

경사종동력을 받는 크랙 외팔보의 안정성에 미치는 세장비의 영향

갈영민[†] · 안성진* · 윤한익* · 손인수*

Effects of Slenderness Ratio on Stability of Cracked Beams Subjected to Sub-tangential Follower Force

Young-Min Gal, Sung-Jin Ahn, Han-Ik Yoon and In-Soo Son

Key Words: Stability(안정성), Open Crack(개구형 크랙), Sub-tangential Follower force(경사종동력), Tip Mass(끝단질량), Slenderness Ratio(세장비).

Abstract

In this paper, the purpose is to investigate the stability and variation of natural frequency of a Timoshenko cantilever beam subjected to Subtangential follower force and tip mass. In addition, an analysis of the flutter instability(flutter critical follower force) of a cantilever beam as slenderness ratio is investigated. The governing differential equations of a Timoshenko beam subjected to an end tangential follower force is derived via Hamilton's principle. The two coupled governing differential equations are reduced to one fourth order ordinary differential equation in terms of the flexural displacement. Finally, the influence of the slenderness ratio and tip mass on the critical follower force and the natural frequency of a Timoshenko beam are investigated.

1. 서론

일반적으로 보의 길이에 비하여 그 단면적이 매우 작은 경우 전단변형 및 회전관성 효과는 무시할 수 있음이 잘 알려져 있다. 보의 단면적과 길이에 대한 비는 세장비(slenderness ratio)로 정의할 수 있으며, 이를 이용하여 보의 기하학적 형상과 관심 있는 모드가 어떤 것인지, 그리고 몇 개의 모드를 고려할 것인지에 따라 오일러-베르누이 보 모델과 티모셴코 보 모델 중 어느 모델을 사용할지를 결정할 수 있다. 보 구조물의 진동해석 및 연구에 있어서 이 두 이론의 선택 및

적용은 연구 결과의 정확도에 있어서 중요한 문제라 할 수 있다. 참고문헌 (1), (2)에는 세장비 혹은 회전 반경(radius of gyration)과 전단변형 및 회전관성의 영향에 의한 외팔보의 고유진동수비(오일러 보에 대한 티모셴코 보의 고유진동수)를 잘 나타내 주고 있다. 하지만 보에 종동력이 작용하는 경우에 대한 결과는 예시되어 있지 않다.

Kounadis와 Katsikadelis⁽³⁾는 회전관성과 전단효과가 부분적으로 고정되어진 Beck 기둥의 안정성에 미치는 영향에 대하여 연구하였으며, Saito와 Otomi⁽⁴⁾는 양단에 탄성 지지되고 부가질량이 존재하는 티모셴코 보가 축압축력과 종동력을 받는 경우 지지된 탄성계수의 영향에 의한 보의 안정성 평가를 수행하였다. 또, Chen과 Ku⁽⁵⁾는 유한요소법을 이용하여 종동력을 받는 보의 고유진동수와 동적안정성에 미치는 끝단질량의 영향에 대하여 연구하였다. Rosa⁽⁶⁾는 탄성 지지된 Beck와 Leipholz의 기둥에 대하여 탄성 지지 위치에 따른 플러터 및 좌굴 불안정 영역을 계산하였으며,

† 동의대학교 대학원 기계공학과

* 정회원, 동의대학교 기계공학과

E-mail : isson92@deu.ac.kr

TEL : (051)890-2239 FAX : (051)890-2232

Yoon 등⁽⁷⁾은 자유단에 끝단질량과 회전 스프링으로 구속된 Beck 기둥의 동적 안정성에 대한 연구를 수행하기도 하였다. Lee 등⁽⁸⁾은 양단이 회전 및 병진 스프링으로 구속되어진 티모셴코 보에 경사 종동력(subtangential follower force)이 작용하는 경우 보의 안정성 문제를 경사계수 및 스프링 상수의 변화에 따라 연구하였다. 최근 경사 종동력, 끝단 질량 및 탄성 기초를 갖는 오일러 보의 동적 안정성에 관한 연구도 진행되었으며, 경사계수를 이용하여 보존력 및 비보존력을 받는 외팔 보의 안정성 평가를 통하여 보의 최적 설계를 구현하기도 하였다.

