

< 학술논문 or 기술논문 >

14 면체의 다물체 동역학 Simulation 과 잔류 모멘트 계산을 통한 확률계산

이정한† · 유완석*

Multi-body dynamics simulation of 14 facepieces and probability study by using residual moment

Jeong Han Lee, Wan Suk Yoo

Key Words : Cuboctahedral die(14 면체), Logical Property(이론적 확률), Residual Energy(잉여 에너지), Multi-body Dynamics(다물체동역학)

Abstract

Juryeonggu is a Cuboctahedral die that had used in ancient Korea. This Cuboctahedral is consisted of different two penal servitudes of 14 facepieces, but the probability distribution can appear equally so it can be usable as a die. In this paper, achieved research study about probability of a Cuboctahedral die that have quadrilateral and triangle preferentially to search Juryeonggu's probability calculation method. First, confirmed probability distribution through Multibody-dynamics analysis and verified probability distribution through several experiments. Finally, with this simulation data, achieved theoretical analysis about Cuboctahedral die occurrence probability by using the residual momentum energy.

1. 서 론

주령구는 경주 안압지에서 출토된 14 면체 통일신라시대의 목제 주사위로서 6 개의 정사각형과 8 개의 6 각형으로 이루어진 입방체이다. 주령구의 형태는 가공과정을 관찰하면 쉽게 이해할 수 있다. 정 6 면체의 8 개의 모서리를 육면체의 중심방향으로 대하여 수직하게 깎아 나가면 14 면체 형태를 만들 수 있는데 이때 깎는 깊이에 따라 깎이는 면의 형태가 달라진다. 14 면체는 정 육각형의 깎이지 않는 면과 깎이는 면의 2 가지 도형으로 구성되며 신라시대에 사용한 주사위 주령구의 경우 8 개의 6 각형과 6 개의 정사각형으로 이루어져 있다. 구성되어 있어 그 발생 확률적인 구성이 얼핏 균등하지 않을 것으로 볼 수 있다. 그러나 실험적인 방법으로 각 면이 나타날 확률분포를 보면 14 면체의 형태는 깎는 깊이에 따라 나타나는 면의 도형형태가 달라진다.

주령구에 대한 확률적 고찰은 1994 년 허명회

교수에 의해 통계학적으로 연구(1) 되기 시작했다. 비슷한 시기에 Powers 에 의해 14 면체에 대한 발생확률에 대한 연구(2) 가 서구에서 발표되었으며 1995 년에 채경철 및 이충석에 의해 실험적 연구와 논리적 확률에 대한 비교연구(3)가 진행되었으며 2005 년에 장대홍에 의해 구체적인 실험적 연구(4) 가 진행되었다. 허명회 교수의 연구에서는 14 면체의 확률을 계산하기 위해 14 면체와 외접하는 구에 대해 두 가지 다각형을 투영시킨 삼각형의 면적과 사각형의 면적을 계산하여 그 비율로서 삼각형이 나올 확률을 계산하였으며 Powers(2)는 각 도형에 남기 위해 필요한 위치에너지를부터 필요한 운동에너지를 유추하여 사각형과 삼각형의 확률 분포를 계산 하였다. 이 두 가지 확률 계산식은 각기 다른 형태로 던졌을 때의 빈도적 확률과 유사한 결과를 얻을 수 있는데, 이는 채경철 및 장대홍에 의한 연구결과에서 잘 나타나 있다. 각 논문에서 제시하고 있는 확률 분포의 계산식과 확률에 대해 Table 1 에 나타내었다.

채경철과 장대홍의 연구결과에서는 Power 교수의 “균일분포를 따르는 운동에너지”가정을 통한

확률 분석을 보다 엄밀하게 분석하여 확률을 계산하였다. Power 교수의 확률 분포 식은 위치에너지를 근거로 하여 구름에 필요한 운동에너지를 계산하고 삼각형과 사각형의 상황에 대한 비율을 통해 확률을 계산하였다.

