피로시험 데이터의 산포를 고려한 스프링의 신뢰성 최적설계

안다운† · 원준호* · 최주호**

Reliability based optimization of spring fatigue design problems accounting for scatter of fatigue test data

Dawn An, Junho Won and Jooho Choi

Key Words : Sensitivity-free approach(민감도 없는 접근법), Uncertainty analysis(불확실성 해석), Dimension reduction method(차원감소법), Kriging interpolation(크리깅-보간법), Fatigue life(피로수명), RBDO(신뢰성 최적설계), Stochastic RSM(통계적 반응표면)

Abstract

Fatigue reliability problems are nowadays actively considered in the design of mechanical components. Recently, Dimension Reduction Method using Kriging approximation (KDRM) was proposed by the authors to efficiently calculate statistical moments of the response function. This method, which is more tractable for its sensitivity-free nature and providing the response PDF in a few number of analyses, is adopted in this study for the reliability analysis. Before applying this method to the practical fatigue problems, accuracies are studied in terms of parameters of the KDRM through a number of numerical examples, from which best set of parameters are suggested. In the fatigue reliability problems, good number of experimental data are necessary to get the statistical distribution of the S-N parameters. The information, however, are not always available due to the limited expense and time. In this case, a family of curves with prediction interval, called P-S-N curve, is constructed from regression analysis. Using the KDRM, once a set of responses are available at the sample points at the mean, all the reliability analyses for each P-S-N curve can be efficiently studied without additional response evaluations. The method is applied to a spring design problem as an illustration of practical applications, in which reliability-based design optimization (RBDO) is conducted by employing stochastic response surface method which includes probabilistic constraints in itself. Resulting information is of great practical value and will be very helpful for making trade-off decision during the fatigue design.

1. 서 론

제품의 설계·제작시에 요구되는 값들이 언제나 확정적인 값만을 갖는다면 설계자의 요구조건을 만족시키는 설계가 비교적 쉽게 이루어질 것이다. 하지만, 실제 제품을 설계하고 제작하는 과정에는 기하 공차와 하중 및 물성치의 오차, 생산 환경의 변화 등의 요인에서 오는 불확실성이 항상 존재한다. 특히, 피로 수명 예측을 위한 S-N 선도는 제한된 시험 데이터로부터 회귀 분석을 통해 구성되기 때문에 산포가 커질 수 밖에 없고, 따라서 S-N 선도 그대로를 설계에 적용하는 것은 매우 위험한 일이다. 하나의 피로 시험 데이터를 확보하는 데에만 해도 장시간의 시험이 요구되기 때문에 신뢰도 높은 S-N 선도를 시험 데이터로부터 얻는 다는 것은 거의 불가능 하며

† 회원, 한국항공대학교, 항공우주 및 기계공학과
E-mail : skal34@nate.com
TEL : (070)7570-0623 FAX : (02)3158-2191
* 한국항공대학교, 항공우주 및 기계공학과
** 한국항공대학교, 항공우주 및 기계공학부 교수