이 연구의 목적은 기존에 연구되었던 많은 결과들을 바탕으로 경사 종동력을 받는 보에 있어서 세장비에 따른 보의 고유진동수비 변화를 살펴봄으로써, 앞으로 연구자들이 선택할 수치해석 예제에 오일러 보 이론이 적용 가능한지에 대한 근거를 제시하는 데 있다.

2. 종동력을 받는 Timoshenko 보

Fig. 1 (a), (b)는 보존력과 비보존력을 받는 보를 나타낸 것이다. 여기서 L 은 보의 전체 길이를 나타내며, M 과 J 는 각각 끝단질량과 그의 관성 모멘트를 나타낸다. 또, P_a 와 P_t 는 압축력과 종동력을 각각 나타내며, x_c 는 크랙의 위치를 나타낸다. η 는 힘의 경사계수를 나타내며, 만약 경사계수 $\eta=0$ 인 경우는 순수 압축력이 되어 보는 오일러 좌굴문제가 되며, $\eta=1$ 일 때는 순수 종동력이 되어 Beck의 플러터 문제가 된다.

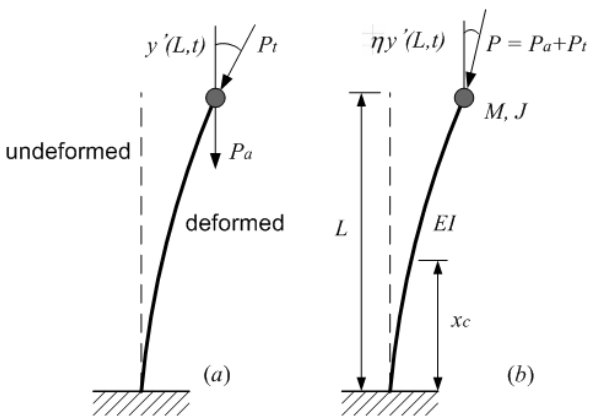


Fig. 1 Beams subjected to forces

2.1 크랙 모델링

선형 탄성구간에서 크랙으로 인한 추가적인 변형에너지는 유연행렬로써 수식화 할 수 있다. Castigliano의 정리에 의하여 크랙에 의해 추가되는 변형에너지를 다음과 같이 유연행렬을 이용하여 구할 수 있다.

$$C_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \left[\int_{-b}^b \int_0^{a_c} J dy dz \right] \quad (1)$$

여기서 $P_{i,j}$ 는 각각 i,j 방향에서의 힘, J 는 변형률 에너지 밀도함수로서 제 1 파괴모드에 대하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$J = \frac{1}{E^*} (K_{IM})^2 \quad (2)$$

여기서 $E^* = E/(1-\nu^2)$ 이고, K_{IM} 은 응력확대계수로써 다음과 같다.

$$K_{IM} = \frac{M}{2I} \sqrt{a\pi} F_t(\alpha) \quad (3)$$

여기서 $I(=bh^3/12)$ 는 보의 단면 2차 모멘트이다. 따라서 식 (1)의 무차원의 유연행렬을 구해보면 다음과 같이 계산되어진다.

$$C = 6\pi(1-\nu^2)H \int_0^\alpha [\alpha F_t^2(\alpha)] d\alpha \quad (4)$$

식 (3), (4)에 사용된 무차원 매개변수와 $F_t(\alpha)$ 는 각각 다음과 같다.

$$H = \frac{h}{L}, \quad \alpha = \frac{a}{h},$$

$$F_t(\alpha) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \left[0.923 + 0.1999 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right)^4 \right]}}{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \quad (5)$$

해석에 필요한 회전 스프링 상수(K_R)는 식 (4)의 역수, 즉 $K_R = C^{-1}$ 이다. 또 크랙위치에서 다음의 기울기 변화, 변위, 모멘트 및 전단력의 연속 조건을 만족해야 한다.

