

피로수명예측을 위한 반응표면근사화와 절충의사결정문제의 응용

백석흠* · 조석수** · 장득열** · 주원식†

Response Surface Approximation for Fatigue Life Prediction and Its Application to Compromise Decision Support Problem

Seok-Heum Baek, Seok-Swoo Cho, Deuk-Yul Jang and Won-Sik Joo

Key Words: Multi-objective Optimization(다목적최적설계), Chebyshev Orthogonal Polynomials(Chebyshev 직교다항식), Compromise Decision Support Problem(절충의사결정문제), Preference(선호), Fatigue Life(피로수명), Fatigue Notch Factor(피로노치계수)

Abstract

In this paper, a versatile multi-objective optimization concept for fatigue life prediction is introduced. Multi-objective decision making in engineering design refers to obtaining a preferred optimal solution in the context of conflicting design objectives. Compromise decision support problems are used to model engineering decisions involving multiple trade-offs. These methods typically rely on a summation of weighted attributes to accomplish trade-offs among competing objectives. This paper gives an interpretation of the decision parameters as governing both the relative importance of the attributes and the degree of compensation between them. The approach utilizes a response surface model, the compromise decision support problem, which is a multi-objective formulation based on goal programming. Examples illustrate the concepts and demonstrate their applicability.

1. 서론

철도차량의 피로수명예측은 안전성과 신뢰성을 확보하고 높은 품질을 위한 중요한 관점이다. 일반적으로 화차(freight train)는 복잡한 하중조건(동하중)을 받고 있고, 25년 이상 사용할 수 있는 수명이 요구되기 때문에 최적설계 과정에서 피로수명을 고려하는 내구성 만족이 중요하다.

이것은 최적설계 과정에서 추가의 제한조건으로 최소 피로수명 값을 사용해서 접근할 수 있다.⁽¹⁾ 하지만 피로수명은 회수(cycle)의 함수이기

때문에 미분 가능성이 불확실하고 최대 응력값보다 응력범위에 더 의존적인 경우가 많아 최적설계 적용에 제약이 따른다. 이 영역의 보고에서 CAE와 연계한 현실적인 예제와 적용방법은 광병만 등^(2,3), Merkel 등⁽⁴⁾, Wang 등⁽⁵⁾, Mrzyglod 등⁽⁶⁾의 논문에서 유한요소해석과 피로해석을 연결하여 최적설계를 수행하는 과정을 볼 수 있다.

유한요소해석 기반의 피로해석은 재료 물성치, 하중처리, CAD기반 유한요소모델링의 3가지 입력항목과 관련된다. 이때 피로수명을 고려한 최적설계는 다음 두 가지의 수치적 잡음(numerical noise)이 응답값인 수명에 포함될 수 있다.

(1) 레인플로사이클집계(rainflow cycle counting) 과정⁽⁷⁻¹²⁾

(2) 설계변수의 변화에 따른 유한요소모델의 임계요소(critical element) 변화

† 회원, 동아대학교 기계공학과

E-mail : wsjoo@daunet.donga.ac.kr

TEL : (051)200-7641 FAX : (051)200-7656

* 회원, 동아대학교 대학원 기계공학과

** 회원, 강원대학교 기계자동차공학부

레인플로사이클집계 과정은 변동하중이력을 일 정진폭 데이터와 비교할 수 있는 단순화된 하중 이력으로 줄이는 것이다. 정수로 분류되는 단순 화된 하중이력은 사이클집계 과정에서 낮은 대역 범위를 제외한다. 따라서 피로관점에서 볼 때 피 로손상이 최대응력 값보다 응력범위에 의존적인 경우 피로수명 계산의 오차가 발생할 수 있다.

또한 피로해석의 결과는 유한요소모델의 임계 요소 형상 변화에 민감하다. 임계요소 형상 변화 는 도함수 기반의 최적설계문제에서 불연속점이 생성되어 큰 오차의 원인이 된다.

