

유한체적법을 통한 구면 좌표계에서의 볼츠만 수송방정식의 해석

오혁근[†] · 진재식* · 이준식**

Analysis of Boltzmann transport equation with Finite Volume Method at Spherical coordinate

Hyuck Keun Oh, Jae Sik Jin and Joon Sik Lee

Key Words : BTE(볼츠만 수송 방정식), Spherical coordinate(구면 좌표계), Finite Volume Method(유한 체적법)

Abstract

A "finite volume method" is proposed to predict heat transport in a spherical enclosure at micro/nanoscale with the Boltzmann transport equation (BTE). The gray version of the BTE with the relaxation time approximation has been applied. Pointing out similarity between radiative transfer equation (RTE) and BTE, the mapping process in RTE is adopted to treat the angular derivative term and linear algebraic discretization equation is derived by using the established method which is used in 2-D BTE in cartesian coordinates. The simulation results are compared to exact solution to RTE for various acoustic thicknesses and ratio of radii. The comparison shows that this method is logical and accurate, and it is possible to easily adopt various models in spherical BTE.

기호설명

\vec{A}_x : 제어체적면의 면적 벡터
 a_x : 이산화 방정식의 계수
 C : 비열(J/m³K)
 $D(\omega)$: 포논의 상태밀도(1/m³)
 e_w^* : 단위 체적당 에너지 밀도(J/m³)
 E, W, N, S : 동쪽, 서쪽, 북쪽, 남쪽 격자점
 f : 포논 분포함수
 F_x : 제어 체적면에서의 에너지 입출입 비율
 I : 광자 에너지 밀도(W/m²)
 k_B : 볼츠만 상수(1.38×10⁻²³ J/K)
 N_θ : 입체각의 격자 수
 p : 제어체적의 격자점
 q_{vol} : 단위 체적당 열 발생량 (W/ m³)
 r : 반경(m)
 \hat{s} : 단위 방향 벡터

t : 시간(s)
 T : 온도(K)
 \bar{v} : 포논의 균속도(m/s)

그리스문자

ϕ : 방위각(rad)
 κ_a : 흡수 계수 (m⁻¹)
 Λ : 평균 자유 행로(nm)
 θ : 방향각(rad)
 σ_s : 산란 계수 (m⁻¹)
 τ : 이완시간(s)
 Ω : 입체각(Sr)
 ψ : 무차원 열유속
 ξ : 무차원 온도분포

하첨자

b : 흑체
 e, w, n, s : 동쪽, 서쪽, 북쪽, 남쪽 격자면
 i : i 번째 격자

상첨자

0: 평형상태
 nf : 방향 벡터의 nf 번째 방향
old: 전 시간단계

[†] 서울대학교 대학원 기계항공공학부
E-mail : deedleet@snu.ac.kr
TEL : (02)880-7123 FAX : (02)875-6632
* 서울대학교 마이크로 열시스템 연구센터
** 서울대학교 기계항공공학부

1. 서론

지난 몇 년간 마이크로 나노 스케일에서의 열적 거동에 대한 관심이 높아져왔다. 특히 유전체나 반도체 박막에서의 열전도에 대하여 많은 연구가 수행되어 왔다. 또한 박막의 길이 척도가 포논의 평균자유행로(상온에서 300 nm)와 비슷하거나 작아졌을 경우, 크기효과 (size effect)나 계면효과 (interface effect)가 더욱 중요해진다⁽¹⁾.

구형이나 실린더 매질과 같은 비평면 구조에서 마이크로/나노 스케일에서의 열적 특성이 매우 중요함에도 불구하고, 기존의 연구들은 주로 평면 박막 구조에 집중되어 있었다. 또한 나노와이어, 퀀텀점, 금/은 나노파티클과 같은 나노 구조의 급격한 기술발전과 함께 구형 나노 구조에서의 열전달 특성에 대한 이해가 더욱 중요하게 되었다.