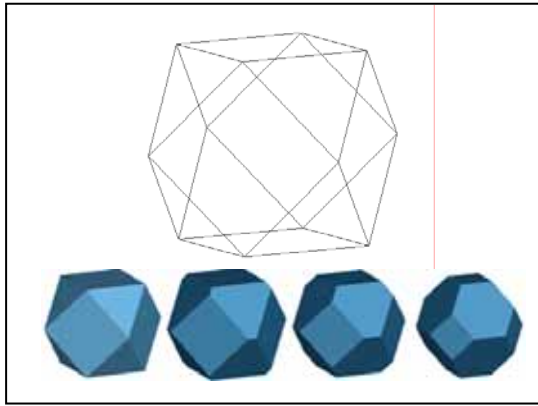


Fig. 1 14 면체 주사위

Table 1 14 면체 주사위의 삼각형이 나올 확률

Ref.	확률 계산 근거	논리적 확률 계산식	삼각형이 나타날 확률	
			논리적	실험적
[1]	투영면적비율	$(24 \cos^{-1}(1/3) - 8\pi) / 4\pi$	35.1%	24.1%
[2]	구르기 위해 필요	$1 / \left(1 + \frac{\sqrt{3/2} - 1}{\sqrt{3/2} - \sqrt{4/3}} \right)$	23.76%	
[3]	한 운동에너지			24.05%
[4]	비율			27.47%

지금까지의 논문에서 보면 14 면체의 확률 분포를 논리적인 관점에서 바라보았으며 에너지 관계식의 가장 기본적인 수식만 사용하였다. 본 논문에서는 14 면 주사위의 확률에 대하여 보다 공학적 관점에서 접근하고자 한다. 14 면체의 운동에 대한 모멘트 관계식을 구하고 구르는 상황에 대한 잔류 모멘트를 바탕으로 확률 관계식을 구하고 동역학 Simulation 을 통하여 논리적 확률을 검증 하였다.

2. 14 면체의 형상치수 결정

2.1 14 면체의 제작 방법

14 면 주사위는 두 가지 길이에 의해 결정된다. 즉, 가공하기 전 정 6 면체의 한 변의 길이 ℓ 과 8 개의 모서리에서 깎아 나가고 남게 되는 깊이 r 이다. 이 두 가지 치수를 이용해 동역학 해석에 필요한 여러 가지 길이를 정의할 수 있다.

우선 Fig 2 와 같이 14 면체를 생성하기 위해 잘라내는 삼각뿔의 높이를 h 로 두고 남은 길이를 r 로 두면 삼각면이 바닥으로 올 때 r 은 질량중심까지의 높이가 되며 사각면이 바닥으로 올 경우는 $\ell/2$ 이 질량중심까지의 높이가 된다.

잘려진 면의 형태는 잘라내는 삼각뿔의 높이 h 의 길이에 따라 달라진다. 이때 잘리는 깊이 h 가 $\sqrt{3}\ell/6$ 일 때 잘려지는 면은 정 삼각형이 되고 이보다 큰 값으로 잘리게 되면 잘리는 면의 도형은 육각형이 된다. 이렇듯 잘려지는 형상에 따라 다양한 형태로 변화하기 때문에 14 면체를 고정된 형태의 다각형으로 생각하는 것은 무리가 있다.

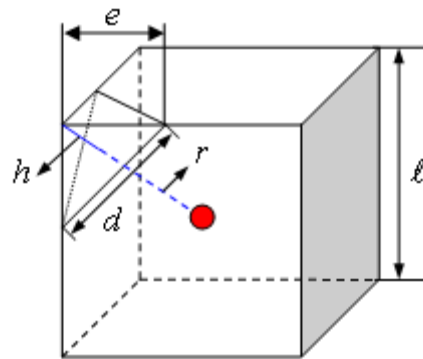


Fig. 2 14 면체의 제작에 필요한 기본치수

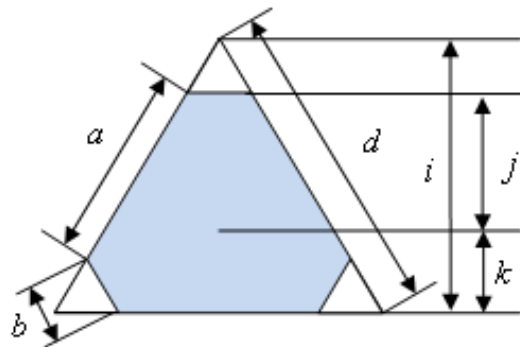


Fig. 3 잘려진 단면의 형상

Fig. 3 은 잘려진 면에서 나타나는 도형을 나타낸다. 잘려진 도형은 삼각형 또는 육각형 형태로 나타나며 육각형일 경우 역시 정육각형이 아닌 두 가지 길이로 정의된 육각형으로 나타난다. 이렇듯 다양한 형태의 14 면체이기 때문에 확률분포의 형태도 그 형상에 따라 매우 다르게 나타날 수 있는 것은 당연한 것이다.