$$\frac{dw_2(x_c)}{dx} - \frac{dw_1(x_c)}{dx} = \frac{EI}{K_R} \frac{d^2w_2(x_c)}{dx^2},$$

$$w_1(x_c) = w_2(x_c), \quad \frac{d^2w_1(x_c)}{dx^2} = \frac{d^2w_2(x_c)}{dx^2}, \quad (6)$$

$$\frac{d^3w_1(x_c)}{dx^3} = \frac{d^3w_2(x_c)}{dx^3}$$

여기서 $w_1(x)$ 와 $w_2(x)$ 는 크랙에 의해 분할되는 외팔 보의 각 분할구간의 횡변위를 나타내며 E 는 영계수이다.

2.2 계의 운동방정식

자유진동에 대하여 티모셴코 보 이론을 적용한 외팔보의 운동방정식을 확장된 Hamilton 원리를 이용하여 유도하면 다음과 같다.

$$\frac{EI \partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + \kappa GA \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \psi(x,t) \right) - \frac{mI}{A} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

$$\kappa GA \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) - P \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

여기서 $y(x,t)$ 는 횡방향 변위, $\psi(x,t)$ 는 전단변형, κ 는 전단계수이다. 또 A 와 G 는 각각 보의 단면적과 전단 탄성계수를 나타내고 있다. m , E , 그리고 I 는 각각 보의 단위 길이당 질량, 영계수, 그리고 보의 단면 2차 모멘트를 의미한다. 경계 조건은 다음과 같다.

$$\psi = 0, \quad y = 0 \quad \text{at } x = 0,$$

$$EI\psi' + J\dot{\psi} = 0, \quad (9)$$

$$\kappa GA(y' - \psi) - (1 - \eta)Py' + M\ddot{y} = 0 \quad \text{at } x = L$$

여기서 (\cdot) 와 $(\cdot)'$ 은 각각 시간과 x 에 대한 미분을 나타낸다. 식 (7), (8)로부터 $\psi(x,t)$ 를 소거시키면 횡변위 $y(x,t)$ 에 대한 운동방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$EI \left(1 - \frac{P}{\kappa GA} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \rho I \left[1 + \frac{E}{\kappa G} - \frac{P}{\kappa GA} \right] \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^4} + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \quad (10)$$

여기서 ρ 는 보의 밀도이며, 횡변위와 전단변형은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(x,t) = Y(x) e^{i\omega t}, \quad (11)$$

$$\psi(x,t) = \phi(x) e^{i\omega_f t} \quad (12)$$

여기서 ω_f 는 보의 고유진동수이며 $i = \sqrt{-1}$ 를 나타낸다. 식 (11)을 식 (7)에 대입하여 무차원화하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$Y^{iv} + \left[\frac{(1 - \omega^2 \beta r^2)p + \omega^2(\beta + r^2)}{(1 - p\beta)} \right] Y'' + \frac{\omega^2(\omega^2 \beta r^2 - 1)}{(1 - p\beta)} Y = 0 \quad (13)$$

여기서 $(\cdot)'$ 은 무차원 좌표 $\xi (=x/L)$ 에 대한 미분을 나타내며, 식 (13)에 사용된 각 무차원 변수는 다음과 같다.

$$\omega^2 = \frac{mL^4 \omega_f^2}{EI}, \quad \beta = \frac{Er^2}{\kappa G}, \quad r^2 = \frac{I}{AL^2}, \quad p = \frac{PL^2}{EI} \quad (14)$$

여기서 세장비 s 는 $1/r$ 이다. 식 (13)의 일반해를 구하면 다음과 같다.

$$Y(\xi) = A_1 \sinh(\lambda_1 \xi) + A_2 \cosh(\lambda_1 \xi) + A_3 \sin(\lambda_2 \xi) + A_4 \cos(\lambda_2 \xi) \quad (15)$$

여기서

$$\lambda_{1,2} = \left[\frac{\sqrt{k_2} \mp k_1}{2} \right]^{1/2} \quad (16)$$

이며, k_1 과 k_2 는 각각 다음과 같다.