반응표면모델(response surface model)의 유연한 성질(smoothness)은 피로해석 과정에서 수치적인 잡음을 효과적으로 제거할 수 있다.^(13,14) 일반적인 반응표면모델은 n 개($n>1$)의 설계변수에서 예측된 응답 y 의 관계를 근사한 것으로 낮은 차수의 다 항식 형태인 유연한 함수이다. 이러한 유연한 함수의 성질은 수치해석과정의 수치적 잡음을 매끄 럽게 하는 바람직한 특성을 가진다. 이것은 설계 자에게 응답의 전체적인 관점(global view)에 대한 정보를 제공한다.⁽¹⁵⁾ 이 유연성은 간단한 도함수 기반의 최적화 계산을 가능하게 한다. 또한, 응력 해석 및 피로해석 등의 서로 다른 영역을 담당하 는 해석분야를 연결하고 상호 데이터 교환을 효 율적으로 다룰 수 있다.

이상과 같은 관점에서 본 연구에서는 피로수명 예측을 위한 최적설계에 대해 2단계 반응표면모 델의 응용을 제안한다. 응력 및 피로수명예측을 위한 반응표면모델은 Chebyshev 직교다항식 (Chebyshev orthogonal polynomial)^(6,16-19)을 이용한다. 피로수명 계산은 응력-수명 곡선에 공칭동적 응력을 고려하기 위해 피로노치계수(fatigue notch factor)^(20,21)를 적용하였다. 피로노치계수는 유한요 소모델에 균열을 도입하지 않고 계산된다.

적용 예제로 컨테이너 화차의 체동 브라켓 엔 드빔(end beam)의 피로파손에 대해 제안한 방법 의 유효성을 설명한다. 이 작업은 피로수명 증가 를 고려한 최소응력과 최소중량으로 구성되는 다 중목적함수(multi-objective function)로 생각할 수 있다. 다중목적함수에서 피로수명 증가를 위한 효과적 안전 절충(safety trade-off)은 절충의사결 정문제(compromise decision support problem)⁽²²⁻³¹⁾를 도입하여 결정하였다.

2. 피로수명예측모델

2.1 Chebyshev 직교다항식

설계변수가 직교한다는 것은 어떤 변수의 효과 가 다른 변수의 효과에 영향을 미치지 않는다는 것이다. 따라서 응답의 변동크기를 해석하는 경 우(예를 들면 불확실성, 피로해석) 설계변수를 직 교시킨 실험계획이 효율적이다. 또한 직교다항식 은 각항이 서로 독립적이기 때문에 계수의 추정을 저차항에서 고차항으로 축차적으로 구한다. 이것은 고차항의 계수를 모르거나 계수차이가 크 게 되더라도 기저(base)를 정규화(normalize)할 수 있어 효율적인 회귀식의 표현이 가능하다.^(17-19,32)

본 논문의 피로수명과 응력, 중량에 대한 반응 표면모델은 설계변수 x 의 차수가 n 인 Chebyshev 직교다항식 $p_n(x)$ 을 이용한다. 2차 다항회귀모델 형태로 나타내면 아래의 식 (1)로 전개된다.

$$y = b_0 + b_1(x - \bar{x})^2 + b_2 \left[(x - \bar{x})^2 - \frac{a^2 - 1}{12} h^2 \right] + b_3 \left[(x - \bar{x})^3 - \frac{3a^2 - 7}{20} (x - \bar{x}) h^2 \right] + b_n p_n(x) + \dots \quad (1)$$

$$p_0(x) = 1, \quad n = 0$$

$$p_1(x) = x - \bar{x}, \quad n = 1$$

$$p_2(x) = (x - \bar{x})^2 - \frac{(a^2 - 1)}{12} h^2, \quad n = 2$$

$$p_n(x) = p_{n-1}(x)p_1(x) - (n-1)^2 \{ a^2 - (n-1)^2 \} h^2 p_{n-2}(x) / [4 \{ 4(n-1)^2 - 1 \}], \\ n = 3, 4, 5 \dots$$

여기서 \bar{x} : 설계변수의 평균, a : 수준수, h : 수준 간격계수이다. 차수 n 은 수준수 a 보다 작아야 하 며 각 설계변수의 최대차수는 $a-1$ 이 된다. b_0 , b_i 는 회귀계수로 식 (2)로 나타낸다.

$$b_0 = T/lm = \bar{y} \quad (2)$$

$$b_i = \frac{\sum_{k=1}^a p_i(x_k) y_k}{\sum_{k=1}^a p_i^2(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, a$$

여기서 $p_i(x_k)$ 의 x_k 는 x 의 각 수준수, y_k 는 각 수준에 대한 해석의 평균을 나타낸다. 직교다항 식을 이용하는 장점은 분산분석(analysis of variance)에 있다. 분산분석을 이용한 직교다항식 은 응답의 총변동을 1차, 2차, $n-1$ 차의 성분으 로 분해하는 것이 용이하다. 따라서 각 차수의

상관관계와 민감도 평가에 의해 어떤 차수까지 표현하는 것이 적절한가의 판단을 할 수 있다.