푸리에 전도 법칙을 사용하면 가열된 구형 구조 근처에서 온도 분포를 매우 쉽게 얻을 수 있다. 하지만 나노파티클과 같은 나노구조 근처에서 열적 해석은 기존의 열확산 방정식(Heat diffusion equation)을 적용할 수 없음이 여러 연구로부터 밝혀졌다. 이것은 기본적으로 열확산 이론이 나노파티클 근처에서 에너지 수송체(carrier)의 충분한 산란(scattering)이 있을 경우에만 유효하기 때문이다. 하지만 파티클 반경이 열 수송체의 평균자유행로(mean free path) 보다 훨씬 작아지게 되면, 가열된 나노파티클 주위에서의 산란효과가 거의 일어나지 않게 된다. 이러한 영역에서의 열전달은 벌리스틱(ballistic)하고 비국부적인 특성을 보여준다⁽²⁾. 이런 포논의 벌리스틱(ballistic) 에너지 전달 특성을 이해하기 위하여 에너지 수송체(주로 Phonon) Boltzmann 수송 방정식(Boltzmann Transport Equation, BTE)에 기초한 몇 십 나노 스케일의 국부적인 열 발생에 대하여 정상상태 (steady state)와 과도상태(transient state)의 수치적 연구가 이루어졌다^(3, 4). 또한 평면 구조에서 Monte-Carlo 모사를 통한 포논의 벌리스틱 전달 현상과 분자동역학 모사를 통한 박막에서의 열전달 특성 역시 연구되어 왔다^(5, 6). 나노스케일에서의 열전달 특성을 해석하는 수많은 방법들이 있음에도 불구하고, Boltzmann 수송 방정식이 해석 비용 및 실제 현상의 적용의 측면에 있어서 유리하여 NMOS 등의 트랜지스터 내에서의 열전달 해석에 많이 사용되고 있다^(3, 4). 하지만 Boltzmann 수송 방정식은 적분 미분 방정식의 형태를 가지고

있어서, 수치 해석이 난해하고 특히 포논과 포논과의 상호 작용 혹은 포논과 전자와의 상호 작용을 모사하여 적용하는데 어려움이 있었다. 최근에 이르러서 이러한 어려움을 극복하고자 유한체적법(Finite Volume method)에 기초한 Boltzmann 수송 방정식의 해석법이 제안되었다⁽⁷⁾. 이러한 연구들은 포논간의 혹은 포논과 전자간의 상호 작용의 모델을 적용하여 보다 실제 현상에 가까운 열전달 특성을 모사하였다. 그러나 기존의 유한체적법에 근거한 Boltzmann 수송 방정식의 해석방법은 2 차원 직교좌표계를 사용한 평면구조에만 적용할 수 있는 한계가 있었다.

본 연구에서는 Boltzmann 수송 방정식과 복사 열전달 방정식(Radiative transfer equation)의 상사성에 착안하여, 복사 열전달 방정식의 mapping process 를 이용한 구면 좌표계에서의 Boltzmann 수송 방정식에 대한 유한체적법 해석 방법을 제시하였으며, 이를 이용하여 이미 알려져 있는 구면 좌표계에서의 복사 열전달 방정식의 결과와 비교하여 해석 방법의 적절성을 검증하였다.

2. Boltzmann 수송 방정식

마이크로/나노스케일의 에너지 전달 해석에서 열 수송자(heat carrier)의 거동은 이완 시간 근사(relaxation time approximation)를 적용한 회체(Gray) 모델에서의 Boltzmann 수송 방정식인 식(1)을 적용할 수 있다⁽⁸⁾.

$$\frac{\partial f_{\omega}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_{\omega} = -\frac{f_{\omega} - f_{\omega}^0}{\tau} \quad (1)$$

