시변환 스트레스 조건에서의 와이블 분포의 모수 및 가속 모수에 대한 베이시안 추정을 사용하는 이산 시간 접근 방법

정인승†

A Discrete Time Approximation Method using Bayesian Inference of Parameters of Weibull Distribution and Acceleration Parameters with Time-Varying Stresses

In-Seung Chung

Key Words : Bayesian modeling, discrete time approximation method, time-varying stress, Winbugs

Abstract

This paper suggests a method using Bayesian inference to estimate the parameters of Weibull distribution and acceleration parameters under the condition that the stresses are time-dependent functions. A Bayesian model based on the discrete time approximation is formulated to infer the parameters of interest from the failure data of the virtual tests and a statistical analysis is considered to decide the most probable mean values of the parameters for reasoning of the failure data.

1. 서 론

가속수명시험을 위해서는 복수의 시험조건에서 다수의 시험 샘플의 고장발생시간을 계측하여 와이블 분포를 가정하여 형상모수를 계산하고 가속 시험을 위한 스트레스에 대한 가속 모수를 정하는 것이 일반적 방법이다. 그러나, 이 방법은 비교적 안정된 데이터 분석 결과를 주는 이점이 있으나 필요한 데이터를 수집하는데 시험 시간이 과다하게 소요되어 현실적 적용에 한계가 있다. 또한 실제의 상황에서는 가속 시험을 시변환 스트레스(time-varying stress) 조건하에서 실시하는 것이 필요한 경우가 대부분이다. 현재의 가속 시험 분석용 소프트웨어는 Nelson 이 제안한 누적손상모델(cumulative damage model)이 주로 사용되고 있다. 이 경우 지수 분포와 와이블 분포를 가정하여 해석이 시도되고 있다[2][6].

본 논문에서는 베이시안 모델링(Bayesian modeling)을 사용하고 수명이 와이블 분포를 갖는 경우에 대해서 단수 또는 복수의 가속인자를 갖는 일반 가속 모델(general acceleration model)을 가정하여 와이블 분포의 모수와 가속모수를 추정하는 방법을 제시한다.

† 회원, 만도 중앙연구소
E-mail : ischung@mando.com
TEL : (031)680-5300 FAX : (031)680-5481

2. 이론 전개에 대한 가정

본 논문에서는 이론 전개에 다음의 가정을 설정하여 베이시안 모델링을 구성한다.

① 고장의 .확률 분포는 와이블 분포로 표현할 수 있으며 이 분포의 형상 모수는 인가되는 스트레스 조건에 관계없이 일정한 값을 갖는다.

② 인가된 스트레스는 시간에 대한 함수로 표현되고 본 논문의 예제에서는 스텝 스트레스를 가정하고 있다.

③ 인가된 스트레스의 가속모수는 항상 양의 값을 가지며 이는 스트레스가 증가하면 와이블 분포의 척도모수가 감소하여 특성수명이 단축되는

것을 의미한다.

3. 기본 개념 및 이론

3.1 기본 개념

본 연구에서는 와이블 분포에 대한 확률밀도함수와 신뢰도 함수를 시간에 대한 연속 함수에서 일정 단위 시간으로 분할된 이산 시간 구간 (discrete time interval)으로 변화시켜 이론을 전개한다[4]. 이와 같이 연속적 시간이 아닌 이산 시간 구간을 사용하는 이유는 초기점으로 부터의 누적 손상에 의한 효과를 수식으로 표현하는데 편리하기 때문이다. 여기서 실제 시간 $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_L < \infty$ 을 이산 분할하고 A_j 가 구간 $[a_{j-1}, a_j)$ 를 나타내고 이 경우 첫 번째 구간은 $[0, a_1)$ 으로 표현된다. 여기서 일정 구간으로 나누어진 이산분포의 j 번째 구간의 확률밀도는 $f_j = \Pr(T \in A_j) = S_j - S_{j+1}$ 이고 $S_j = \Pr(T > a_{j-1}) = f_j + f_{j+1} + \cdots + f_L$ 이다.

그리고 j 번째 구간에서의 고장률 함수는 $h_j = \Pr(T \in A_j \mid T > a_{j-1}) = f_j / S_j$ 로 표현된다.