매우 비효율적인 일이다. 이러한 제한적인 현실 대안의 하나로써, S-N 선도의 예측 구간(prediction interval)[1]을 사용하여 P-S-N 을 구성하여 사용하는 방법이 있다. 본 연구에서는, 제한적인 피로시험 데이터로부터 예측한 피로수명의 신뢰도를 높이기 위해 이와 같은 P-S-N 선도를 스프링 설계에 사용하였다. 그리고 신뢰성 해석과 신뢰성 기반 최적설계(Reliability based Design Optimization; RBDO)를 위해 크리깅 기반 차원감소법(Kriging Dimension Reduction Method; KDRM)[2]을 사용하였다. KDRM 에서는, 크리깅 보간을 통한 반응함수의 메타모델을 사용하여 통계적 모멘트를 계산하고, 이를 이용하여 피어슨 시스템(Pearson system)을 통해 반응값의 PDF 를 구축한다. KDRM 은 상대적으로 많은 계산이 요구됨에도 불구하고, 하나의 특정 확률 값 밖에 구해주지 못하는 MPP 방법[3]과 비교하여, 계산 횟수 면에서나 계산 후의 결과물의 이용에 있어서도 매우 효율적인 방법이라 할 수 있다. 본 연구에서는 KDRM 으로부터 계산된 파괴확률의 정확도를 수치예제를 통해 증명하고, 실제 스프링 문제에 적용한다. 스프링 설계 문제에서는 P-S-N 의 95% 안전확률에서 확률 값을 제한 조건으로 하는 신뢰성 기반 최적설계(RBDO)가 수행되며, 통계적 반응 표면(stochastic RSM)을 구성하여, 90%, 95%, 99%의 안전확률 하에서 추가적인 반응값의 계산 없이도 최적화를 수행한다.

2. 크리깅 기반 차원감소법(KDMR)

2.1 가법분해법을 이용한 차원감소법

일반적인 시스템 응답함수의 m 차 통계적 모멘트는 식(1)과 같이 계산된다.

$$E\left[g^m(\mathbf{X})\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}g^m(\mathbf{x})\,f_{\mathrm{X}}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},\quad m=1,...,4 \tag{1}$$

식(1)과 같은 다중적분이 요구되는 복잡한 식을 간단한 식으로 바꾸기 위해 차원감소법에서는 식(2)와 같은 가법분해법을 사용한다.

$$\tilde{g}=\sum_{j=1}^{n}g\left(\mu_1,\mu_2,...,X_j,...,\mu_n\right)-\left(n-1\right)g\left(\mu\right) \tag{2}$$

식(2)를 식(1)에 대입하여 적분하면 통계적 모멘트를 구할 수 있으며, 식(2)의 $\tilde{g}$ 를 구성하는데 크리깅 보간법이 사용된다.

2.2 크리깅 보간법

크리깅 보간법은, 구현하기 어렵고 계산과정이 복잡하지만, 비선형이 강한 함수 구현에 효과적이라고 알려져 있다. 크리깅 모델은 일반적으로, 상수항으로 처리되는 전역모델 $f(x)$ 과 평균이 0 이고 분산이 σ^2 인 정규분포를 따르는 국소변형 $Z(x)$ 을 이용하여 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(x)=f(x)+Z(x) \tag{3}$$

$Z(x)$ 의 공분산 식은 다음과 같이 표현된다.

$$Cov\left[Z(x^i),Z(x^j)\right]=\sigma^2\mathbf{R}\left[R(x^i,x^j)\right]\ i,j=1,\cdots,l \tag{4}$$

여기서 $R(x^i,x^j)$ 은 임의의 두 점 사이의 상관함수이고, $\mathbf{R}$ 은 상관행렬(correlation matrix)로써 상관함수 값을 열성분으로 하는 대각성분이 1 인 대칭행렬이다. 본 연구에서는 p=2 일 때 Gaussian 상관함수가 되고, p=1 일 때 지수함수가 되는 식(5)를 사용하여 상관함수를 정의 하였다.

$$R\left(x^i{}_k,x^j{}_k\right)=\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\theta_k\,|\,x^i{}_k-x^j{}_k\,|^p\right) \tag{5}$$

상관함수가 결정되면 식(6)과 같은 근사모델을 구성하여 수치적분을 통해 통계적 모멘트를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}&\hat{y}(x)=\mathbf{f}'\boldsymbol{\beta}^*+\mathbf{r}'\mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{Y}-\mathbf{F}\boldsymbol{\beta}^*\right),\\&\boldsymbol{\beta}^*=\left(\mathbf{F}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}\right)^{-1}\left(\mathbf{F}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Y}\right)\end{aligned} \tag{6}$$