$$k_1 = \frac{(1 - \omega^2 \beta r^2)p + \omega^2(\beta + r^2)}{(1 - p\beta)}, \quad (17)$$

$$k_2 = k_1^2 - 4\omega^2 \frac{(\omega^2 \beta r^2 - 1)}{(1 - p\beta)}$$

위와 동일한 방법으로 전개하면 전단변형에 대해서도 다음과 같이 해를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(\xi) = & q_1 A_2 \sinh(\lambda_1 \xi) + q_1 A_1 \cosh(\lambda_1 \xi) \\ & + q_2 A_4 \sin(\lambda_2 \xi) - q_2 A_3 \cos(\lambda_2 \xi) \end{aligned} \quad (18)$$

여기서

$$q_1 = (1 - p\beta)\lambda_1 + \frac{\omega^2 \beta}{\lambda_1}, \quad q_2 = (p\beta - 1)\lambda_2 + \frac{\omega^2 \beta}{\lambda_2} \quad (19)$$

이고, 무차원화 된 경계조건은

$$\begin{aligned} Y(0) = \phi(0) = 0, \\ \frac{d\phi(1)}{d\xi} - \alpha j \phi(1) = 0, \\ \frac{dY(1)}{d\xi} - \phi(1) = \mu \omega^2 \beta Y(1) + (1 - \eta) p \beta \frac{dY(1)}{d\xi} \end{aligned} \quad (20)$$

이다. 여기서 무차원 변수 μ 와 j 는 각각 다음과 같다.

$$\mu = \frac{M}{mL}, \quad j = \frac{J}{mL^3} \quad (21)$$

식 (15), (118)의 미지수들은 식 (20)의 경계조건을 이용하여 각각 구할 수 있다. 또 계의 고유진동수는 다음과 같은 고유치의 기본 형태로 변환하여 쉽게 구할 수 있다.

$$\Lambda \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad |\Lambda| = 0 \quad (22)$$

여기서 Λ 는 식 (20)의 경계조건을 대입하여 얻은 각각의 식을 행렬형태로 표현한 것이다.

3. 수치해석 결과 및 고찰

이 연구에서는 수치해석에서 유도된 운동방정식을 이용하여 티모셴코 보의 세장비에 따른 경사 종동력과 끝단질량이 보의 고유진동수 변화에 미치는 영향을 수치해석 하였다. 수치해석은 Mathematica(5.0)를 이용하여 계산을 수행하였다. 이 연구에서 세장비(s)의 영향을 해석하기 위하여 참고문헌 (1)의 $\kappa = 5/6$, $E/\kappa G = 3.20$ 의 값

을 사용하였으며, 일반적으로 보의 진폭 및 고유진동수는 1, 2차 모드의 영향이 가장 크기 때문에 이 연구에서는 1, 2차 모드에 중점을 두었다. 또, 진동수비가 약 5% 내외의 오차를 보이는 경우에 대하여 ‘오일러 보 이론이 적용 가능하다’고 설명하기로 한다.

먼저 수치해석의 타당성을 검토하기 위하여 Fig. 2에 이 연구의 결과와 참고문헌의 결과들을 비교하였다. Fig. 2는 세장비의 영향에 의한 보의 고유진동수 비를 4차 모드까지 나타낸 것으로 참고문헌 (1)의 결과와 거의 동일하다.

Fig. 3은 끝단질량이 없는 경우 세장비와 순수 종동력($\eta = 1$)의 영향에 의한 보의 1, 2차 고유진동수 비를 나타낸 것이다. 고유진동수비는 오일러 보의 고유진동수에 대한 티모셴코 보의 고유진동수 비이다. Fig. 3(a)의 1차 모드에서는 종동력의 값이 일정정도 이하($p = 7.4$)에서는 종동력이 작용하지 않는 경우에 비하여 고유진동수비가 더 낮게 나타나지만 그 이상의 경우에는 진동수비가 더 크게 나타남을 알 수 있다. 특히 종동력이 9인 경우 세장비가 11.47 이하인 경우 오일러 보인 경우에 비하여 고유진동수가 더 크다는 것을 알 수 있다. 이것은 Fig. 4의 결과로부터 확인할 수 있다. 만약 종동력의 크기가 8인 1차 모드만을 해석하려고 한다면 세장비가 10인 경우에도 티모셴코 보 대신 오일러 보 이론을 적용하여도 오차가 3% 내외의 정확한 결과를 얻을 수 있으리라 판단할 수 있다. 또 2차 모드에서는 세장비 영역 전체에 대하여 종동력과 진동수비는 서로 반비례적인 경향을 보인다.