2.2 응력보정 과정

일반적인 동적하중을 받는 부품의 피로파손은 구멍, 홈, 모서리와 같은 기하학적 형상에 대한 응력집중 최소화가 결정적이다. SS400강으로 만든 용접된 엔드빔은 응력집중계수(stress concentration factor)와 동적하중에 대해 피로노치계수(fatigue notch factor)의 영향을 응력에 반영해야 한다. 본 논문은 노치 근방에 작용하는 평균응력이 피로한도와 같거나 클 때 파손이 일어난다고 가정한 Peterson의 평균응력모델(average stress model)^(20,33)을 사용한다. 이 과정은 다음과 같다.

[과정1] 노치민감도계수(notch sensitivity factor) q 를 구한다. q 는 0과 1사이에서 변한다.

$$q = \left(\frac{1}{1 + \frac{a}{r}} \right) \quad (3)$$

여기서 $a = (600/BHN)^{1.8} \times 10^{-3}$ 이고, 브리넬 경도수(brinell hardness number, BHN)는 $BHN \approx 2 \times S_u$ 이다. S_u 는 인장강도 r 은 필렛반경이다.

[과정2] 응력집중계수 K_t 를 구한다.

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{S} \quad (4)$$

여기서 S 는 공칭응력이고, σ_{max} 는 유한요소해석으로 구한 최대응력이다.

[과정3] $q = (K_f - 1 / K_t - 1)$ 의 관계에서 피로노치계수 K_f 를 구한다. 보수적인 접근을 위해 K_f 를 고사이클 피로 영역에 걸쳐 일정하게 적용한다.

[과정4] 피로(동적)응력에 대해 피로노치계수를 고려한 엔드빔의 최종 응력식은 다음과 같다.

$$S_f = S_r \times K_f \quad (5)$$

여기서 S_r 은 응력에 대한 반응표면모델이다.

[과정5] 식 (6)에서 얻은 엔드빔의 보정응력 S_f 는 P-S-N 곡선(probabilistic stress-life curve)^(12,34,35)을 이용해서 피로수명을 계산한다. 식 (7)은 P-S-N 곡선의 형태를 나타낸 것이다.

$$\log(N) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \log(S_f) \pm 1.64 \hat{\sigma}(\log N) \quad (6)$$

여기서 $\hat{\sigma}(\log N)$ 는 파단부의 대수 표준편차이다. 이 단계에 필요한 SS400강(0.16% C, 0.58% Mn)의 재료 물성치는 참고문헌^(11,12)에서 사용하였다.