또한, $S_{j+1}/S_j = 1 - h_j$ 의 관계에 의해서 초기부터 이전의 r 개의 연속적 구간에서 사상(event)이 발생하지 않은 $r+1$ 구간에서의 신뢰도 함수는 $S_{r+1} = \prod_{j=1}^{r}(1-h_j)$ 이고 우도함수는 각각의 i 개체와 구간 j 에 대한 관측 중단 변수 w_{ij} 가 구간 $(a_{j-1}, a_j]$ 의 끝점 a_j 에 대해서 설정한다. 즉, 이 구간에서 사상이 발생하면 w_{ij} 는 1 이 되고 그 이전 구간의 w_{ij} 는 모두 0 으로 설정된다.

3.2 이산 와이블 고장률 모델

기준 고장률 함수를 $\lambda(t,x) = \lambda_0(t)\exp(\beta x)$ 로 정의하면 가속 인자를 갖는 와이블 고장률 함수는 $h(t,x) = e^{v\gamma}\lambda\gamma t^{\gamma-1}$ 로 표현되고 여기서 γ 는 형상 모수를 나타낸다. 또한, 변수벡터 x_{ij} 를 고려하여 $v_{ij} = \beta_j x_{ij}$ (여기서, i 는 개체 인덱스, j 는 시간 구간 인덱스)로 표시하고 $\lambda_0 = const$ 로 가정하고. 구간 $[a_{j-1}, a_j)$ 에서 $x_{ij} = const$ 로 가정한다.

여기서 누적 고장률 함수와 신뢰도 함수의 관계식은 식(1)과 같다.

$$S(t) = \exp(-H(t)),\ H(t) = \int_0^t h(u)du \qquad (1)$$

이산 구간에 대해서 $H(t)$ 는 식(2)와 같이 표현할 수 있다[3].

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_0^{a_1} h(u)du + \int_{a_1}^{a_2} h(u)du + \cdots + \int_{a_{j-1}}^{a_j} h(u)du + \cdots \\ &\quad + \int_{a_{J-1}}^{a_J} h(u)du \\ &= \int_0^{a_1} \lambda_0 e^{\gamma\beta x_{i1}}\gamma u^{\gamma-1}du + \int_{a_1}^{a_2} \lambda_0 e^{\gamma\beta x_{i2}}\gamma u^{\gamma-1}du + \cdots \\ &\quad + \int_{a_{j-1}}^{a_j} \lambda_0 e^{\gamma\beta x_{ij}}\gamma u^{\gamma-1}du + \cdots + \int_{a_{J-1}}^{a_J} \lambda_0 e^{\gamma\beta x_{iJ}}\gamma u^{\gamma-1}du \end{aligned} \qquad (2)$$

여기서 모든 i 에 대해서 $x_{ij} = x_j$ 이고 모든 x_j 는 구간 $[a_{j-1}, a_j)$ 에서 일정한 값을 갖는다고 가정하면 j 구간의 H_j 는 식(3)과 같이 표현된다[1].

$$H_j = (\lambda_0 e^{\gamma\beta_j x_j})(a_j^\gamma - a_{j-1}^\gamma) \qquad (3)$$

여기서 j 구간에서의 신뢰도 조건부 확률 q_j 는 구간 기간 $d_j = d = const$ 로 가정하면 식(4)와 같이 표기할 수 있다.

$$\begin{aligned} q_j &= \exp(-H_j) \\ &= \exp[-\lambda_0 e^{\gamma\beta_j x_j}\{(dj)^\gamma - (d(j-1))^\gamma\}] \\ &= \exp[-\lambda_0 e^{\gamma\beta_j x_j} d^\gamma \{j^\gamma - (j-1)^\gamma\}] \end{aligned} \qquad (4)$$

으로 표현되고 다시 변형시키면 식(5)가 된다.

$$q_j = \exp[-e^{\gamma\beta_j x_j}\exp(\lambda^* + \gamma\ln(d) + \ln(\phi_j)] \qquad (5)$$

여기서, $\lambda^* = \ln\lambda_0$, $\phi_j = j^\gamma - (j-1)^\gamma$ 임을 나타낸다. 따라서, j 구간에서의 고장률 함수는 식(6)으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} h_j &= 1 - q_j \\ &= 1 - \exp[-\exp(\lambda^* + \gamma\beta_j x_j + \ln(\phi_j) + \gamma\ln(d))] \end{aligned} \qquad (6)$$