Table 1 K-S test in various p

Unit : (%)	Eq.(7)	Eq.(8)	Eq.(9)	Eq.(10)	Eq.(11)
	K-S test	K-S test	K-S test	K-S test	K-S test
p=2.0	0.44	0.16	0.75	29.23	2.61
p=1.9	0.23	0.36	0.49	0.39	2.46
p=1.8	**0.19**	0.41	0.39	0.33	2.40
p=1.7	**0.18**	0.49	0.32	**0.30**	2.37
p=1.6	**0.17**	0.52	**0.31**	**0.28**	**2.35**
p=1.5	**0.17**	0.55	**0.30**	**0.28**	**2.33**
p=1.4	**0.19**	0.60	**0.31**	**0.29**	**2.33**
p=1.3	0.22	0.60	**0.32**	0.31	**2.33**
p=1.2	0.26	0.63	0.34	0.34	**2.34**
p=1.1	0.31	0.67	0.38	0.39	2.36
p=1.0	0.38	0.71	0.43	0.45	2.38
p=0.9	0.47	0.81	0.49	0.53	2.42
p=0.8	0.59	0.93	0.57	0.63	2.48
p=0.7	0.74	1.04	0.67	0.75	2.55
p=0.6	0.91	1.20	0.79	0.90	2.63
p=0.5	1.09	1.37	0.93	0.77	2.74
p=0.4	1.28	1.48	1.09	5.38	2.87
p=0.3	1.40	1.43	1.29	10.67	3.03
p=0.2	1.44	1.21	1.58	19.95	3.20

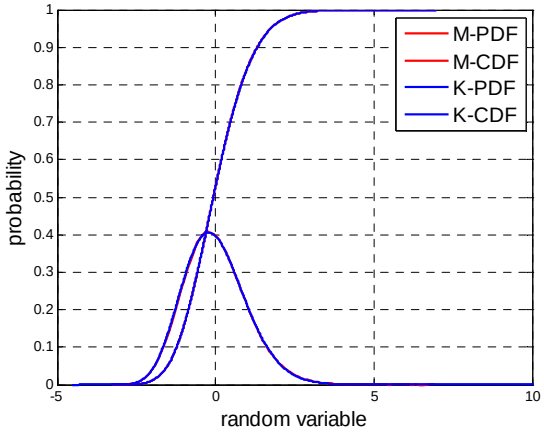
3. 수치예제

3.1 p 값의 선정

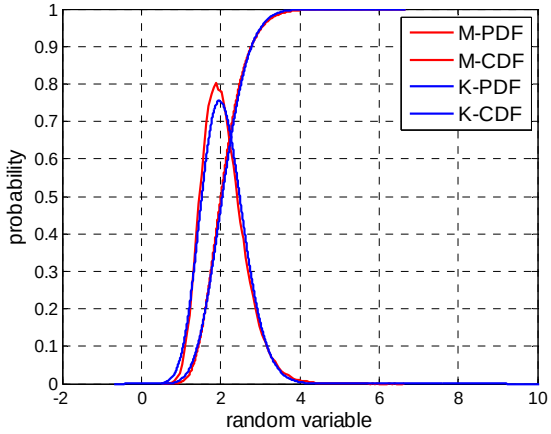
식(5)에서 p 값의 변화에 따른 크리깅 메타모델의 질과 그에 따른 KDRM 의 신뢰성 해석 결과의 정확도를 확인하기 위해 식(7)~(11)과 같은 수치예제를 이용하여 K-S test[4]를 수행하였다. KDRM 의 결과를 1e6 번의 랜덤 시뮬레이션을 이용한 MCS 의 결과와 비교하였으며, 그 값들이 Table 1 에 정리되어있다. p 가 0.4 이하와 2.0 일 때 최대 29.2% 의 오차로 KDRM 의 정확도가 떨어지므로, p 값은 0.5~1.9 사이에서 결정되어야 하며, 1.2~1.8 사이에서 좀더 정확한 값을 나타내므로, 본 연구에서는 p=1.5 를 사용하여 신뢰성 해석과 최적화를 진행하였다.