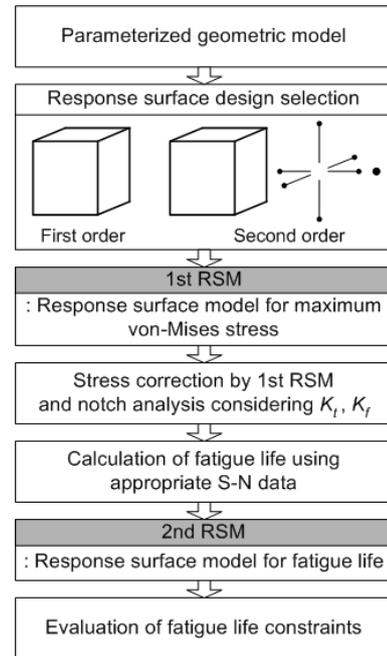


Fig. 1 Flow chart for fatigue life prediction

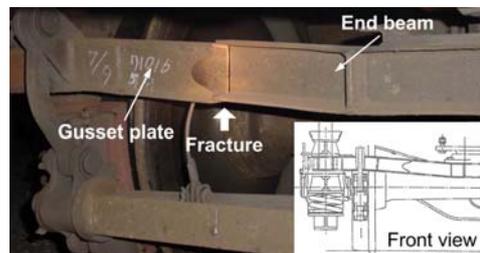


Fig. 2 View of the fractured end beam

3. 산업 예제

Fig. 1은 피로수명예측을 위한 순서를 나타낸 것이다. 반응표면모델은 2단계로 구성된다. 1단계 RSM: 최대 응력에 대한 반응표면모델은 응력보정 단계에 적용한다. 2단계 RSM: 이 결과로부터 응력은 P-S-N 곡선을 이용해서 피로수명을 계산하고 이의 근사모델이 작성한다. 각 단계는 근사모델 기반의 반복적으로 진행된다. 이하의 절의 예제에서 각 단계를 상세히 설명한다.

3.1 설계 모델과 목적

화차 엔드빔의 파손은 최악의 경우 화차 탈선의 원인이 된다.⁽³⁶⁾ 피로에 의한 제동 브라켓 엔드빔의 파손형태는 보강판(gusset plate) 끝단에서 시작해서 두께방향으로 진전되어 파괴된다(Fig. 2).

Fig. 3은 엔드빔 형상에 대한 5개의 설계변수를

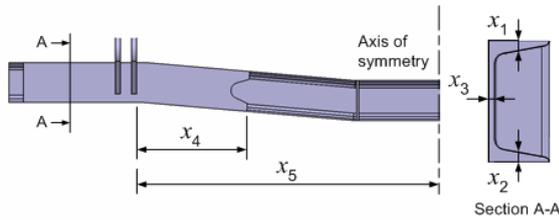


Fig. 3 Design variables of end beam

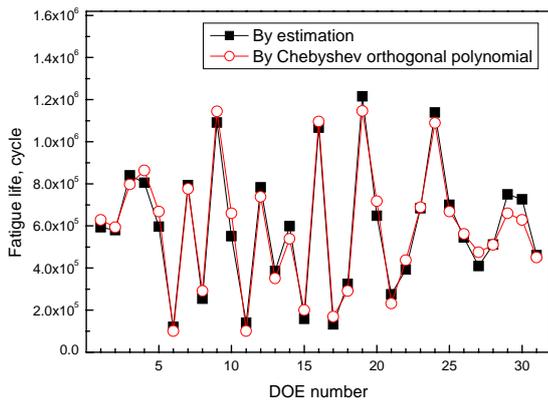


Fig. 4 Comparison between estimation and Chebyshev orthogonal polynomial

Table 1 Error measures of response surface

Response	Fatigue life	Stress	Weight
Error statistics	96.96%	97.59%	99.65%

나타낸 것이다. 유한요소해석, 실험계획, 분산분석, Chebyshev 직교다항식을 이용한 반응표면모델은 참고문헌⁽³⁷⁻³⁹⁾에 설명되어 있다.

피로해석의 접근은 엔드빔의 소성변형 영역이 작다는 가정하에서 응력-수명 방법을 사용한다. 이것은 균열 시작과 성장을 구분하지 않고 피로수명은 노치에서 국부응력을 낮게 유지하여 균열 발생 단계가 전혀 시작되지 않도록(설계의 목표) 결정하는 것이다. [과정1]에서 [과정3]의 순서에 의해 계산된 피로노치계수는 1.3375이다.

Fig. 4는 2.2절의 피로수명 값과 근사모델에 의해 얻어진 값을 비교한 것이다. 근사값이 오차는 존재하지만 추정값의 위치와 함수값이 효과적으로 근사화되고 있다. Table 1은 근사모델의 통계적 오차크기로 근사화는 좋은 품질을 나타낸다.