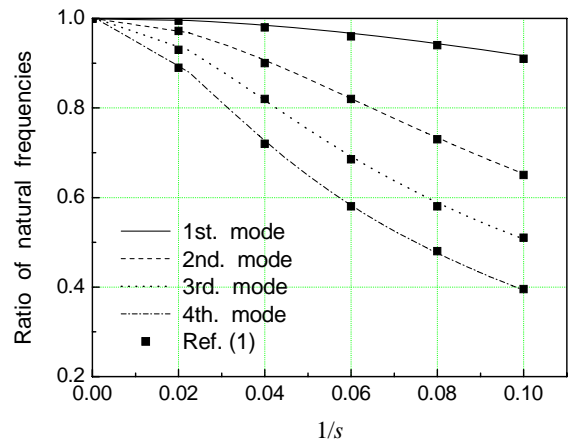
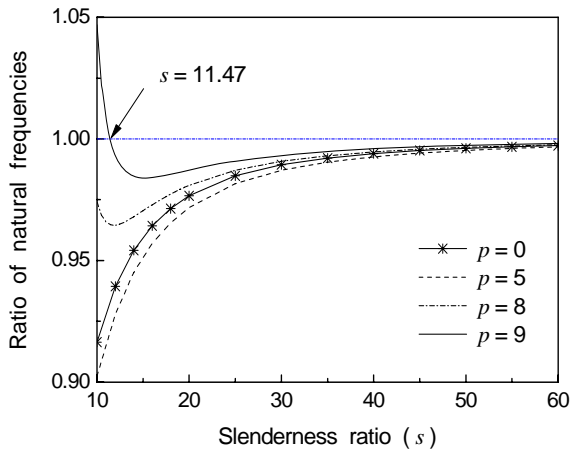
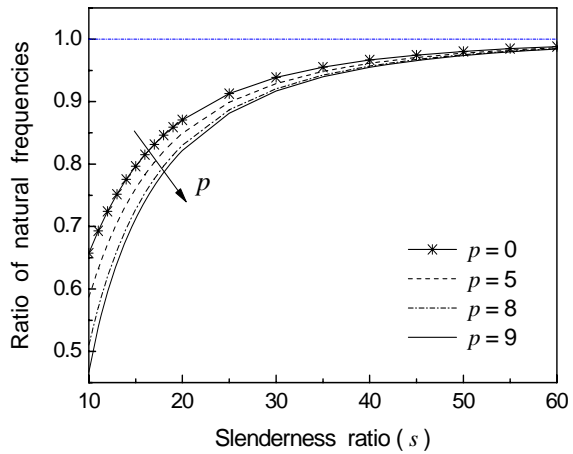


Fig. 2 Influence of shear force and rotary motion on natural frequencies of cantilever uniform beam



(a) First mode



(b) Second mode

Fig. 3 Effect of follower force on natural frequencies of Timoshenko beam ($\mu = j = 0, \eta = 1$)

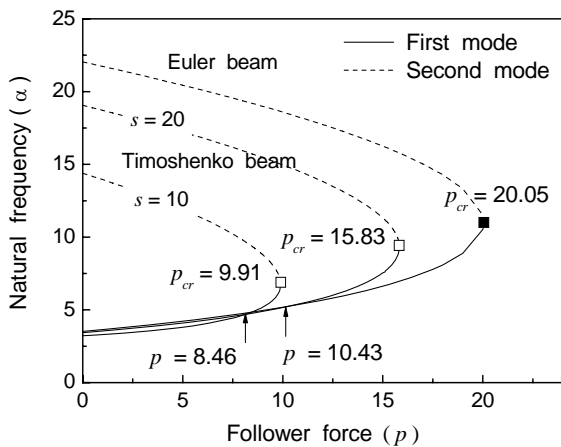


Fig. 4 Natural frequency of cantilever beams ($\mu = j = 0, \eta = 1$)