$$g(X)=\frac{1}{1+X_1^4+2X_2^2+5X_2^4},\quad X_j\sim N(1,0.05) \tag{7}$$

$$g(X)=\exp\left(-\frac{1}{1+100X_1^2+2X_2^2+X_1^2X_2^2}\right),\quad X_j\sim N(1,0.05) \tag{8}$$



(a) equation (7)



(b) equation (11)

Fig. 1 Comparison of MCS & KDRM

$$g(X)=3X_1^2-X_1X_2+X_1X_3+X_3^3,\quad X_j\sim N(0.918,0.21) \tag{9}$$

$$g(X)=\frac{8\times5000X_2}{\pi X_1^3}+\frac{4\times5000}{\pi X_1^2} \tag{10}$$

$$X_1\sim N(14,0.05),\ X_2\sim N(168,0.05)$$

$$g(X)=\frac{X_1^4X_3}{8X_2^3\times40},\quad X_1\sim N(14,0.05), \tag{11}$$

$$X_2\sim N(168,0.05),\ X_3\sim N(793000,0.05)$$

3.2 수치예제의 신뢰성 해석 결과

앞 절에서 사용한 5 개의 수치예제 중에서 K-S test 로부터 가장 작은 오차를 보인 식(7)과 가장 큰 오차를 보인 식(11)의 PDF 와 CDF 를 MCS 의 것과 비교하여 Fig. 1 에 나타내었다. 식(7)의 오차는 0.17%로, Fig. 1 에서 y 축 눈금으로 0.0017 의 차이이기 때문에 MCS 와 거의 일치하여 하나의 그래프처럼 보이며, 식(11)의 오차는 2.33%로, CDF 에서 눈에 보이는 최대 차이가 0.0233 이 된다.

지금까지의 연구 논문에서는 신뢰성 해석 프로그램에 대한 정확도 입증을 위해 평균(mean), 표준편차(standard deviation), 왜도(skewness), 첨도(kurtosis)의 4 차 모멘트와 특정 위치에서의 확률값을 비교 하였다. 하지만 Fig. 1(b)에서 보여지는 것처럼 확률의 오차가 모든 범위에서 일정한 것은 아니다. 따라서, 본 연구에서는 K-S test 를 이용하여 특정 위치에서 뿐만이 아닌 전 범위에 걸친 확률의 최대 오차를 비교대상으로 삼았다. 실제 RBDO 수행시에도 확률값을 이용하기 때문에 K-S test 를 통한 정확도 검증 방법이 타당하다고 생각된다. 허용오차에 대한 기준은 설계 대상이나 목적에 따라 달라질 수 있지만, 대부분의 예제에서 0.5% 이내의 비교적 작은 오차를 보인 수치예제의 결과로부터 KDRM 의 신뢰성 해석 결과에 대한 신뢰도 정도를 가늠할 수 있다.

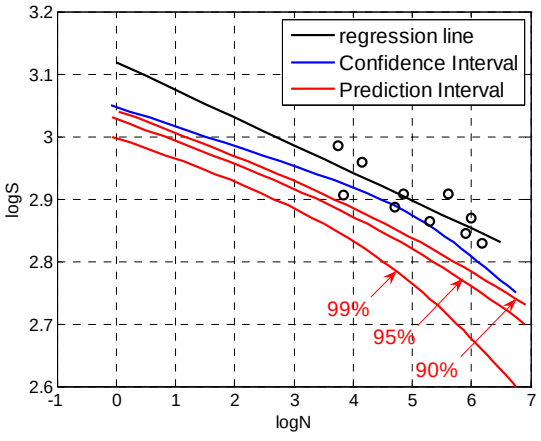


Fig. 2 Regression of fatigue test data

Table 2 Fatigue life in three case

Stress	logN				
705 *MPa*	Regre-ssion	C.I. (95%)	P.I. (90%)	P.I. (95%)	P.I. (99%)
	6.1047	5.4263	4.7865	4.4701	3.7262