주사위의 구름현상에 대하여 공학적으로 접근하기 위해 주사위의 치수 결정인자인 r 과 ℓ 의 값만으로 모든 치수를 결정하였다. (Table 2)

† 부산대학교 기계공학부
E-mail : maxkally@naver.com
TEL : (051)510-1457 FAX : (051)581-8514
* 부산대학교 기계공학부

Table 2 14 면체의 치수 정리

구 분	수 식
잘라내는 삼각뿔의 한변의 길이	$d = \frac{3}{2}\sqrt{2}\ell - \sqrt{6}r$
사각형의 한변의 길이	$a = \sqrt{6}r - \frac{\sqrt{2}}{2}\ell$
육각형의 작은 선분길이	$b = \sqrt{2}\ell - \sqrt{6}r$
육각형의 중심으로부터 긴변까지 수선의 거리	$k = \frac{\sqrt{6}}{4}\ell - \frac{\sqrt{2}}{2}r$
육각형의 중심으로부터 짧은변까지 수선의 거리	$j = \frac{\sqrt{2}}{2}r$

3. 구름에 필요한 에너지 정의

14 면체의 형태가 다른 두 종류의 면에 대해 발생할 수 있는 확률을 구하기 위해 동역학적 모멘트 관계식으로부터 구를 때 소모되는 에너지를 계산하였다. 14 면체의 구조상 회전하기 위해서 필요한 모멘트는 바닥의 형상에 따라 달라지며 각 형상에 대해 각각 필요한 모멘트량을 구해보았다.

Fig. 4 와 Fig. 5 는 바닥이 삼각 면 일 때의 사각 면일 때의 자유물체도를 나타낸다.

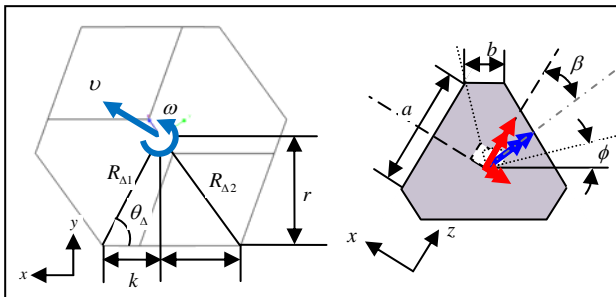


Fig. 4 바닥이 삼각형 일 때의 자유물체도

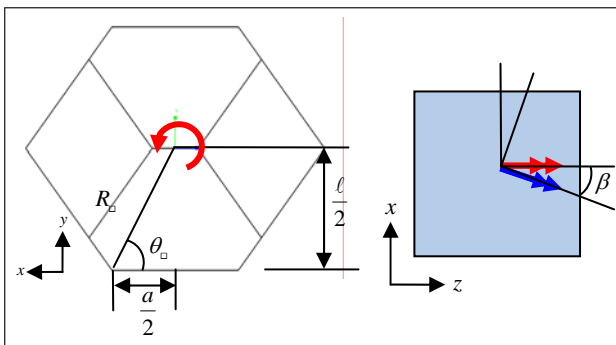


Fig. 5 바닥이 사각형 일 때의 자유물체도

각 도형이 바닥면일 때 모멘트가 작용하여 다음 도형으로 넘어가기 위해서는 한쪽 모서리인 R의 반경으로 θ 만큼 넘어가야 한다. 이 에너지량을 모멘트 관계식으로 나타낼 수 있다.