회체(gray) 모델이란 열 수송자의 균속도 및 이완시간이 어느 주파수에서도 일정함을 의미한다. 또한 이런 길이스케일에서는 포논의 평균자유행로 보다 훨씬 작은 특성 길이로 인하여 열역학적 온도(thermodynamic temperature)를 정의할 수 없으나⁽⁸⁾, 포논의 단위 부피당 단위 입체각 당 에너지 밀도(energy density) e'' 를 $e'' = \int_{\Delta w_i} h w f_{\omega} D(w) dw$ 로 정의할 수 있다. 한편 Boltzmann 수송 방정식은 에너지 밀도를 이용하여 다음의 식(2)와 같이 에너지 형태로 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial e''}{\partial t} + \nabla \cdot (v \hat{s} e'') = \frac{e^0 - e''}{\tau} + q_{vol} \quad (2)$$

여기서 e^0 는 평형 에너지 밀도로서 다음과 같이

$$e^0 = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} e'' d\Omega = \frac{1}{4\pi} C(T_L - T_{ref}) \text{로 정의 된다.}$$

구면 좌표계에서 BTE 는 다음의 식(3)으로 표현할 수 있는데 이는 구면 좌표계에서의 복사 열전달 방정식(4)과 비정상 상태 항과 열 생성항을 제외하면 수학적인 형태는 동일하다.

$$\frac{\partial e''}{v \partial t} + \cos \theta \frac{\partial e''}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial e''}{\partial \theta} = \frac{e^0 - e''}{\Lambda} + \frac{q_{vol}}{v} \quad (3)$$

$$\cos \theta \frac{\partial I}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial I}{\partial \theta} = \kappa_a (I_b - I) \quad (4)$$

여기서 κ_a 는 흡수 계수로서 평균자유행로 Λ 의 역수로서 표현될 수 있다. Figure 1 은 2 개의 동심구의 형상 및 좌표계를 나타낸다.

3. 유한체적법 공식화

3.1 Mapping 과정

비평면 구조에서의 BTE 및 RTE 해석을 위한 유한 체적법적 접근이 어려운 이유 중 하나는 식 (3)의 좌변 3 번째 항과 식(4)의 좌변 2 번째 항인 각에 대한 미분항을 처리하는데 있어서 수학적 모델링이 까다롭기 때문이다. Carson 과 Lathrop 은 그들이 제안한 DOM(Discrete Ordinates Method) 에서 각에 대한 미분항을 다음 식(5)과 같이 표현하였다⁽⁹⁾.

$$\frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) I] = \frac{\alpha^{m-\frac{1}{2}} I^{m-\frac{1}{2}} - \alpha^{m+\frac{1}{2}} I^{m+\frac{1}{2}}}{w^m} \quad (5)$$

하지만 이 식은 일종의 계산편의를 위하여 도입된 식이어서 물리적인 의미가 부족하였다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 Chui 등이 축대칭 원통 좌표계에 대하여 mapping process 를 제안하였다^(10,11). Figure 2 에서 보여지듯이 공간좌표계에서의 이산화각 $\Delta\theta_0$ 과 방향벡터의 이산화각 $\Delta\theta_r$ 을 같다고 가정하면 $I'_j = I_j$ 의 관계가 성립한다. 따라서 Figure 2(a)와 Figure 2(b)사이에 간단한 mapping 이 성립되게 되고, 이 때 복사 에너지 강도(intensity)를 계산함에 있어서 Figure 2(a)의 계산이 Figure 2(b)의 계산보다 쉬어진다⁽¹⁰⁾. 특히 방향벡터의 각을 $\theta_r = 0$ 로 고정함으로써 각 제어체적면에서의 에너지 입출입을 간편하게 계산하게 하였다.

