정식에서 시스템 행렬에 포함되어 있는 상태벡터의 변화를  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^L(t)$ 로 알고 있는 값이라 가정하여 식(4.2)와 같이 선형시변계로 표현한다. 단,  $L = 0$  일 때는  $\mathbf{x}^L(t) = \mathbf{x}(0)$ 이다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}^L(t), t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}^L(t), t) \mathbf{u}(t) \quad (4.2)$$

이에 대한 최적제어입력을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}^L(t), t) \lambda(t) \\ &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}^L(t), t) \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

여기서  $\mathbf{K}(t)$ 는 리카티방정식의 해이다.

[3] 위에서 구한 제어입력을 이용하여 식(3.1)의 비선형계를 제어하고 식(4.2)의 시스템행렬에 포함된 상태벡터를 제어된 상태값  $\mathbf{x}^L(t)$ 으로 새롭게 수정한다.

[4] 이상의 과정들을 다음의 오차가 0으로 수렴할 때 까지 반복한다.

$$e(t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^L(t) - \mathbf{x}^{L-1}(t)\| \quad (4.4)$$

식(4.3)의 리카티방정식의 해는 다음의 2점 경계치 문제로부터 구할 수 있다[7,9,10,11].

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^L, t) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

여기서

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^L, t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}(\mathbf{x}^L, t) & \mathbf{B}(\mathbf{x}^L, t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(\mathbf{x}^L, t) \\ \mathbf{Q} & \mathbf{A}^T(\mathbf{x}^L, t) \end{bmatrix} \text{이고} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \lambda(T) = 0 \text{ 이다.}$$

$\tau = T - t$ 로 치환하면 식(4.5)는 다음과 같다.

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{bmatrix} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^L, \tau) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{bmatrix} \quad (4.6) \\ \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_0, \lambda(0) = 0$$

식(4.6)의 상태천이행렬을 다음과이라 하면

$$\Phi(\tau) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(\tau) & \phi_{12}(\tau) \\ \phi_{21}(\tau) & \phi_{22}(\tau) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

리카티방정식의 해는 다음과 같고,

$$\mathbf{K}(\tau) = \phi_{21}(\tau) \phi_{11}^{-1}(\tau) \quad (4.8)$$

초기조건은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

식(4.6)의 해를 구함으로써 상태천이행렬을 결정할 수 있고, 리카티방정식의 해는 식(4.8)에 의하여 결정할 수 있다.

단,  $\mathbf{e}_p$ 는  $p$ 번째 요소만 1이고 나머지 요소는 모두 0인  $n$ 차 열벡터이다.

초기조건을 이용하여 식(4.6)의  $\mathbf{x}(\tau)$ 와  $\lambda(\tau)$ 를 구하면  $\phi_{11}(\tau)$ 와  $\phi_{21}(\tau)$ 의  $p$ 번째 열벡터가 구해지고 이는 다음의 과정에 의하여 결정된다.

먼저 식(4.6)을 적분하고 편의상 다음과 같이 치환하여 나타낸다.

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{y}_0 + \int_0^\tau \theta(\tau) d\tau \quad (4.10)$$

$$\text{단, } \mathbf{y}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{bmatrix}, \theta(\tau) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^L, \tau) \mathbf{y}(\tau), \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

식(4.10)의 해를 최초  $\mathbf{y}^0 = \mathbf{y}_0$ 로 가정하여 다시 해를 구하고  $k$  번 반복할 때 결과는 다음과 같다.

$$\mathbf{y}^k(\tau) = \mathbf{y}_0 + \int_0^\tau \theta^{k-1}(\tau) d\tau \quad (4.11)$$

식(4.11)은 식(3.4)와 같은 형태로 3장의 방법과 같은 과정에 의해 결정된다.

먼저  $\theta^{k-1}(\tau)$ 와  $\mathbf{y}^k(\tau)$ 를 각각 다음과 같이 월쉬함수로 전개한다.

$$\theta^{k-1}(\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} \Theta_i^{k-1} \text{Pal}(i, \tau) = \Theta^{k-1} \text{Pal}(\tau) \quad (4.12)$$

$$\mathbf{y}^k(\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{Y}_i^k \text{Pal}(i, \tau) = \mathbf{Y}^k \text{Pal}(\tau) \quad (4.13)$$

여기서  $\Theta^{k-1}$ 은  $\theta^{k-1}(\tau)$ 의 월쉬계수 행렬로  $\mathbf{F}(\mathbf{x}^L, \tau)$ 에 바로 전 단계에서 구한  $\mathbf{y}^{k-1}(\tau)$ 를 곱하고 이를 고속월쉬 변환하여 구할 수 있다. 이상의 식(4.12)와 식(4.13)의 관계 및 적분연산행렬을 식(4.11)에 대입하면 다음과 같다.