또한, $S_j = \exp[-e^{\gamma\beta_j x_j}\lambda_0 (j-1)^\gamma d^\gamma]$ 로 부터 j 구간에서의 우도(likelihood)를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f_j = h_j S_j &= \{1 - \exp(-e^{\gamma\beta_j x_j + \lambda^* + \ln(\phi_j d^\gamma)})\} \\ &\quad \times \prod_{k=1}^{j-1}\exp(-e^{\gamma\beta_k x_k + \lambda^* + \ln(\phi_k d^\gamma)}) \end{aligned}$$

그런데, j 구간에서의 i 개체의 사상확률 π_{ij} 는

이 구간에서의 고장률로 생각할 수 있다. 즉, $\pi_{ij} = h_j = 1 - \exp(-e^{\gamma\beta_j x_j + \lambda^* + \ln(\phi_j d^\gamma)})$ 으로 표시된다. 한편, 와이블 분포에서의 척도모수 η 는 식(7)과 같이 표현된다.

$$\eta = \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{1}{e^{\beta x_j}}\right), \quad \lambda_0 = \exp(\lambda^*) \qquad (7)$$

3.3 Winbugs 를 사용한 베이시안 모델링

3.3.1 이산 시간 접근 방법(Discrete Time Approximation Method)를 사용한 베이시안 모델

j 구간에서의 i 개체의 사상 확률을 π_{ij} 라 하고 관찰된 고장 데이터 또는 관측 중단 데이터의 구간 인덱스를 r_i 라 하면 베이시안 모델의 기본 형태는 식(8)과 같다. 이때 $\beta_j = \beta = const$ 로 가정한다.

$w_{ij} \sim Bernoulli(\pi_{ij})$, 이때

$i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,r_i$

$$\ln(-\ln(1-\pi_{ij})) = \gamma\beta x_j + \lambda^* + \ln(\phi_j d^\gamma) \qquad (8)$$

여기서 $\phi_j = j^\gamma - (j-1)^\gamma$ 이고 보수 로그-로그함수 대신 수렴성이 우수한 로짓(logit) 함수를 사용하여 π_{ij} 를 다시 표현하면 식(9)가 된다.

$$\mathrm{log}it(\pi_{ij}) = \gamma\beta x_j + \lambda^* + \ln(\phi_j d^\gamma) \qquad (9)$$

그리고, Winbugs 에서의 모델링을 위한 각 파라미터에 대한 사전분포는 식(10)과 같이 설정한다.

$$\beta \sim N(\mu, \tau), \quad \gamma \sim Gamma(1, 0.001) \qquad (10)$$

여기서 정규 분포의 평균 μ 와 분산의 역수 τ 는 적절한 임의값으로 설정하나 예상되는 평균과 같은 차수를 갖도록 하는 것이 수렴에 유리하다.

3.3.2 R 언어를 이용한 베이시안 모델에 대한 랜덤 초기값 발생

Winbugs 로 베이시안 모델을 실행하기 위해서는 가속 스트레스 데이터와 고장 데이터를 입력하고 임의 초기값을 지정하는 것이 필요하다. 그런데 모수를 추정하기 위해서는 랜덤하게 발생된 다수의 초기값에 의한 모수의 계산값의 분포가 필요하다. 이때 통계용 R 언어에서 Winbugs 로 작성된 베이시안 모델의 서브루틴을 실행시키는 것이 효과적이다. 즉, R 언어로 작성된 주 프로그램에서 초기값의 난수를 발생시켜 이 값들이 베이시안 모델의 서브루틴에서 사용하도록 작성한다[5].