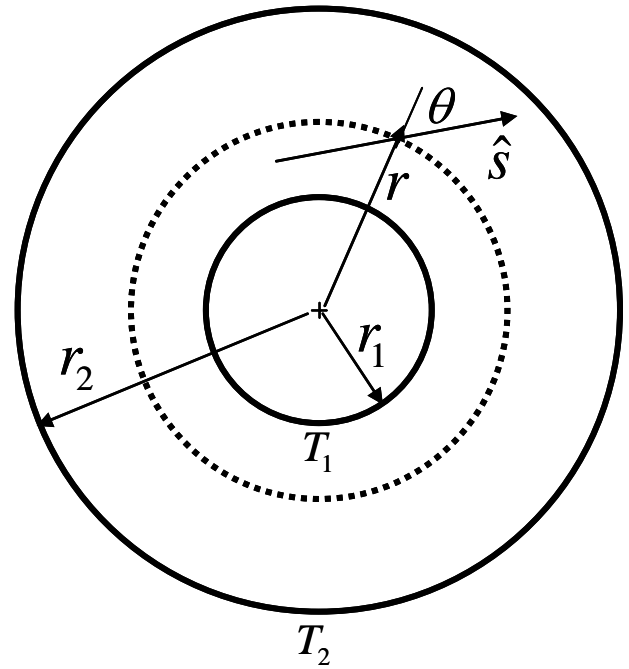


Fig. 1 Physical model and coordinate system

3.2 제어체적의 결정

식(2)의 지배방정식을 유한체적법으로 공식화하기 위해서는 좌표계에서 제어 체적을 결정해야 한다. Figure 3 은 유한체적법 공식화를 위하여 사용된 제어체적 및 좌표계를 나타낸다. 여기서 중요한 점은 좌표계에서 오직 방향각(polar angle) θ 만이 사용되었다라는 점이다. 구면 좌표계는 기본적으로 반경(r), 방향각(θ), 방위각(ϕ)로 결정되는데, 본 연구에서는 축대칭을 가정하여 mapping 을 도입하였기 때문에 에너지 밀도 e'' 는 방위각 ϕ 에 대하여 무관하다고 볼 수 있다. 이는 뒤에서 지배방정식 (2)를 입체각 Ω 에 대하여 적분할 때 방위각 $[0, \pi]$ 의 전체 구간에 대한 적분으로 표현할 수 있음을 의미한다. 사실 방위각의 범위는 $[0, 2\pi]$ 의 범위이나 본 연구에서는 $[0, \pi]$ 구간의 방위각에 대해서만 적분을 행하였다. 이는 각에 대한 미분항의 유한체적화 공식화 시 $[0, 2\pi]$ 적분에 대해서는 0 이 되어버려서 계산에 반영되지 못하여서 올바른 해를 얻을 수 없기 때문이다. 한편, 앞서 mapping 과정에서 다루었듯이, $\theta_r = 0$ 로 가정하였으므로, Figure 3 의 화살표는 $\theta_r = 0$ 인 방향을 나타낸다. 이 때 Figure 3 에 나타나 있듯이, west 와 north 면에 대해서는 나가는 방향이 되고, east 와 south 면에서는 들어가는 방향이 된다. 이는 지배방정식을 제어체적 ΔV 에 대하여 적분할 때 면적분으로 변환 시, 각 제어체적 면에서의 에너지 입출입의 비율 및

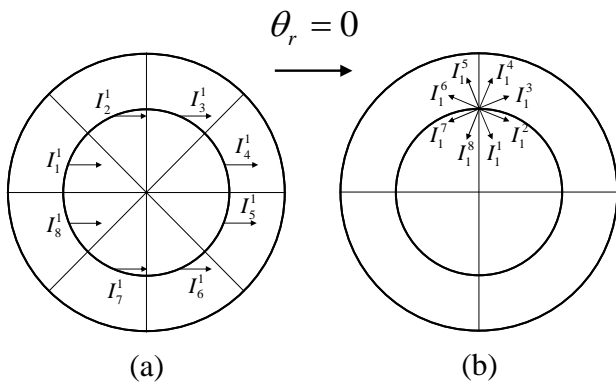


Fig. 2 Angular distributions of intensity field

방향을 결정하는데 이용된다. Figure 3 의 각각의 제어체적은 θ $[0, \pi]$ 구간을 N_θ 개의 구역으로 나누고, $[r_1, r_2]$ 구간을 N_r 의 구간으로 나누어졌다.