4. 피로시험 데이터와 S-N 선도

스프링의 피로수명 신뢰성 최적화를 수행하기 위해 Fig. 2 와 같은 피로시험 데이터를 가상으로 만들었다. 기존에는 피로수명을 예측할 때 데이터로부터 만들어진 검정색의 회귀선을 사용하거나 안전계수의 개념과 유사하게 회귀선을 평행하게 오프셋 시켜 사용하였다. 단순한 오프셋이 아닌 얻어진 데이터에 입각하여 안전확률을 적용시켜 그려진 것이 Fig. 2 의 파란색과 빨간색 선이며, 파란색 선은 안전확률 95%에서 평균에 대한 신뢰구간(Confidence Interval; C.I.)을 나타낸다. 하지만, 신뢰구간은 지금까지 얻어진 데이터를 이용한 것이기 때문에 앞으로 얻어질 데이터에 대한 예측을 포함하고 있지 않다. 따라서 본 연구에서는 Fig. 2 의 빨간색 선인 예측구간의 사용으로 좀더 신뢰성과 안전성이 보장된 설계를 수행하고자 한다. 또한, 안전확률에 따른 각각의 예측구간을 사용한 설계 결과의 비교로 안전과 비용에 대한 설계의 기준을 제공 할 것이다. Table 2 에 하나의 응력값에 따른 수명의 결과를 회귀선과 신뢰구간, 예측구간을 사용하여 각각 나타내었다. 회귀선에서의 수명값은 $10^{6.1}$ 로 무한수명을 나타내지만, 신뢰구간을 사용하여 예측한 수명은 $10^{5.4}$, 예측구간을 사용한 수명은 $10^{3.7}$~$10^{4.8}$ 로 회귀직선을 사용한 무한 수명의 결과와 상당히 동떨어진 결과를 나타낸다. 이로부터 설계대상과 목적에 맞는 안전확률 하에서의 예측구간 사용이 중요함을 알 수 있다.

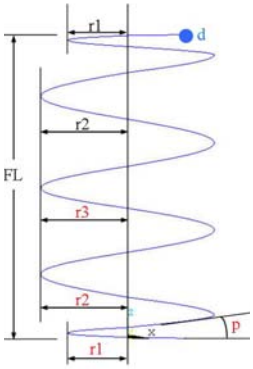


Fig. 3 Variables of the spring

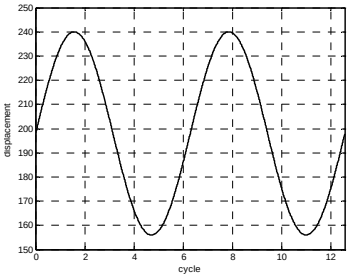


Fig. 4 Load signal

Table 3 Aleatory uncertainties and probabilistic constraints

Objective function f	Volume
Random constants	▪ $\boldsymbol{E} \sim N(206, 6.18)\ GPa$
	▪ $\boldsymbol{d} \sim N(14, 0.14)\ mm$
Design variables X	▪ $\boldsymbol{p} \sim N(p, 0.015p)$ degree
	▪ $\boldsymbol{r1} \sim N(r1, 0.015r1)\ mm$
	▪ $\boldsymbol{r2} \sim N(r2, 0.015r2)\ mm$
	▪ $\boldsymbol{r3} \sim N(r3, 0.015r3)\ mm$
Constraints g_i	◆ $P[5 \le \log N] \ge 0.95$
	◆ $P[1.89 \le k \le 2.31] \ge 0.85$

5. 스프링의 피로수명 신뢰성 최적설계

5.1 문제정의

P-S-N 을 사용한 피로수명의 예측과 신뢰성 해석을 통한 최적설계를 실제 문제에 적용하기 위해 Fig. 3 과 같은 변수를 갖는 서스펜션 스프링을 고려하였다. 각 변수의 산포와 제한 조건은 Table 3 에 나타낸 것과 같다. 하중은 Fig. 4 와 같이 공차시에서 부터 밀착시까지의 정현파 하중으로 적용하였고, P-S-N 선도는 Fig.2 에서의 가상데이터를 이용하여 구한 것을 사용하였다.

