

회전하는 테이퍼 단면 다중 패킷 블레이드 시스템의 진동 해석

김민권[†] · 유홍희^{*}

Vibration Analysis of a Rotating Multi-Packet Blade System Having Tapered Cross Section

Min Kwon Kim and Hong Hee Yoo

Key Words : Modal Analysis (고유진동해석), Multi-packet Blade System (다중 패킷 블레이드 계), Natural Frequency(고유진동수), Shroud (쉬라우드), Disc (디스크), Coupling Stiffness Effect (연성강성효과), Cantilever Beam (외팔 보), Tapered Ratio (테이퍼 단면 비).

Abstract

A modeling method for the modal analysis of a multi-packet blade system having tapered cross section undergoing rotational motion is presented in this paper. Blades are idealized as tapered cantilever beams that are fixed to a rotating disc. The stiffness coupling effects between blades due to the flexibilities of the disc and the shroud are modeled with discrete springs. Hybrid deformation variables are employed to derive the equations of motion. To obtain more general information, the equations of motion are transformed into dimensionless forms in which dimensionless parameters are identified. The effects of the dimensionless parameters including tapered ratio and the number of packets as well as blades on the modal characteristics of the system are investigated with some numerical examples.

1. 서 론

회전운동을 하는 주기적 순환 구조물의 형태를 가진 공학적 예제는 터빈 발전기, 터보 엔진이나 터보 팬, 그리고 헬리콥터의 회전익 등이 있다. 이러한 순환구조물은 축 또는 디스크에 고정단을 갖는 외팔 보 형태의 블레이드들로 구성되며 또한 각각의 블레이드는 쉬라우드라 불리는 지지구조에 의해서 연결되어 있다. 디스크와 쉬라우드는 그 강성에 의해 블레이드 간 연성효과를 야기하는데

이는 단일 블레이드의 경우에는 찾아볼 수 없는 시스템의 고유진동특성에 가장 큰 영향을 미치는 요소 중 하나이다. 따라서 이러한 구조 시스템의 적절한 설계를 위해서는 그 동적 특성을 정확히 예측할 수 있는 해석방법이 요구되어진다.

회전하는 구조물의 진동 특성에 관한 연구는 Southwell과 Gough의 연구를⁽¹⁾ 그 시초로 하고 있다. 이들은 외팔보의 회전에 따른 고유진동수를 구할 수 있는 해석적 모델을 최초로 제시하였다. 그 후 Schilhansl은⁽²⁾ 회전 외팔보의 진동 방정식을 유도하고 Ritz방법을 적용하여 Southwell방정식의 정확성을 제고하였다. 1970 년대에 들어와 전산기의 본격 사용에 힘입어 운동방정식을 고유치 문제로 변환하여 해석을 수행하는 수치적인 방법들이⁽³⁾ 등장하였으며 최근에는 인장방향 변형변

[†] 김민권, 한양대학교 기계공학과 대학원
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
TEL : (02)2220-0446 FAX : (02)2293-5070

^{*} 한양대학교 기계공학부

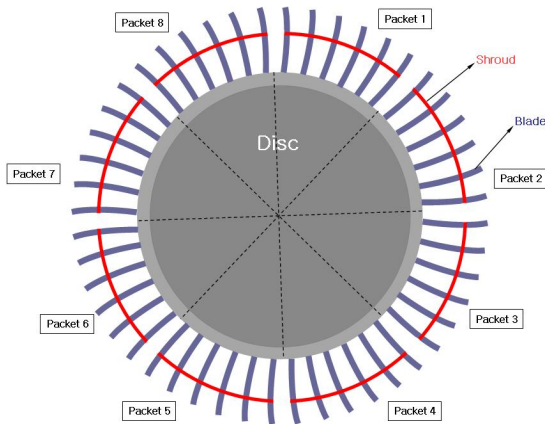


Fig. 1 Configuration of an idealized packet

수를 사용하는 모델링 방법도^(4,5) 등장하였다. 그러나 이러한 연구들은 단일 외팔 보의 진동특성 연구에 초점을 맞추고 있으며 여러 개의 블레이드와 패킷 형태로 구성된 블레이드 시스템에 대한 연구는^(6,7) 상당히 드문 편이다.

본 논문에서는 블레이드를 테이퍼 단면을 갖는⁽⁸⁾ 갖는 외팔 보로 가정하였으며 디스크와 쉬라우드 연성강성을 스프링으로 가정하였다. 블레이드들 간에 연결된 연성 스프링의 강성 및 위치 등을 고려한 패킷 블레이드 시스템의 운동방정식을 유도하기 위하여 복합 변형 변수와 Rayleigh-Ritz method를 적용하였으며 시스템의 일반적인 특성을 파악하기 위해 무차원 운동방정식의 형태로 전환하였다.