3.3 유한체적법 공식화

지배방정식 (2)를 각각의 방향각 θ^{nf} 에 대하여, 제어 체적 ΔV , 입체각 $\Delta\Omega_p^{nf}$ 에 대하여 적분하면 현 제어체적 P 에 대한 이산화 방정식을 얻을 수 있다. 이 때 방정식 (2)의 좌변의 벌리시티 항 $\nabla \cdot (v\hat{s}e^n)$ 은 다음의 식 (6)처럼 면적분의 형태로 표현할 수 있다⁽⁷⁾.

$$\iint \nabla \cdot (v\hat{s}e^n) \Delta\Omega_p^{nf} \Delta V = v \cdot (I_n^{nf} A_n F_n^{nf} + I_s^{nf} A_s F_s^{nf} + I_e^{nf} A_e F_e^{nf} + I_w^{nf} A_w F_w^{nf}) \quad (6)$$

이 때 I_x, A_x, F_x 는 각각 x 면에서의 에너지 밀도, 면적, 에너지의 입출입 비율을 나타낸다. 특히 F_x 는 방향벡터 $\hat{s}(=\hat{r}=\hat{k})$ 대한 각 면의 직교벡터(normal vector)와의 내적을 의미한다. 따라서 F_n 과 F_s 는 면적벡터의 방향이 서로 반대이므로 다음의 식 (7)과 같이 표현된다.

$$F_n^{nf} = -F_s^{nf} = \int_0^\pi \int_{\theta-\frac{d\theta}{2}}^{\theta+\frac{d\theta}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi = \frac{\pi}{2} \sin 2\theta \sin d\theta \quad (7)$$

이 때의 제어면적 A_n 과 A_s 는 각각 $A_n = \frac{4\pi r_n^2}{N_\theta}$, $A_s = \frac{4\pi r_s^2}{N_\theta}$ 로 계산한다. 한편 각미분항을 의미하는 F_e^{nf}, F_w^{nf} 는 각각 다음의 식(8), (9)로 계산한다.

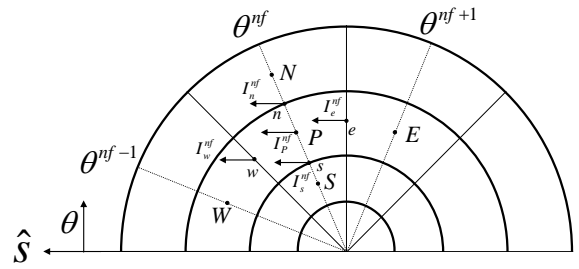


Fig. 3 Control volume for discretization ($N_\theta = 4$)

$$F_w^{nf} = \int_{\Delta\Omega} \hat{s} \cdot \hat{n}_w d\Omega = \int_{\theta-d\theta}^{\theta} \sin^2 \theta d\theta \int_0^\pi \sin \phi d\phi = d\theta - \cos \left\{ 2\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) \right\} \sin d\theta \quad (8)$$

$$F_e^{nf} = \int_{\Delta\Omega} \hat{s} \cdot \hat{n}_e d\Omega = -\int_{\theta}^{\theta+d\theta} \sin^2 \theta d\theta \int_0^\pi \sin \phi d\phi = -\left[d\theta - \cos \left\{ 2\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) \right\} \sin d\theta \right] \quad (9)$$

또한 앞에서 언급했듯이 식 (8)과 (9)의 방위각 ϕ 을 $[0, 2\pi]$ 에 대하여 적분하면 0 이 되어버리기 때문에 본 연구에서는 전체 입체각의 범위가 4π 가 아닌 2π 가 된다는 점에 유의해야 한다. 이 때의 면적 A_e 과 A_w 는 $A_e = A_w = \pi(r_n^2 - r_s^2)$ 로 동일하다.