3.2 절충의사결정문제

피로를 고려한 최적설계 과정은 응력, 중량 등에 대해 다중목적함수(multi-objective function)를

가지므로 모든 목적함수를 동시에 최소화(또는 최대화)하는 해는 존재하지 않는다. 그러므로 어떤 목적함수를 개선하기 위해서는 다른 목적함수의 희생이 필요하다. 따라서 각 목적함수 사이에 절충해(trade-off solution)^(19,26,40-44)를 구하는 것이 바람직하다. 이것은 최선해(best solution)로 최소한 하나의 목적함수를 항상 만족하는 해들 중의 하나를 선택하는 파레토 해(Pareto solution)나 비열등 집합(nondominated set)이 자주 사용된다.⁽⁴⁵⁻⁵⁴⁾

본 논문은 목적함수가 목표를 달성할 때에는 적당한 절충을 고려하며 원래의 제한조건에 대해서는 절충없이 반드시 만족시키는 절충의사결정문제(compromise decision support problem)^(22,55)로 식 (7)의 정의에 의해 다목적최적설계문제를 해결하고자 한다. r 개의 다중목적함수의 절충의사결정문제는 다음과 같이 정식화 된다.

$$\text{Minimize } x = [w_1 h_1(d_1^-, d_1^+), \dots, w_r h_r(d_r^-, d_r^+)]$$

$$\text{subject to } g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$f_j(x) + d_j^- - d_j^+ = g_j^f$$

$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$$

$$d_j^- \cdot d_j^+ = 0, \quad d_j^- \geq 0, \quad d_j^+ \geq 0, \quad j = 1, \dots, r \quad (7)$$

여기서 w_r 는 설계자가 목적함수의 중요도에 따른 우선순위 가중치, g_j^f 는 목적함수가 달성해야 하는 목표값이다. 그리고 d_j^- , d_j^+ 는 현재의 설계(current design)가 설정목표 달성 시 발생하는 편차(deviation)이며 d_j^- 는 목표 미달량을 d_j^+ 는 목표 초과량을 의미한다. 결국 이러한 편차를 최소화함으로써 목표를 최대한 달성시킬 수 있다.

3.3 다목적최적설계

피로해석은 비선형성이 크고 많은 시간을 필요로 한다. 이것은 반응표면모델기반 피로수명예측 모델에서 선형적 접근으로 극복된다. 피로수명예측모델은 3.1절에서 능률적인 수명평가가 가능함을 확인하였다. 최적설계 과정에 대한 목적함수는 피로수명을 증가시키고 중량은 일정하게 유지되는 구속에서 응력이 개선되는 다목적최적설계문제를 고려해 보자.

다중목적함수에 우선순위가 있기 때문에 변경될 가능성이 있는 목표와 최저한도로 달성되어야 하는 요구수준을 설정한다.

$$f_{fatigue}^e = 10^6 \text{ cycle}, f_{stress}^e = 52 \text{ MPa}, f_{weight}^e = 35 \text{ kg}$$

우선순위가 높은 순서로부터 순차적으로 최적화를 진행한다. 각 단계의 최적화는 유용방향법(feasible direction method)을 이용해서 계산된다.

[1단계]

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } f_{fatigue} \\ & \text{subject to } f_{stress} \leq 52, f_{weight} \leq 35 \\ & 1 \leq x_i \leq 3, \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned} \quad (8)$$

[1단계]에서 얻어진 최적해 f^* 를 Table 2에 표시 하였다. 다음으로 얻어진 최적해에 편차 Δ ($\Delta = |f^e - f^*|/2$)를 더해서 순차적으로 최적화를 수행한다.

[2단계]

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } f_{stress} \\ & \text{subject to } f_{fatigue} \leq 1,194,300.797 + 97,150.398 \\ & f_{weight} \leq 35 \\ & 1 \leq x_i \leq 3, \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned} \quad (9)$$

[3단계]

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } f_{weight} \\ & \text{subject to } f_{fatigue} \leq 1,194,300.797 + 97,150.398 \\ & f_{stress} \leq 56.844 + 2.422 \\ & 1 \leq x_i \leq 3, \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned} \quad (10)$$

[3단계]에서 얻어진 해가 다중목적함수의 절충해가 된다. 이상의 결과로부터 얻어진 각 단계의 최적해와 설계유용영역에 포함된 최선해(파레토 최적해)를 Table 2와 Fig. 6에 정리하였다.