식(1)과 (2)는 각 도형이 다른 면으로 넘어가기 위해 필요한 최소 에너지($E_0, E_{\Delta 1}, E_{\Delta 2}$)를 나타내

며 γ 는 14 면체를 자르기 전 정육면체 한 변의 길이와 14 면체의 중심에서 잘려진 면까지의 수선의 길이에 대한 비를 나타낸다. ($\gamma = r/\ell$)

$$E_0 = \frac{mg\ell}{\cos\beta} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \left(\text{단, } \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma + \frac{3}{8}} \right) \quad (1)$$

또한 β 는 사각형이 바닥일 때 모멘트의 작용 방향을 의미하는 각도이며 β_{Δ} 는 삼각형이 바닥일 때의 모멘트 작용 각도이다.

$$E_{\Delta 1} = \frac{mg\ell(\alpha - \gamma)}{\cos\beta_{\Delta}}, \quad E_{\Delta 2} = \frac{mg\ell \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1 \right) \gamma}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta_{\Delta} \right)} \quad (2)$$

4. 14 면체의 발생 확률 계산

14 면체가 구르는 과정은 물리적으로 볼 때 매우 난해한 문제중의 하나이다. 그것은 구르는 과정을 지배하는 물리적 현상이 바로 접촉이기 때문이다. 접촉문제는 공학적으로 매우 어려운 문제중의 하나이며 현재까지는 일반화 할 수 있는 정확한 해법을 찾지 못하고 있다. 따라서 주령구가 구르는 모든 상황에 대해 경우의 수를 계산하는 것은 불가능에 가깝다. 본 논문에서도 구르는 과정에서 발생할 수 있는 물리적 현상은 논 외로 하며 다만 몇 가지 가정을 가지고 마지막 상태에 대한 논리적 물리적 해석을 시도 하였다.

- 14 면체가 구르는 과정 중 접촉상황에 대해 에너지의 손실이 발생한다.
- 발생하는 에너지의 손실은 구르기 위해 필요한 에너지보다 크거나 같다.

위와 같은 가정하에 구르는 14 면체를 생각해 볼 때 주사위는 초기 운동에너지와 위치에너지를 가지고 구르면서 점차 에너지를 손실해가며 마지막 순간 어떠한 면이 바닥에 오게 된다. 이 마지막 순간은 정지한 순간을 의미하는 것이 아니라 식(1)과 (2)에서 정의한 최소 운동에너지의 경계치보다 낮은 값의 운동에너지를 가지는 순간을 의미한다. 즉, 마지막 순간 어떤 면에서 다음면으로 넘어갈 수 있는 경우의 수를 식(1)과 식(2)로부터 정의 할 수 있고 최종상태에 남아 있는 에너지 (Residual Energy)와 입력각도 β 가 균일 분포이다는 가정하에 확률 분포를 계산할 수 있다.

에너지의 균일분포에 대한 관점은 Power(2)의 논문에서 제시한 에너지 관점의 논리확률과 동일한 가정에서 정의한 것이다.

본 연구에서는 이론적 확률계산을 확인하기 위해 삼각형과 사각형으로 구성된 14 면체의 확률을 계산하고 다물체 동역학 해석을 통해 Simulation

하였으며 실험을 통해 검증하였다.

이론적 확률 계산을 위해 수식(1)과 (2)를 통해 각 도형의 최소 회전 에너지를 구하고 이 값들 중 최대값을 임계 에너지로 정할 수 있다. 이 임계 에너지는 어떠한 구름상황하에서 임계치(E_{MAX})보다 낮은 값의 잉여 에너지(E_{RES})를 가질 때를 경우의 수로 판단하며 그보다 높은 에너지를 가지고 있을 경우는 구름상태로 판단한다. 즉, 임계치 보다 큰 에너지를 가지고 있을 경우 구름상태에 있다는 것이다.

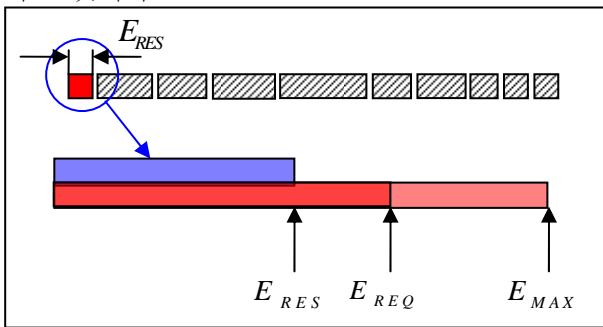


Fig. 6 Residual Moment 적용 개념도

수식 (1)을 삼각형과 사각형만 존재하는 경우인 $\gamma = 0.5773$ 이 경우에 대해 정리하면 $E_{\Delta 2max}$ 는 존재하지 않기 때문에 임계 에너지 E_{MAX} 는 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다. 이 값은 사각형 면이 바닥일 때 E_{REQ} 가 한 모서리에 대해 45 도 방향으로 작용할 경우이다.

$$E_{max} = \sqrt{2} \cdot mgl \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \quad (3)$$

또한 최소 회전 에너지는(E_{REQ}) β 값의 변화에 따라 달라진다. 이를 그래프를 이용하여 표현하면 Fig. 7 및 Fig. 8 과 같다. 이 그래프의 x축 λ 는 E_{MAX} 에 대한 E_{REQ} 의 비율($\lambda = E_{REQ} / E_{MAX}$)을 나타낸다.