이러한 과정을 통해서 지배방정식 (2)는 각각의 방향각 θ^{nf} 에 대하여, 다음의 식 (10)으로 이산화된다.

$$\frac{I_p^{nf} - I_p^{nf,old}}{v\Delta t} \Delta V \Delta\Omega_p^{nf} + \sum_i^{n,s,e,w} A_i F_i^{nf} I_i^{nf} = \frac{I^0 - I_p^{nf}}{v\tau} \Delta V \Delta\Omega_p^{nf} + \frac{q_{vol}}{v} \Delta V \Delta\Omega_p^{nf} \quad (10)$$

또한 Narumanchi⁽⁷⁾의 연구처럼 상류도식(Upwind Scheme)을 적용하면 식(10)의 좌변의 2 번째 항은 다음과 같이 표현 된다.

$$A_n F_n I_n^{nf} = I_p^{nf} \max(A_n F_n, 0) - I_N^{nf} \max(-A_n F_n, 0) \\ A_s F_s I_s^{nf} = I_p^{nf} \max(A_s F_s, 0) - I_S^{nf} \max(-A_s F_s, 0) \\ I_e^{nf} = I_E^{nf+1} = I_p^{nf+1}, \quad I_w^{nf} = I_p^{nf} \quad (11)$$

따라서 이산화 방정식 (10)은 다음과 같이 선형대수 방정식으로 나타낼 수 있고, 각각의 계수들 역시 아래와 같이 정의된다.

$$a_p I_p^{nf} = a_n I_n^{nf} + a_s I_s^{nf} + b_p^{nf} \quad (12)$$

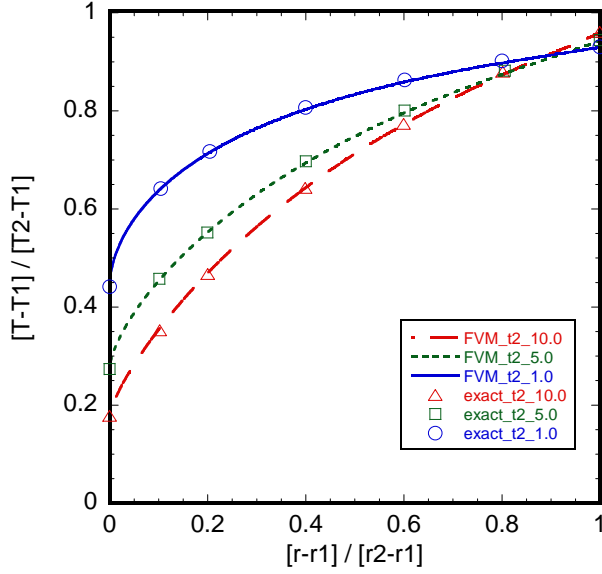


Fig. 4 Dimensionless temperature distribution for $\tau_1/\tau_2 = 0.5$

$$\begin{aligned}
 a_p &= \frac{\Delta V \Delta \Omega_p^{nf}}{v \Delta t} + \frac{\Delta V \Delta \Omega_p^{nf}}{v \tau} + A_w F_w \\
 &\quad + \max(A_n F_n, 0) + \max(A_s F_s, 0) \\
 a_N &= \max(-A_n F_n, 0), \quad a_S = \max(-A_s F_s, 0) \\
 b_p &= \left(\frac{I_p^{nf,old}}{\Delta t} + \frac{I^0}{\tau} + q_{vol} \right) \frac{\Delta V \Delta \Omega_p^{nf}}{v} - A_e F_e I_p^{nf+1}
 \end{aligned} \quad (13)$$

따라서 위의 선형 대수 방정식 (12)는 어떤 주어진 방향각에 대해서 선순 3 대각행렬 알고리즘 (line by line TDMA) 및 Picard Iteration 을 통하여 해를 구할 수 있다. 이때의 수렴 조건은 다음의 식 (14)로 주어진다⁽⁷⁾.

$$R = \frac{1}{N_{tot}} \sum_{nf=1}^{N_{tot}} \left\{ \frac{\sum_{p=1}^{N_i} \left| \sum_{n=2}^{N_i} a_n I_n^{nf} + b_p - a_p I_p^{nf} \right|}{\sum_{p=1}^{N_i} |a_p I_p^{nf}|} \right\} \leq 10^{-8} \quad (14)$$

여기서 R 은 각각의 Picard Iteration 후에 잔류값 (Residual)이다.