$$\mathbf{Y}^k \text{Pal}(\tau) = \mathbf{Y}_0 \text{Pal}(\tau) + \Theta^{k-1} \text{Pal}(\tau) \quad (4.14)$$

여기에서 구한  $Y^k$ 를 고속월쉬 역변환하면  $y^k(\tau)$ 를 구할 수 있으며 전 단계에서 구한  $y^{k-1}(\tau)$ 와 비교하여 오차가 “0”이 될 때 까지 반복한다. 이때 구한  $y^k(\tau)$ 는 식(4.9)의 초기조건에 의한 결과이며  $\phi_{11}(\tau)$ 와  $\phi_{21}(\tau)$ 의 p번째 열벡터와 같다. 그러므로 모든 초기조건에 대한 식(4.5)의 해를 구함으로써 상태천이행렬  $\phi_{11}(\tau)$ 와  $\phi_{21}(\tau)$ 를 결정할 수 있고 이로부터 리카티방정식의 해와 최적제어입력 및 최적상태궤적을 구할 수 있다.

## 5. 적용례

다음과 같이 표현되는 Van der Pol 시스템[1,3-5]을 고려하자.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1(t) + x_2(t) - x_1^2(t)x_2(t) + u(t)$$

위의 비선형시스템을 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1-x_1^2(t) \end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

전체 시 구간  $[0, 5]$ 를 4개의 구간으로 구분하고 각 구간에서 월쉬함수 16황 전개를 이용하여 입력을 “0”으로 하였을 때의 본 연구방법에 의한 Van der Pol 시스템의 영입력 응답을 그림 1에 나타냈다.

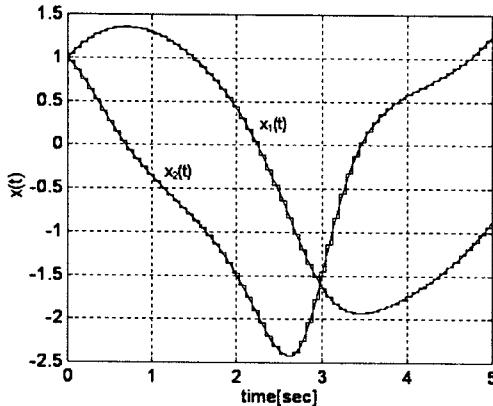


그림 1) 제안된 방법에 의한 영입력응답  
Fig. 1) Zero-input response by the proposed method

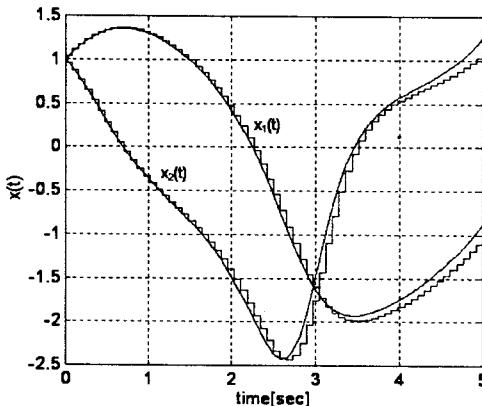


그림 2) 블러펄스 함수를 이용한 영입력응답  
Fig. 2) Zero-input response by the BPF method

그림 1의 실선은 수치해석에 의한 결과이고 구형파의 형태로 나타나는 부분은 본 연구에 의한 결과이다. 그림 2는 기존의 적용형 최적계획법에 블러펄스함수를 이용하였을 때의 결과이다. 그림 1과 그림 2에서 보듯이 블러펄스 함수와 같은 적교함수를 이용한 시스템의 해석 결과는 적교함수의 특성상 부분적으로 연속인 형태

로 나타나며 전 단계의 결과가 다음 단의 초기값으로 사용되면서 이산 값의 오차가 반복 누적되어 시간의 흐름에 따라 오차가 늘어나는 반면 본 연구 방법은 구간마다 오차를 계산하여 오차를 “0”으로 줄여 가면서 상태를 추정함으로써 전체적인 오차가 줄어드는 것을 알 수 있다.

평가함수가 다음과 같을 때

$$J = \frac{1}{2} \int_0^5 \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\} dt$$

$$\text{단, } Q = \text{diag}\{1, 1\}, R = 1$$

이 평가함수를 최소화하는 최적제어입력을 그림 3에 나타내었다.