5.2 확률 제한 조건을 이용한 신뢰성 최적설계

본 절에서는 하나의 P-S-N 선도에 대해서만 스프링의 피로수명 최적설계를 수행한다. 안전확률 95%에서의 확정적인 P-S-N 으로부터 피로수명을 계산하고, KDRM 에서 신뢰성 해석을 통해 피로수명이 10^5 이상이 될 확률이 구해지면, 이것이 제한조건이 되어 95% 이상이 되는 설계점을 찾는 방법이다. 이를 다음 절의 방법과 비교하기 위해 RBDO Ⅰ 이라고 한다. RBDO Ⅰ을 수행한 결과가 Talbe 4 에 나타나 있다. 최적화 모델은 초기 모델에 비해 부피가 5.6% 늘어났지만, 피로수명이 10^5 보다 클 확률이 17% 밖에 안되던 것에서 96%로 증가했고, 응력의 감소에 따른 스프링 상수의 감소라는 상충되는 현상에도 불구하고, 역시 제안된 설계 조건을 만족할 확률이 24%에서 92%로 증가하여 신뢰도 높은 설계를 완성하였다. Fig. 5 는 초기모델과 최적화 모델의 형상비교를 나타낸다.

5.3 통계적 반응표면을 이용한 신뢰성 최적설계

Table 4 Results of RBDO using stochastic RSM

		Life (P_r)	Spring rate (P_r)	Volume (mm^3)
Initial		0.1697	0.2440	84148 (+0%)
Opt.	RBDO Ⅰ (95%)	0.9611	0.9159	88850 (+5.6%)
	RBDO Ⅱ (90%)	0.9591	0.8966	88597 (+5.3%)
	RBDO Ⅱ (95%)	0.9656	0.8648	89694 (+6.6%)
	RBDO Ⅱ (99%)	0.9693	0.8737	92190 (+9.6%)

앞 절에서 제한조건이었던 확률값을 이용하여 반응표면을 구성하면, 통계적 반응면이 되며, 이 통계적 반응면으로 부터 확정적 설계에서의 반응표면법(RSM)[5]과 같은 방법으로 원하는 성능을 가진 스프링의 설계점을 찾을 수 있다. 앞 절과의 비교를 위해 이를 RBDO Ⅱ 라고 한다. RBDO Ⅱ는 95%의 안전확률에서 반응표면을 구성할 때, 90%와 99%의 안전확률에 따른 반응표면 역시 한번에 구성할 수 있기 때문에 추가적인 계산 없이도, 각각의 다른 안전확률에서 최적의 설계점을 찾을 수 있다는 장점이 있다. 계산된 응력 값을 불러 들여 식으로 표현되는 P-S-N 선도의 각각의 안전확률에서의 반응값을 얼마든지 구할 수 있기 때문이며, 이러한 각각의 안전확률에 대한 설계 결과로부터 신뢰성 있고 안전한 설계와 설계 비용간의 선택의 문제에 기준을 제시해 줄 수 있다. Table 4 의 안전확률에 따른 부피증가의 결과에서 이러한 내용을 확인 할 수 있다. 반면, 같은 95%의 안전확률에서 수행된 최적화 결과임에도 불구하고, RBDO Ⅱ에서의 성능이 RBDO Ⅰ의 결과보다 떨어지는 것을 Table 4 에서 확인 할 수 있다. 이는, 반응표면 자체가 근사화된 모델을 이용하기 때문에 일어날 수 있는 일이며, RSM 의 개선 정도에 따라 달라질 수 있는 문제이므로 정확한 근사를 위한 RSM 의 연구가 중요하다고 할 수 있다. 각 안전확률에서의 최적화 형상이 Fig. 6 에 나타나 있다.