4. 해석 모델의 검증

4.1 무차원 온도 분포

유한체적법을 통한 계산 결과를 검증하기 위하여 Figure 1 과 같이 안쪽 면에 300 K, 바깥쪽 면에 310 K 의 등온 온도 경계조건을 주고 계산한 결과를 Vistanka 의 복사열전달 방정식에 대한

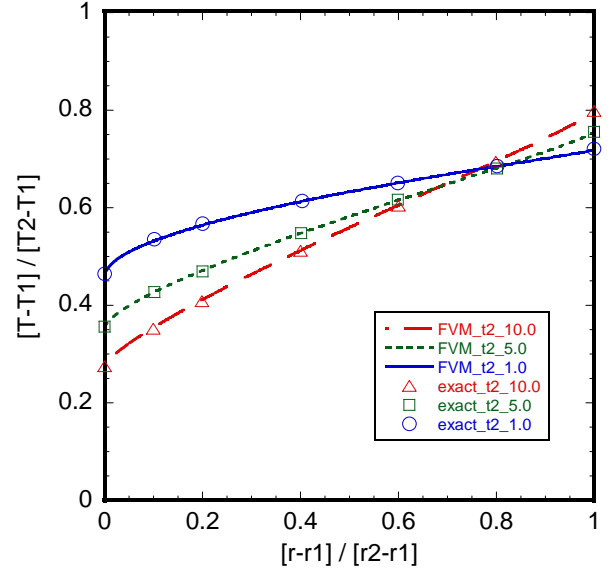


Fig. 5 Dimensionless temperature distribution for $\tau_1/\tau_2 = 0.9$

exact solution⁽¹²⁾과 비교하였다. Exact solution 과 비교하기 위하여 정상상태에서 내부 열발생이 없는 상태로 가정하고 수치해석을 수행하였다. 이 때 사용된 격자의 수는 $N_\theta = 32$, $N_i = 100$ 이다. 한편 무차원 온도 분포 $\xi(\tau)$ 는 무차원 반지름 $\tau = r/\Lambda$ 의 함수로서 다음과 같이 정의된다.

$$\xi(\tau) = \frac{[e^0(\tau) - e^0(\tau_1)]}{[e^0(\tau_2) - e^0(\tau_1)]} = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \quad (15)$$

Figure 4 와 Figure 5 는 반경비가 각각 0.5, 0.9 일 때 τ_2 의 변화에 따른 무차원 온도 분포이고, exact solution 과 잘 일치함을 알 수 있다.

4.2 무차원 열유속

유한체적법을 통한 계산결과의 타당성을 검증하기 위하여 앞에서 얻은 무차원 온도 분포에 대하여 무차원 열유속을 역시 복사 열전달 방정식의 exact solution^(12,13)과 비교하였다. 무차원 열유속 ψ 는 다음의 식 (16)으로 정의된다.

$$\psi = \frac{q_1''}{v \cdot (\pi e^0(\tau_1) - \pi e^0(\tau_2))} \quad (16)$$

Table 1 은 반경비 0.5 와 0.9 에서 τ_2 에 따른 무차원 열유속을 나타낸다. 결과에서 알 수 있듯이 exact solution 과 잘 일치함을 알 수 있다. 따라서 구면좌표계에서의 Boltzmann 수송 방정식에 대한

Table 1 Dimensionless heat flux according to τ_2

참고문헌

τ_2	Exact ^(12,13)		FVM	
	$r_1/r_2 = 0.5$	$r_1/r_2 = 0.9$	$r_1/r_2 = 0.5$	$r_1/r_2 = 0.9$
0.1	0.9900	0.9946	0.9896	0.9944
0.5	0.9488	0.9728	0.9477	0.9722
1.0	0.8976	0.9459	0.8957	0.9449
2.0	0.8006	0.8944	0.7979	0.8930
5.0	0.5797	0.7625	0.5775	0.7607
10.0	0.3834	0.6077	0.3828	0.6065
20.0	0.2250	0.4312	0.2254	0.4308

유한체적법 해석이 적절함을 알 수 있고, 이를 이용하여 기존의 유한체적법에 기초한 포논간의 상호작용 혹은 포논 전자간의 상호 작용과 같은 다양한 모델의 적용이 가능함을 알 수 있다.