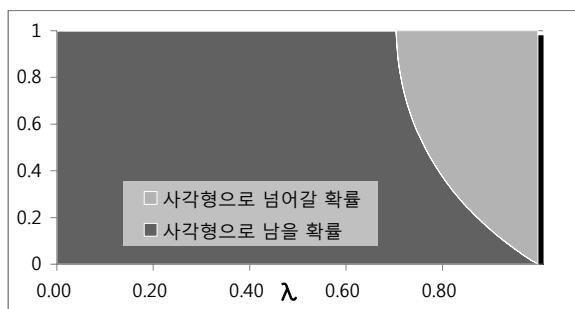


Fig. 7 사각형 바닥일 때 Residual Moment 에 따른 확률분포

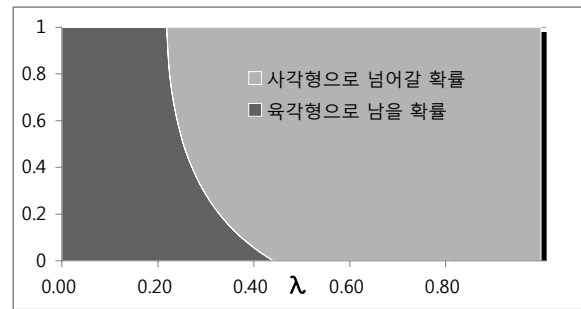


Fig. 8 삼각형 바닥일 때 Residual Moment 에 따른 확률분포

Fig. 7 과 Fig. 8 의 물리적 의미를 보면, E_{RES} 가 특정 값을 가질 때 λ 가 결정되고 그 λ 에 대해 그 도형에 남거나 다음도형으로 넘어갈 확률의 비를 y축으로 표현한 것이다. 결과적으로 전체적인 면적비율이 남을 확률과 넘어갈 확률이라 할 수 있다.

Fig. 7 과 Fig. 8 의 면적을 이용하여 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

- $P(QQ)$:0.7915 (사각면에서 사각면으로 남을 확률)
- $P(QH)$:0.2085 (사각면에서 육각면으로 구를 확률)
- $P(HH)$:0.2774 (육각면에서 육각면으로 남을 확률)
- $P(HQ)$:0.7226 (육각면에서 사각면으로 구를 확률)

계산한 확률은 특정 면이 정해졌을 때의 확률이므로 어떤 면이 나타날지에 대한 확률을 계산하여야 한다. 이 확률은 14 면체가 무한히 구를 경우 나타날 수 있는 경우의 수와 같다. 따라서 정사각형과 정삼각형을 가진 14 면체의 경우 삼각면과 사각면이 나타날 확률은 $Pr(Q) : Pr(H) = 1 : 1$ 이다.

최종상태에서 회전하게 되면 더 이상 구르지 않는다는 전제 하에 각 도형이 나타날 확률을 구하면 식(3)과 같다.

$$\begin{aligned} Q &= Pr(Q) \cdot P(QQ) + Pr(H) \cdot P(HQ) \\ H &= Pr(Q) \cdot P(QH) + Pr(H) \cdot P(HH) \end{aligned} \quad (3)$$

식(3)을 계산하면 최종적으로 각 도형이 나타날 확률을 계산할 수 있다.

- 삼각형 도형이 나타날 확률: 0.2430

5. 다물체 동역학 SIMULATION

4 장에서와 같은 이론적 확률 계산을 확인하기 위해 다물체 동역학 Simulation 을 수행 하였다. 다물체 동역학 해석 프로그램인 ADAMS 를 사용하였으며 14 면체를 모델링 한 후 각 꼭지점과 꼭지

접 사이의 중심점에 대해 Contact 요소로 모델링 하였고, 고속카메라 촬영 후 거동 분석을 통해 Contact Parameter 를 결정하였다.