4. 가상 시험에 대한 결과 분석

본 논문에서 사용하는 예제는 모두 가상의 시험 데이터이고 이 데이터는 미리 선정된 파라미터의 가속모수를 사용하여 정의된 이산 확률 분포 (discrete density distribution)를 계산하고 이 분포에 따라서 난수를 발생시켜 얻은 고장 데이터이다. 여기서 j 구간의 이산 확률 밀도를 계산하기 위해서는 $f_j = h_j S_j$ 의 관계식을 사용한다. 따라서, $\beta_j = \beta$ 이고 $j \ge 2$ 이 경우에 식(11)로 계산된다.

$$f_j = \prod_{k=1}^{j-1} \exp\{-e^{\gamma\beta x_k} \lambda_0 (k^\gamma - (k-1)^\gamma) d^\gamma\} - \prod_{k=1}^{j} \exp\{-e^{\gamma\beta x_k} \lambda_0 (k^\gamma - (k-1)^\lambda) d^\gamma\} \qquad (11)$$

한편 최초값 $j = 1$ 의 경우는 식(12)로 표현된다.

$$f_1 = 1 - \exp(-e^{\gamma\beta x_1} \lambda_0 d^\gamma) \qquad (12)$$

4.1 역승법 관계를 갖는 수명-스트레스 데이터

본 논문에서는 스텝-스트레스에 의한 가상의 가속 시험을 진행하는 경우에 발생되는 고장 데이터를 사용하여 미리 선정된 모수의 추정을 하는 예제를 분석하였다. 인가되는 스트레스가 시간에 대한 3-스텝의 전압으로 가해지는 경우의 와이블 분포를 갖고 역승볍에 의한 가속 모수를 추정하여 미리 설정된 모수와의 적합성을 확인하였다. 따라서 스텝 전압 스트레스는 식(13)과 같이 주어진다.

$$x_j = \begin{cases} \ln 3 & 1 \le j \le 50 \\ \ln 5 & 51 \le j \le 80 \\ \ln 6 & 81 \le j \le 160 \end{cases} \qquad (13)$$

역승법 모델의 고장률 함수는 식(14)와 같다.

$$h(t, x_j) = \lambda_0 e^{\gamma\beta x_j} \gamma t^{\gamma-1} \qquad (14)$$

이 가상 시험에서 사용되는 모수는 $\gamma = 3.2$, $\beta = 0.24$ 및 $\lambda^* = -22.2356$ 으로 가정되었고 구간 기간(time interval)은 $d = 10$ 으로 설정하였다. 이 가상 시험에서 발생된 랜덤 고장 데이터는 30 개로 선정하였다. 이 가상 시험 예에서의 베이시안 모델은 아래와 같다.

Model : IPL Weibull

for ($i = 1, N$) {

$w_{i,r_i} = fail_i$

$$\text{for } (j = 1, r_i - 1) \{ w_{ij} = 0 \}$$

$$\text{for } (j = 1, r_i) \{$$

$$w_{ij} \sim Benroulli(\pi_{ij})$$

$$\log it(\pi_{ij}) = \gamma\beta \ln(x_j) + \lambda_j$$

$$LL_{ij} = w_{ij} \ln(\pi_{ij}) + (1 - w_{ij}) \ln(1 - \pi_{ij})$$

$$G_{ij} = 1 / \exp(LL_{ij}) \}$$

$$\lambda_0 = \exp(\lambda^*)$$

$$\text{for}(i = 1, N) \{$$

$$\lambda_{acc} = \lambda_0 \exp(\gamma\beta x_j)$$

$$\eta = \left(\frac{1}{\lambda_{acc}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\text{for } (j = 1, M) \{$$

$$\lambda_j = \lambda^* + \ln(j^\gamma - (j-1)^\gamma) + \gamma \ln(d) \}$$

priors:

$$\beta \sim N(\alpha_1, 0.1)$$

$$\lambda^* \sim N(\alpha_2, 0.1)$$

$$\gamma \sim Ga(1, 0.001) \}$$

여기서 N은 고장 또는 관측 중단 데이터 갯수, M은 시간 구간의 총수이고 α_1, α_2는 경험적 정보에 의해 임의로 주어진 상수이다. 그런데 이러한 모델링의 Winbugs 프로그램을 실행하면 초기값 또는 사전 분포에 따라 모수의 계산 결과에 상당한 차이가 나타난다. 여러 개의 모수를 동시에 추정함에 따라 초기값에 의한 편차가 커지는 것으로 사료된다. 이와 같은 현상은 회귀변수 x_j가 시간의 함수인 경우에 현저히 나타난다. 이를 극복하기 위한 방법으로 초기값이나 사전 분포에 대해서 강건한 모수를 고정시키고 재차 타 모수에 대한 베이시안 모델을 이용하여 추정하는 방법이 합리적이다. 이 때 하나의 모수의 평균값을 결정하기 위해서 초기값에 대한 난수를 발생시켜 이를 이미 작성된 베이시안 모델의 초기값으로 대입하여 다수의 경우에 대한 결과에 통계적 처리로 결정하는 것이 가장 정확하다고 판단된다. Fig.. 1과 Fig. 2는 각각 다른 초기값으로 베이시안 모델을 사용하여 계산된 30 가지 경우에 대한 γ 와 β의 히스토그램이다. 이 방법으로 예측된 값은 $\gamma = 3.2236$, $\beta = 0.2457$ 및 $\lambda^* = -22.507$로 계산되어 미리 설정된 모수에 매우 근접함을 알 수 있다. 한편 예측된 모수와 가상시험에서 관찰된 고장 데이터의 적합성을 판단하기 위해서는 각 시간 구간별 신뢰도 함수를 비교하는 것이 적절한 방법이다.