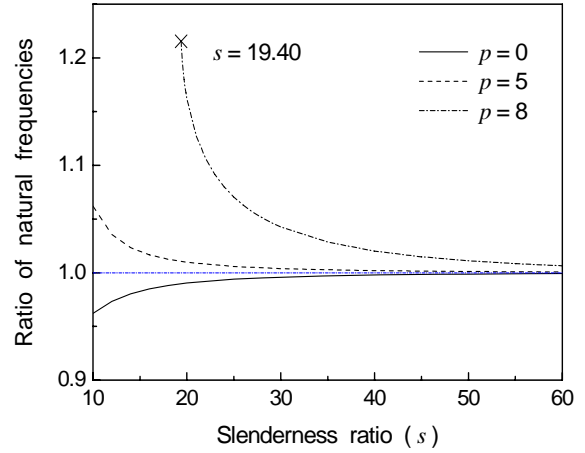


Fig. 5 Effect of follower force on natural frequencies of Timoshenko beam (First mode, $\mu = 1, j = 0.1, \eta = 1$)

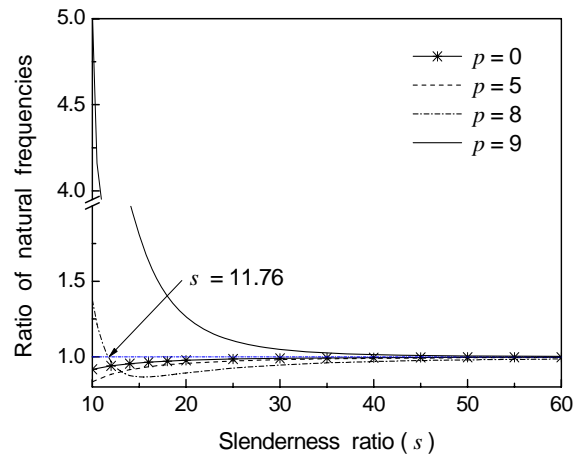


Fig. 6 Effect of subtangential follower force on natural frequencies of Timoshenko beam ($\mu = j = 0, \eta = 0.5$, First mode)

Fig. 4는 종동력의 영향에 의한 오일러 보와 티모셴코 보의 고유진동수 변화를 도시한 것이다. 1차 모드에서 세장비가 10인 경우 종동력의 크기가 $8.46 \leq p \leq 9.91$ 의 영역에서는 오일러 보에 비하여 티모셴코 보인 경우 고유진동수가 더 크고, $s = 20$ 인 경우 $10.43 \leq p \leq 15.83$ 의 종동력에 대하여 같은 현상이 나타난다.

Fig. 5는 끝단질량의 크기가 1, 끝단질량의 관성 모멘트가 0.1 일 때 세장비와 순수 종동력 ($\eta = 1$)의 영향에 의한 보의 1차 고유진동수 비를 나타낸 것이다. 종동력의 크기가 8인 경우 세장비가 19.4에서 불안정이 발생한다. 즉, 오일러 보인 경우 종동력이 약 8.88에서 불안정이 일어난

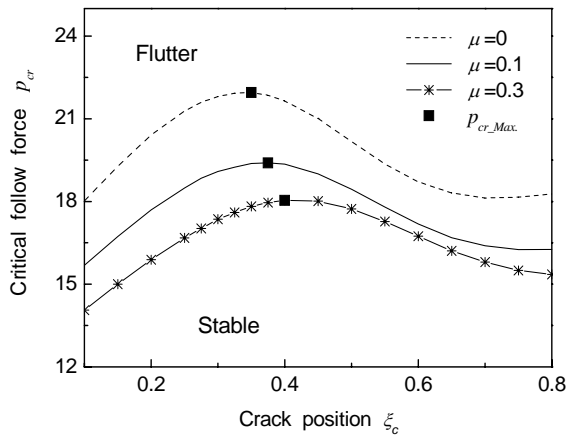


Fig. 7 Critical follower force versus crack position for tip mass ($\alpha = 0.5, s = 35$)

다는 사실을 염두해 볼 때 세장비의 크기가 20정도로 비교적 가는 보에 대해서도 반드시 티모셴코 보 이론을 적용하여야 함을 알 수 있다.