본 연구의 목적은 테이퍼 단면을 갖는 여러 개의 블레이드로 구성된 회전하는 다중 패킷 블레이드 시스템의 고유진동특성을 효과적이고 정확하게 예측할 수 있는 동적 모델을 제시하는 데 있다. 수치 해석을 위한 예로는 Fig. 1에 나타난 바와 같이 8개 패킷으로 (1 패킷 당 6개 블레이드) 구성된 모델이 사용되었다. 본 논문은 참고문헌 (5, 6)에 제시된 해석모델과 테이퍼 단면을 갖는 회전 외팔 보의 모델을 토대로 테이퍼 단면 비, 블레이드 간의 연성, 연성스프링의 위치, 블레이드 길이에 대한 축반경비, 회전각속도 등을 고려하여 진동특성 변화를 종합적으로 조사해 시스템 분석 및 설계를 위한 토대를 구축하였다.

2. 운동방정식

이 절에서는 복합변형 변수를 이용한 동적 모델링에 의한 패킷 블레이드 시스템의 운동방정식 유도 과정을 간략히 소개하기로 한다. 이에 관한 상세

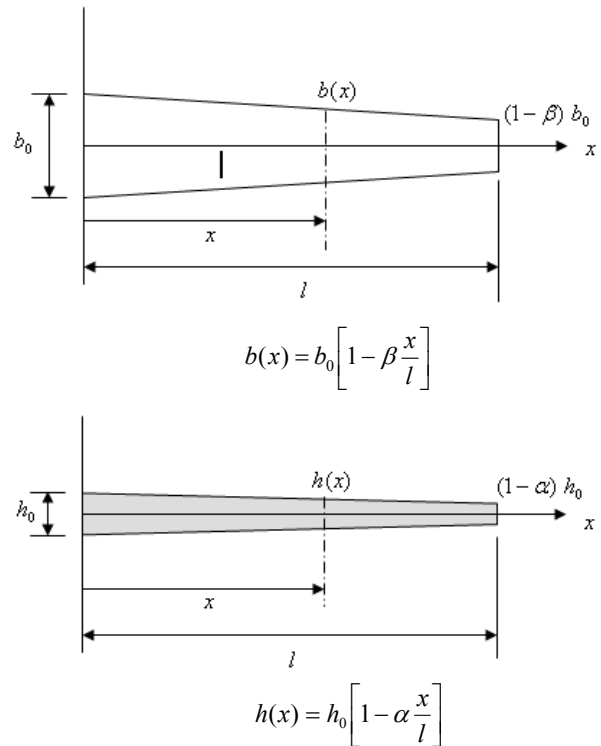


Fig. 2 Configuration of a tapered blade

한 내용은 참고문헌 (4, 5)를 참조할 수 있다.

본 연구에서 시스템의 운동방정식을 유도하기 위해 사용된 블레이드는 균일, 등방성 재질의 외팔 보이며 직사각 테이퍼 단면을 갖고 있다.

Fig. 2는 테이퍼 단면을 갖는 단일 블레이드들의 형상을 나타낸다. 단면의 테이퍼 비율은 단면 두께와 폭의 감소된 정도를 나타내는 두가지 파라미터 α 와 β 로 나타낼 수 있다. 만약 고정단에서 블레이드의 두께가 h_0 라고 한다면 그 자유단에서의 두께는 $(1-\alpha)h_0$ 가 된다. 마찬가지로 고정단에서 블레이드의 폭이 b_0 라면 자유단에서는 $(1-\beta)b_0$ 이다. 디스크와 쉬라우드 강성 스프링은 블레이드의 중심축 상에 존재한다.

Fig. 3은 이상화된 패킷의 형상으로서 탄성변위들의 의미와 기준 좌표계를 나타내고 있다. \hat{a}_1 과 \hat{a}_2 는 기준계(reference frame) A 에 부착된 서로 수직인 단위 벡터를 나타내며, x 는 보의 고정점 O 로부터 변형 전 임의점 P_0 까지의 거리를, k_{Dx} 와 k_{Sx} 는 보 구조물 사이 디스크와 쉬라우드의 \hat{a}_x 방향 연성스프링 강성을, a_D 와 a_S 는 연성스프링의 연결된 위치를, $\vec{u}^{<k>}$ 는 k 번째 블레이드의 탄성변위를, $s^{<k>}$ 는 임의 질점의 위치에서 블레이드가 인장된 길이를 각각 나타낸다. 가상모