Fig. 5는 각 단계에 대한 최적화 되어가는 과정을 나타낸 것이다. 각 목적함수와 요구목표는 차수가 서로 다르기 때문에 세로축은 요구수준으로 나누는 것으로 정규화(normalize) 시킨다. 정규화된 목적함수는 식 (11)과 같이 정의된다.^(17,19)

$$f = \left[\frac{(f^e - f^*)}{f^e} + 1 \right] \quad (11)$$

여기서 f^e 는 요구목표(실제 제한조건)이고, f^* 는 각 단계의 최적해이다. 세로축에 표시한 정규화된 목적함수는 1을 초과한다면 목적함수는 요구수준을 만족하게 된다. Fig. 6에서, 초기 중량은 두 목적함수의 응력과 피로수명을 개선하는 설계

Table 2 Optimal solution

Step	Fatigue life (cycle)	Stress (MPa)	Weight (kg)
Initial	603,095	75.372	28.439
First step	1,194,300	51.064	34.105
Second step	1,071,800	56.844	34.105
Third step	1,277,000	39.405	33.419
Reanalysis	1,231,000	42.097	34.012

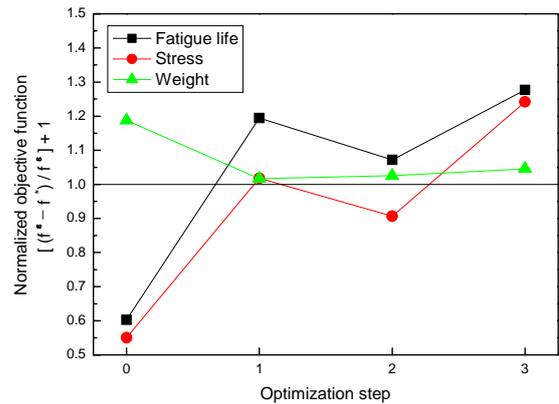


Fig. 5 Optimization step vs normalized objective function

공간에서 벗어나 있다. 최적화 단계의 진행에 따라 [3단계]에서 모든 목표들이 최선은 아니지만 목표들이 모두 만족하는 영역(설계자가 실제 해를 찾고자하는 영역)에 접근한다. 또한 얻어진 최적해에 대해 재해석을 수행하여 Table 2에 표시한다. 재해석 결과에서 피로수명과 응력의 최적해와 재해석을 비교해 보면 각각 3.5%, 4.9%의 오차가 있다. 이것은 근사모델이 가지는 오차크기 정도의 결과를 나타낸다.

Fig. 6은 설계공간에 존재하는 모든 파레토 최적해에 대해 가중치나 정규화의 추가적인 과정 없이 3개의 목적함수에 대한 도해적 결과를 나타낸다. Fig. 6(a)와 (b)에서 곡선의 전면에 배치된 설계점은 각 단계의 목적함수 공간에서 파레토 최적해를 나타내며, 곡선의 후면의 설계점들은 비열등 집합(지배되어지는 해)을 나타내고 있다. 피로수명은 최대화, 응력과 중량은 최소화 문제이므로 2차원 목적함수 공간에서 왼쪽 상단부분에 파레토 최적해들이 존재한다. Fig. 6(c)는 응력과 중량 사이의 파레토 해 및 파레토 전면에 일정한 공백이 보인다. 이는 목적함수의 중요도 순위에 대한 제한조건의 편차와 관련이 있다. 최적화 단계가 진행될수록 다른 목표값들로부터 멀어