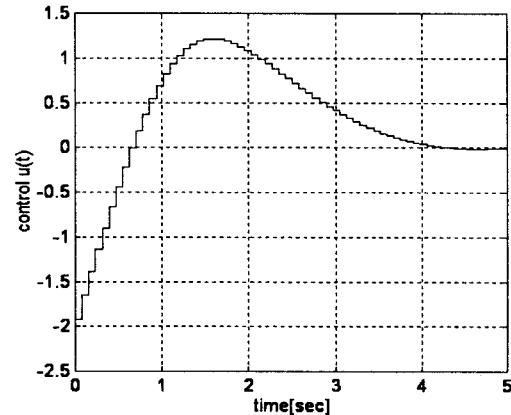


그림 3) 제안된 방법에 의한 최적제어입력  
Fig. 3) Optimal control input by the proposed method

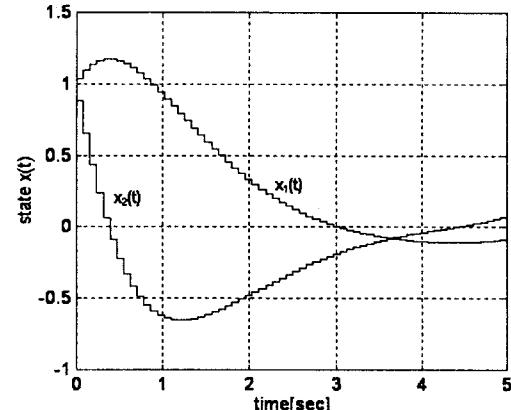


그림 4) 제안된 방법에 의한 최적상태궤적  
Fig. 4) Optimal state trajectory by the proposed method

그림 4 에는 본 연구방법에 의한 최적상태궤적을 나타내었다. 그림 3과 그림 4에서 보듯이 제어 입력이 일정 값에 수렴해 가며 최적 상태 또한 “0”에 수렴되어 최적의 제어가 이루어짐을 알 수 있다.

## 6. 결 론

본 연구에서는 비선형계의 해석과 최적제어의 해를 구하는 문제에 있어 기존의 적용최적계획법을 개선한 새로운 최적제어방법을 제시하였다. 여기에 Picard의 반복연산법과 고속월쉬변환을 이용하여 비선형계의 해석 및 최적제어문제를 보다 간단히 수행할 수 있도록 하였다.

적용례에서 보듯이 비선형계의 해를 정확하게 구할 수 있음을 알 수 있으며 적교함수인 블러펄스 함수로 구한 해와 비교하였다. 적교함수인 블러펄스 함수의 해는 전체 구간에서 시간의 흐름에 따라 오차가 누적되어 가는 반면 본 연구결과는 선형 구간마다 오차를 최소화 하는 과정을 거쳐 오차의 누적이 최소화됨을 알 수 있다. 본 연구에서 제시한 고속월쉬변환을 이용한 비선형계의 적용

형 최적제어 방법은 비선형계의 해석 및 최적제어기 설계 시 기존의 방법에 비해 더욱 신뢰성을 높여 줄 것으로 기대된다.

#### [참 고 문 헌]

- [1] J. P. Matuszewski, "Suboptimal Terminal Feedback Control of Nonstationary Nonlinear Systems", IEEE Trans. on Automatic Control vol. 18, pp.271-274, 1973
- [2] J. D. Pearson, "Optimization Methods for Large scale Systems", (Edited by D.A.Wismer). McGraw-Hill, New York, 1970
- [3] 임윤식, 안두수, "월쉬 단일항 전개를 이용한 비선형 확률시스템의 적응형 칼만 필터 설계", 대한전기학회논문지, 제46권, 제7호, pp.1090-1094, 1997
- [4] 박준훈, "블럭펄스 변환에 의한 비선형계의 최적제어를 위한 새로운 접근방법에 관한 연구", 성균관대 박사학위논문, 1991
- [5] K. D. Permar, "Adaptive optimal hierarchical control of nonstationary nonlinear system", Journal of Computer and Electrical Engineering vol.10, pp.51-57, 1983
- [6] Ronald R. Mohler, *Nonlinear Systems*, vol.1, Prentice Hall, 1991
- [7] 이명규, "고속월쉬변환에 의한 선형시변계의 해석 및 최적제어를 위한 새로운 접근방법", 대한전기학회논문지 제47권 제1호, pp.75-82, 1998
- [8] K. G. Beauchamp, *Applications of Walsh and Related Functions*, Academic Press, 1984
- [9] 안두수, 직교함수와 응용, 복수출판사, 1997
- [10] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Design of Piecewise Constant Gains for Optimal Control via Walsh Function", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 20, no.5, pp.596-602, 1975
- [11] Frank L. Lewis and Vassilis L. Syrmos, *Optimal Control*, John Wiley & Sons, 1995