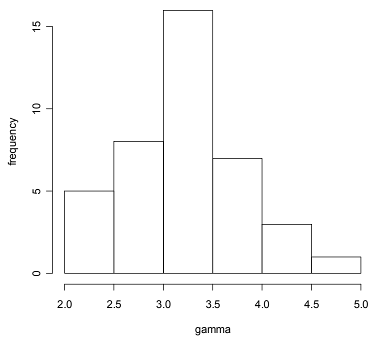

Fig. 1 γ distribution with random initial values

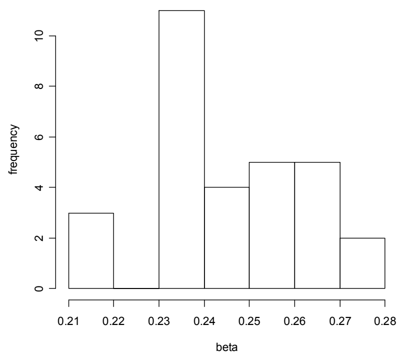

Fig. 2 β distribution with random initial values

따라서 메디안 랭크 법을 사용하면 관찰된 시간 구간별 신뢰도은 식(15)와 같이 계산된다.

$$R_j = 1 - F_j = 1 - \frac{j - 0.3}{n + 0.4} \tag{15}$$

여기서 F_j와 R_j는 각각 고장이 관찰된 j구간에서의 누적확률함수와 신뢰도함수를 나타낸다. 한편, 관측된 데이터에 의한 신뢰도 분포와 모수 추정에 의한 신뢰도 분포의 편차를 식(16)과 같이 정의한다.

$$Dev = \left[\sum_{k=1}^{n} \left(S_{estimated,k} - S_{observed,k} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{16}$$

여기서 $S_{estimated,k}$는 베이시안 추정으로 구해진 모수에 의한 k 번째 고장점에서의 신뢰도이고 $S_{observed,k}$는 관측된 k 번째 고장점에서의 메디안 랭크 법에 의한 신뢰도를 의미한다. 이 가상 시험의 경우 미리 설정된 모수와 베이시안 추정에 의한 모수를 비교하기 위해서 시간구간에 대한 확률

분포와 신뢰도 함수를 Fig.3 과 Fig.4 에서 보여주고 있다. 여기서 청색 실선은 미리 설정된 모수에 의한 확률 분포와 신뢰도 함수이고 적색 점선은 베이시안 추정에 의한 모수로 계산한 확률 분포와 신뢰도 함수를 나타낸다.