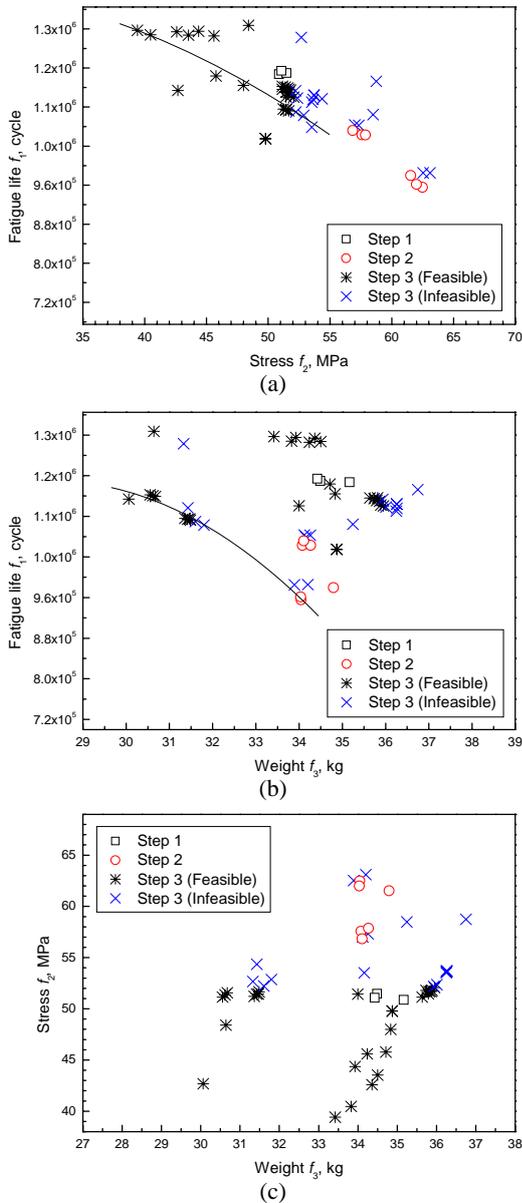


Fig. 6 Pareto frontier and Pareto solutions. Note that star-marked ones are designs in the Pareto Set with respect to all three objectives.

저야만 새로운 목표값에 접근이 가능한 설계점을 탐색해 간다. 또한 단계가 진행될수록 그 파레토 해의 공간이 넓고, 빈도도 많아짐을 볼 수 있다. 이 과정 사이의 파레토 해들은 설계자의 의도에 따라 선택할 수 있다.

파레토 최적해는 [1단계]의 단일목적함수에 대한 최적해와 비교해서 목적함수의 성취목표 크기는 비슷하여도 그 설계변수들의 최적해 집합은 다르다. 특히, 단면두께 x_1 , x_3 은 설계변수의 상한 범위 이상이다. 최대 피로수명과 최소 중량 영역

인 파레토 전면에서는 이러한 경향이 더욱 강하게 나타나고 있다. 이는 의사결정을 가진 최종 설계자에게 단일목적함수로 변환하여 하나의 해만을 얻게 되었을 때 존재할 수 있는 다른 가능성(보다 설계 자유도가 넓은 정보)을 찾지 못하는 단점을 보완할 수 있다. 어떤 면에서 이것은 목적함수의 중요도 크기를 계층적으로 접근하여 설계자의 선호(preference)^(50-53,56)에 기반한 가장 좋은 설계를 선택하는데 이용된다. 이 접근은 미미한 생각의 설계비용(예를 들면, 보강판 용접)을 피하고 설계목적의 선형적 지식(priori knowledge)이 없어도 설계결정이 효율적인 경계(파레토 최적해)에 가장 잘 맞도록 방향을 제공해 준다.

4. 요약 및 결론

이 논문은 피로수명예측을 위한 2단계 반응표면모델과 이의 절충의사결정문제의 응용을 설명한다. 피로수명예측을 위한 근사모델은 Chebyshev 직교다항식을 이용한다. Chebyshev 직교다항식은 참고문헌^(18,19)에 소개되었지만 이전의 작업을 확장하고 피로수명을 고려한 최적설계 루프에 통합된다. 이것은 능률적인 피로수명이 포함된 최적설계 과정을 가능하게 한다. 절충의사결정방법은 설계자의 선호에 의해 단일목적문제에 대한 다목적문제로 계층적 접근에 의해 변형시킨다. 이 계층적 속성은 다중목적함수의 상대적 순위와 절충의 정도를 평가할 수 있고 이성적인 의사결정이 가능하다. 이 관점은 여러 가지 기준이나 목표에 대해 설계자의 선호에 기반한 응답의 방향으로 도달하고자 할 때 동일하게 적용될 수 있다.

산업 예제로 컨테이너 화차의 제동 브라켓 엔드빔에 대한 다목적최적설계문제에서 최대 피로수명과 응력, 중량이 경쟁하는 세 목적함수 사이의 절충을 고려하는 균형된 설계를 찾고 이것의 적응성을 증명하였다.

참고문헌

(19) Baek, S. H., Cho, S. S., Kim, H. S., and Joo, W. S., 2006, "Trade-off Analysis in Multi-objective Optimization Using Chebyshev Orthogonal Polynomials," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 20, No. 3, pp. 366-375.