Fig. 9 와 Fig. 10 은 다물체 동역학 모델링 방법 및 Parameter 설정 값을 나타낸다.

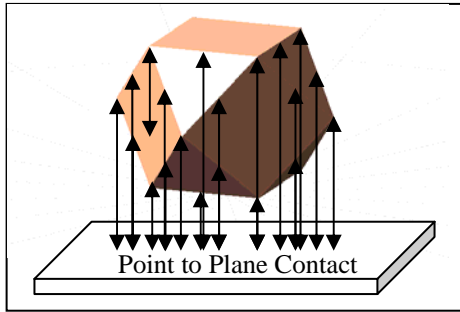


Fig. 9 14 면체 동역학 모델링

Table 3 동역학 모델링 파라미터

Modelling Parameter	
Plastic Density	1.164 g/cm ³
Mass	121g
Friction Coefficient	0.325
Contact Stiffness	1000 N/mm
Force Exponent	1.6
Damping Coefficient	10 N sec/mm
Penetration Depth	0.1mm

Table 4 는 마찰 계수에 따른 삼각형 도형 발생 확률분포를 나타낸다. 각 TEST 는 2000 번의 해석 횟수를 나타내며 도합 총 10000 번의 시뮬레이션을 수행한 것이다. 해석 결과 평균 24.07%를 나타내었다.

Table 4 SIMULATION 삼각형 발생확률

TEST 1	TEST 2	TEST 3	TEST 4	TEST 5	평균
0.239	0.2295	0.2525	0.2525	0.2300	0.2407

동역학 모델은 플라스틱 소재의 실제 14 면체를 제작하여 낙하실험 및 굴림 실험을 통해 Correlation 한 동역학 모델이다. 시뮬레이션 적인 확률 측정 방법이 실제 모델과 유사한 결과를 나타내는지 확인하기 위해 10 명의 사람이 각 140 번씩 굴려 그 발생확률을 실험적으로 검증 해 보았다. Table 5 는 실험적인 확률 분포를 나타낸다.

Table 5 실험에 따른 삼각형 발생확률

TEST 1	TEST 2	TEST 3	TEST 4	TEST 5	
0.2928	0.1786	0.2214	0.2500	0.2643	
TEST 6	TEST 7	TEST 8	TEST 9	TEST 10	평균
0.2286	0.1500	0.2928	0.2143	0.2357	0.2328

6. 결론

지금까지 이론적 해석적 그리고 실험적 연구를 통해 14 면체의 발생확률을 구해 보았다. 기존 논문에서 제시하고 있는 이론적 확률은 구체적이지 못하고 포괄적인 물리법칙을 사용한 반면 본 연구에서는 보다 공학적인 방법으로 확률을 계산하였다. 본 연구에서 제안한 이론적인 확률은 기존에 진행하였던 실험적인 결과(1)(3)와 유사하며 다물체 동역학을 이용한 시뮬레이션을 통해 계산한 확률과도 유사한 결과를 나타내는 것을 알 수 있다. 연구는 실제 주령구에 대한 확률 분포를 계산하기 전에 정삼각형과 정사각형 면을 가진 14 면체에 대한 확률을 계산한 것이다. 앞으로 더 많은 연구를 통해 주령구형태의 14 면체가 어떤 원리에 의해 주사위로 기능할 수 있는 확률이 발생하는지 밝혀내야 할 것이다.

참고문헌

- (1) Put reference text here. Put reference text here. Put reference text here. Put reference text here.
- (2) Hu Myong-Hoe, 1994, "Probabilities for a Cuboctahedral Die", KJAS, Vol 1, pp 113-119
- (3) Powers. D.L,1994 "Probabilities for a Cuboctahedral Die, SAIM Review", Vol 36,pp 109-111
- (4) Che Gyung-Chul, Lee Chung-Suk, 1995, "Mechanical investigation application statistics study about probability of Cuboctahedral Die", KJAS Vol 8 No 2, pp179-185
- (5) Jang Dae-Hueng, 2005, "Reinvestigation of Cuboctahedral Die", Vol 18, No 2, pp 445-452
- (6) MSC.Software, MSC ADAMS Technical Manual, ADAMS 2005r2, 2003