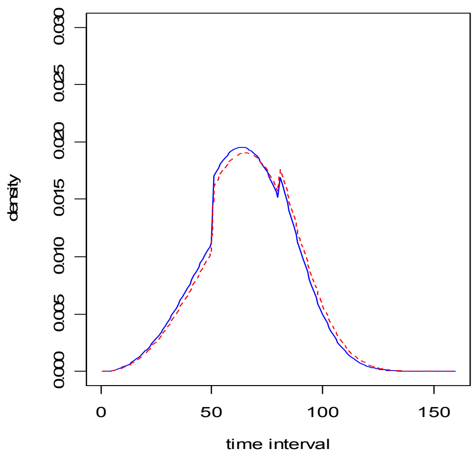

Fig. 3 Probability density functions of predetermined and estimated parameters

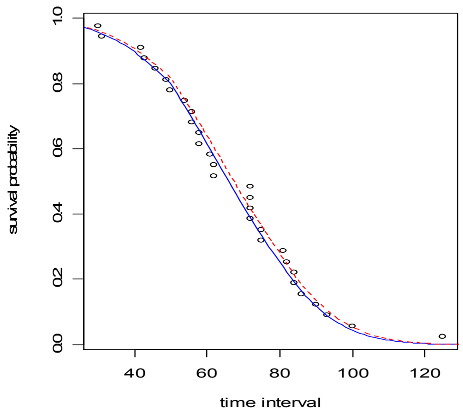

Fig. 4 Reliability functions of predetermined and estimated parameters

4.2 온도-습도 가속 관계를 갖는 수명-스트레스 데이터

본 가상 시험은 온도와 습도가 가속 인자로 작용하는 경우의 가상시험이다. 가속인자인 온도와 습도는 식(17)와 같이 설정하였다.

$$x_{1j}=\begin{cases}398\\398\\378\\378\end{cases},x_{2j}=\begin{cases}60 & 1\le j\le 60\\80 & 61\le j\le 120\\80 & 121\le j\le 180\\60 & 181\le j\le\infty\end{cases} \quad (17)$$

여기서 x_1 은 온도, x_2 는 습도로 설정한다. 이 경우의 와이블 분포의 고장률 함수는 식(18)과 같이 표현할 수 있다.

$$h(t,x)=\lambda_0 e^{\gamma(\beta_1 x_{1j}+\beta_2 x_{2j})}\gamma t^{\gamma-1} \quad (18)$$

그리고 본 가상 시험에서 설정된 모수는 $\gamma=2.1$, $\beta_1=0.008$, $\beta_2=0.012$ 및 $\lambda^*=21.927$ 로 설정하고 구간 기간은 $d=4$ 로 한다. 이 가상 시험에서는 랜덤 발생된 고장 데이터 50 개를 사용하였다. 우선 와이블 분포의 형상모수 γ 를 결정하기 위하여 베이시안 모델을 사용하여 25 개의 초기값에 대한 형상모수의 추정값의 평균을 구한 후 다시 γ 를 고정하는 조건으로 베이시안 모델을 수정하여 다른 모수를 계산한다. 따라서 먼저 25 개의 γ 의 추정값에 대한 평균은 $\gamma=2.05$ 로 계산된다. 그리고 먼저 추정된 형상모수 $\gamma=2.05$ 를 상수로 대입하여 β_1,β_2 및 λ^* 에 대해서 난수 발생된 24 가지의 초기값을 대입하여 모수값을 추정한다. β_1 과 β_2 의 히스토그램이 Fig.5 과 Fig.6 에 나타나 있다.

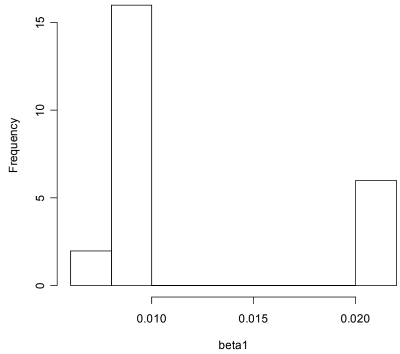

Fig. 5 β_1 distribution with random initial values

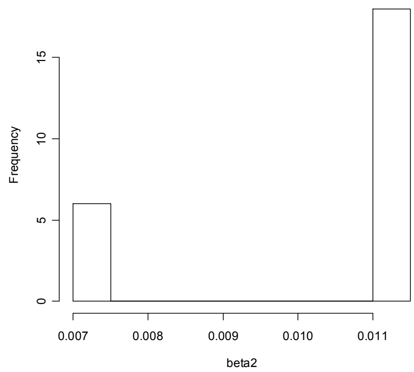

Fig. 6 β_2 distribution with random initial values

그런데 결과에 Fig.5 와 Fig.6 에 나타난 것과 같이 구별되는 2 개의 모수군으로 나누어지는 것을 알 수 있다. 이 결과가 Table 1 에 나타나 있다.