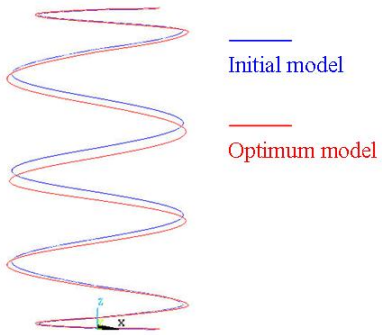


Fig. 5 Optimum shape of spring using RBDO Ⅰ

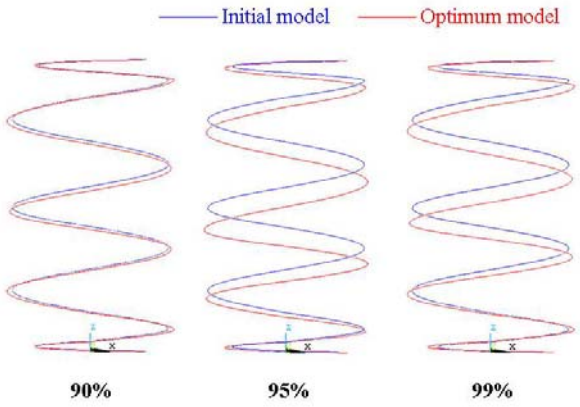


Fig. 6 Optimum shape of spring using stochastic RSM(RBDO Ⅱ)

6. 결 론

본 연구에서는 크리깅 보간법을 이용한 차원감소법을 제안하였고, 5 개의 예제 함수를 통해 적합한 상관함수 지수 p 의 값을 찾았다. K-S test 를 통한 신뢰성 해석 결과의 비교가 타당하다는 생각에 따라 KDRM 의 정확도를 K-S test 를 통해 입증하였다. 제한적인 데이터로부터 피로수명을 예측하기 위해 P-S-N 선도를 이용하였고, RBDO Ⅰ와 RBDO Ⅱ의 두 가지로 서스펜션 스프링의 최적화를 진행하였다. RBDO Ⅰ에서는 최적화 모델의 부피가 5.6% 증가했지만, 피로수명에 대한 신뢰도를 17%에서 96%로 증가시켰고, 요구된 스프링 상수의 신뢰도 또한 24%에서 92% 증가시켰다. RBDO Ⅱ에서는 각 안전확률에 따른 최적화 결과의 비교를 통해 설계의 기준을 제시하였다.

후 기

이 논문은 2008 년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2008-521-D00021).

참고문헌

(1) Douglas, C. Montgomery, George, C. Runger and Norma, F. H., 2004, “Engineering Statistics 3ed.,” *John*

Wiley & Sons, Inc., New York.
(2) Choi, C. H., Choi, J.H. and Won, J. H., 2007, "Improving the Dimension Reduction Method (DRM) in the uncertainty analysis and application to the reliability based design optimization," *7th WCSMO*.
(3) Rackwitz, R. X., 2001, "Reliability analysis—a review and some perspectives," *Structural Safety*, 23, 365-395.
(4) Achintya, H. and Sankaran, M., 2000, "Probability, Reliability, and Statistical Methods in Engineering Design," *John Wiley & Sons, Inc.*, New York.
(5) Kai, Y. and Basem, E. H., 2008, "Design for Six Sigma," *McGraw-Hill*., New York.
(6) Park, T. G., Choi, C. H., Won, J. H. and Choi, J.H., 2007, "A study on the fatigue reliability analysis accounting for scatter of fatigue test data," *7th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, Seoul, Korea, May.