5. 결론

구면좌표계에서 마이크로/나노스케일의 열전달을 해석하기 위하여 Boltzmann 수송 방정식의 유한체적법을 통한 해석방법을 제시하였다. 기존의 복사 열전달 방정식에서 사용된 Mapping 방법과 직교좌표계에서의 2-D BTE 를 위한 유한체적법을 동시에 적용하였다. 이를 통하여 1 차원 구면좌표계에서 이완 시간 근사를 이용한 회체 모델의 BTE 을 해석할 수 있었고, 해석 결과를 복사 열전달 방정식의 exact solution 과 비교하여 타당성을 검증하였다. 따라서 기존에 존재하는 다양한 모델들을 적용할 수 있음을 제시하였다.

후 기

본 연구는 마이크로열시스템연구센터(ERC)의 지원으로 수행되었습니다.

- (1) Zeng, T., Liu, W., 2003, "Phonon heat conduction in micro and nano core shell structures with cylindrical and spherical geometries," *Journal of Applied Physics*, Vol. 93, No. 7, pp. 4163~4168.
- (2) Chen, G., 1996, "Nonlocal and nonequilibrium heat conduction in the vicinity of nanoparticles," *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 118, pp. 539 ~ 545.
- (3) Narumanchi, S. V. J., Murthy, J. Y., Amon, C. H., 2005, "Comparison of Different Phonon Transport Models for Predicting Heat Conduction in Silicon-on-Insulator Transistors," *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 127, No. 7, pp. 713 ~ 723.
- (4) Narumanchi, S. V. J., Murthy, J. Y., Amon, C. H., 2006, "Boltzmann transport equation-based thermal modeling approach for hotspots in microelectronics," *Heat and mass Transfer*, Vol. 42, No. 6, pp. 478 ~ 491.
- (5) Pop, E., Dutton, R. W., Goodson, K. E., 2005, "Monte Carlo simulation of Joule heating in bulk and strained silicon," *Applied Physics Letters*, Vol. 86, 082101.
- (6) Volz, S.G., Chen, G., 2000, "Molecular dynamics simulation of thermal conductivity of silicon crystals," *Physical Review B*, Vol.61, No.4, pp.2651~2656.
- (7) Narumanchi, S. V.J., 2003, Simulation of heat transport in sub-micron conduction, *Ph. D.thesis*, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Pennsylvania, USA.
- (8) Tien, C. L., Majumdar, A., Gerner, F. M., 1998, *MICROSCALE ENERGY TRANSPORT*, Taylor & Francis, Washington D. C., pp 3~94.
- (9) Carson, B. G., Lathrop, K.D., 1968, "Transport theory - The method of Discrete Ordinates," *Computing methods in Reactor Physics*, New York, pp.183-184.
- (10) Chui, E. H., Raithby, G.D., Hughes, P.M.J., 1992, "Prediction of Radiative Transfer in Cylindrical Enclosures with the Finite Volume Method," *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol.6, No.4, pp.605-611.
- (11) Kim, M. Y., Baek, S.W., 1997, "Analysis of Radiative Transfer in Cylindrical Enclosures using the Finite Volume Method," *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol.11, No.2, pp.246-252.
- (12) Vistanka, R. , Crosbie, A., 1967, "Radiative Transfer Through a Spherical Shell of Absorbing-Emitting Gray medium," *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol.7, pp.871~889.
- (13) Modest, M.F.,1993, *Radiative Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York.