Table. 1 Comparison of parameter groups

	β_1	β_2	λ^*	γ	Dev
Group 1	**0.008472**	**0.011172**	**-21.66**	**2.05**	**0.2567**
Group 2	**0.02187**	**0.007126**	**-31.80**	**2.05**	**0.1973**

4.1.1 Group 1 조건시 결과

이 경우의 신뢰도 함수는 Fig.7 에 나타나 있다.. 여기서 청색 실선은 설정된 모수에 의한 신뢰도함수, 적색 점선은 추정에 의한 신뢰도 함수이고 타점 포인트는 관측 데이터에 의한 신뢰도 함수를 나타낸다.

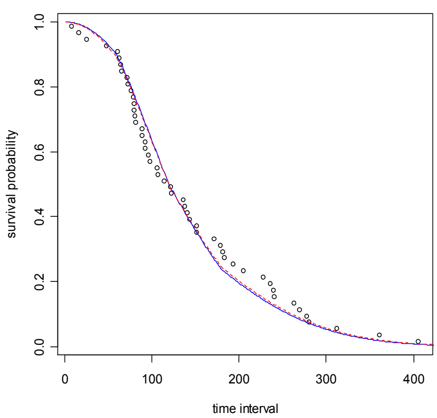

Fig. 7 Estimated PDF and observed PDF with Group 1 parameters

4.1.2 Group 2 조건시 결과

이 경우의 신뢰도 함수는 Fig.8 에 나타나 있다. 가상 시험에 의한 수명 데이터에 Group 1 의 경우에 비해 더욱 근접한 신뢰도 함수를 보여 주고 있다.

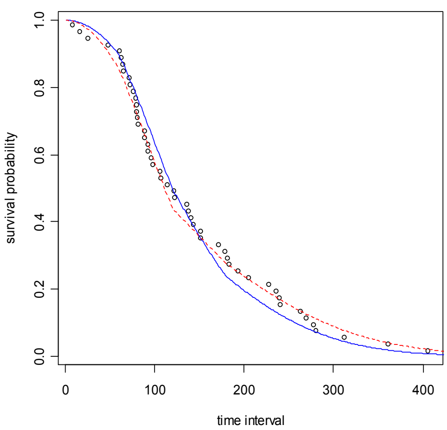

Fig. 8 Estimated PDF and observed PDF with Group 1 parameters

실제로 Group 2 의 편차가 Group 1 의 편차보다 더 작은 것을 확인할 수 있다. 그러나 원래의 확률분포를 알지 못하는 상화에서는 어느 모수군이 더 정확하다고 판단하는 것은 무리가 있고 두 가지 경우 모두 관찰된 데이터에 적합한 결과라고 판단하는 것이 타당하다고 사료된다.

5. 결 론

시간에 따라 변하는 단수 또는 복수의 스트레스에 대해서 가속시험을 하는 경우 고장 데이터가 와이블 분포를 따를 때 베이시안 모델을 사용하여 관심 모수인 형상모수와 가속모수를 추정하고 이에 따른 각각의 스트레스 조건에 대한 와이블 분포의 척도모수도 계산할 수 있는 방법을 다음과 같이 제안할 수 있다.

① 이산시간접근방법(discrete time approximation method)에 의한 베이시안 모델을 이용하여 모든 모수에 대한 추정치를 구한다

② 와이블 분포의 형상모수에 대한 분포를 얻고 평균값을 대표값으로 선정한다.

③ 대표값으로 선정된 형상모수를 고정시키고 타 모수를 추정하여 통계적 분포를 구하고 평균값을 그 모수의 추정치로 결정한다.

참고문헌

(1) B.P.McCall, 1994, "Testing the proportional hazards assumption in the presence of unmeasured heterogeneity ", *Journal of applied econometrics*, Vol.9, 321-344.

(2) Adamantios Mettas and Pantelis Vassiliou, 2002, "Modeling and analysis of time-dependent stress accelerated life data", *Proceedings annual reliability and maintainablility symposium*, Seatle, WA, USA, Jan. 28-31

(3) Peter Congdon, 2003, "Applied Bayesian Modeling", *Wiley*, pp.372-381

(4) John D. Kalbfleisher, Ross L. Prentice, 2002, " The Statistical Analysis of Failure Time Data, 2nd edition", *Wiley*, pp.31-48

(5) William Q Meeker, Luis A. Escobar, 1998, "Statistical Methods for Reliability Data", *Wiley*, pp.343-363

(6) Reliasoft, "Acceleration Life Testing Reference, ALTA ver.6", *Reliasoft Publishing*