Fig 6은 경사계수가 0.5이고 끝단질량이 없는 보의 1차 고유진동수 변화에 미치는 세장비와 종동력의 영향을 나타내었다. 종동력의 크기가 9일 때 세장비의 크기가 20인 경우에도 진동수비는 약 30% 정도 오차를 보이고 있어 1차 모드만을 구하는 경우에도 오일러 보의 적용이 어려울 것으로 판단된다. 만약 1, 2차 모드를 고려한다고 한다면 세장비의 크기가 약 40 이상인 경우에 오일러 보의 적용이 가능하다고 할 수 있다.

Fig. 7은 세장비가 35인 경우, 크랙의 위치와 끝단질량의 변화에 따른 외팔보의 임계 종동력의 변화를 도시한 것이다. 동일한 끝단질량을 가진 경우 크랙의 크기가 클 때 크랙의 위치에 따른 계의 플러터 임계종동력의 변화가 크다는 것을 판단할 수 있다. 여기서 ■는 최대 임계 종동력을 갖는 크랙의 위치를 표현하고 있다. 끝단질량의 크기가 증가할수록 최대 임계종동력이 나타나는 크랙의 위치가 보의 후반부로 조금씩 이동된다는 것을 알 수 있다.

4. 결론

이 연구에서는 외팔보에 경사 종동력과 끝단 질량이 작용하는 경우 보의 세장비의 영향에 따른 고유진동수비(오일러 보에 대한 티모셴코 보의 고유진동수) 변화를 살펴보았다. 본 연구의 결

과는 경사 종동력과 끝단질량을 고려하여 보 해석을 수행하는 경우 선택한 모델에 오일러 보 이론을 적용할 것인지, 아니면 티모셴코 보 이론을 적용할 것인지에 대한 판단 근거로 활용되어 질 수 있을 것이다.

참고문헌

- (1) Harris, C. M., 1961, Shock and Vibration Handbook(Fourth Edition), McGraw-Hill, Chapter 7.
- (2) Igor, A. K. and Olga, I. L., 2001, Formulas for Structural Dynamics, McGraw-Hill, Chapter 11.
- (3) Kounadis, A. and Tatsikadelis, J. T., 1976, "Shear and Rotatory Inertia Effect on Beck's Column," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 49, No. 2, pp. 171~178.
- (4) Saito, H. and Otomi, K., 1979, "Vibration and Stability of Elastically Supported Beams Carrying an Attached Mass Under Axial and Tangential Loads," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 62, No. 2, pp. 257~266.
- (5) Chen, L. W. and Ku, D. M., 1992, "Eigenvalue Sensitivity in the Stability Analysis of Beck's Column with a Concentrated Mass at the Free End," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 153, No. 3, pp. 403~411.
- (6) Rosa, M. A. and Franciosi, C., 1990, "The Influence of an Intermediate Support on the Stability Behaviour of Cantilever Beams Subjected to Follower force," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 137, No. 1, pp. 107~115.
- (7) Yoon, H. I., Lim, S. H. and Yu, J. S., 1997, "Stability of Beck's Column with a Rotatory Spring Restraining Its Free End," *Transactions of KSME(A)*, Vol. 21, No. 9, pp. 1385~1391.
- (8) Lee, S. Y., Chen, T. Y. and Wang, W. R., 1995, "Non-conservative Instability of a Timoshenko Beam Subjected to a Partially Tangential Follower Force," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 188, No. 1, pp. 25~38.