드

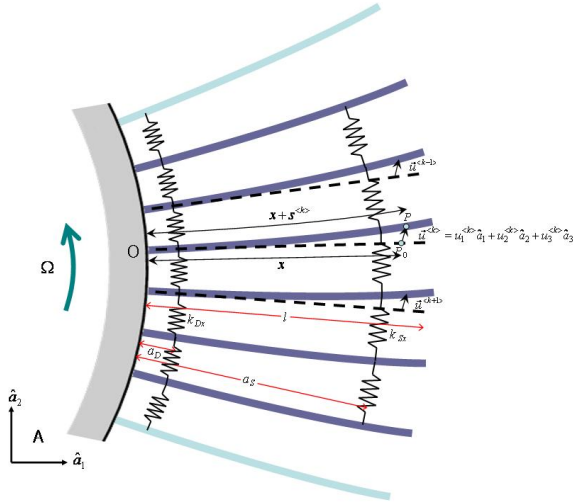


Fig. 3 Configuration of an idealized packet

법을 이용해 상미분 운동방정식을 유도하기 위해 $s^{<k>}$ 와 $u_2^{<k>}$ 를 다음과 같이 근사화한다.

$$s^{<k>}(x,t) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i}(x) q_{1i}^{<k>}(t) \quad (1)$$

$$u_2^{<k>}(x,t) = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i}(x) q_{2i}^{<k>}(t) \quad (2)$$

여기서 ϕ_{1i} , ϕ_{2i} 는 인장방향과 굽힘방향의 모드함수들이고, $q_{1i}^{<k>}$, $q_{2i}^{<k>}$ 는 시간의 함수인 일반좌표들이며, μ_1 , μ_2 는 각 방향 일반좌표의 수이다. 반경 r 인 강체축 A 가 \vec{a}_3 방향으로 속력 Ω 로 회전할 때 A 의 각속도와 P 점의 속도는 다음과 같이 구해진다.

$$\vec{\omega}^A = \Omega \hat{a}_3 \quad (3)$$

$$\vec{v}^P = [\dot{u}_1^{<k>} - \Omega u_2] \hat{a}_1 + [\dot{u}_2 + \Omega(r+x+u_1^{<k>})] \hat{a}_2 \quad (4)$$

Kane의 방법을(7) 따른 운동방정식은 다음과 같다.

$$\int_0^l \rho \left(\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \frac{d\vec{v}^P}{dt} dx + \frac{\partial U^{<k>}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (5)$$

여기서 l 과 ρ 는 보의 길이와 보의 단위길이당 질량을 나타내며 q_i 는 일반좌표를 나타낸다. $U^{<k>}$ 는 보의 인장 및 굽힘에 의한 탄성에너지, 연성 스프링에 의한 탄성에너지로 다음과 같이 표현된다.

$$U^{<k>} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[EA \left(\frac{\partial s^{<k>}}{\partial x} \right)^2 + EI \left(\frac{\partial^2 u_2^{<k>}}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} k_D [u_2^{<k>}(a_D) - u_2^{<k-1>}(a_D)]^2 + \frac{1}{2} k_D [u_2^{<k+1>}(a_D) - u_2^{<k>}(a_D)]^2 + \frac{1}{2} k_S [u_2^{<k>}(a_S) - u_2^{<k-1>}(a_S)]^2 + \frac{1}{2} k_S [u_2^{<k+1>}(a_S) - u_2^{<k>}(a_S)]^2 \quad (6)$$

여기서 k_D , k_S 는 각각 디스크와 쉬라우드 연성 스프링 강성을 나타내며 E 는 보의 영계수, A 는 단면적, I 는 단면의 관성 모멘트이다. 본 연구에서 사용된 보의 테이퍼 단면을 갖고 있으므로 A 와 I 는 x 의 함수이다.

편속도 $\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_i}$ 는 식 (4)의 $\dot{u}_1^{<k>}$ 을 $s^{<k>}$ 와 $u_2^{<k>}$ 를 이용하여 표현함으로써 얻을 수 있으며 이를 위해 다음의 근사화된 관계식이 사용된다(10).

$$s^{<k>} = u_1^{<k>} + \frac{1}{2} \int_0^x \left[\left(\frac{\partial u_2^{<k>}}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3^{<k>}}{\partial \sigma} \right)^2 \right] d\sigma \quad (7)$$

이상의 식들을 이용하여 각속도가 일정하다는 가정 하에 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} [m_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j}^{<k>} - \Omega^2 m_{ij}^{11} q_{1j}^{<k>} + k_{ij}^S q_{1j}^{<k>}] - 2\Omega \sum_{j=1}^{\mu_2} m_{ij}^{12} \ddot{q}_{2j}^{<k>} = r\Omega^2 P_{ii} + \Omega^2 Q_{ii} \quad (i=1,2,\dots,\mu_1) \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} [m_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j}^{<k>} + \{k_{ij}^{B2} + \Omega^2(k_{ij}^G - m_{ij}^{22})\} q_{2j}^{<k>}] - k_{ij}^{Cd2} (q_{2j}^{<k-1>} - 2q_{2j}^{<k>} + q_{2j}^{<k+1>}) - k_{ij}^{Cs2} (q_{2j}^{<k-1>} - 2q_{2j}^{<k>} + q_{2j}^{<k+1>}) + \sum_{j=1}^{\mu_1} [2\Omega m_{ij}^{21} \dot{q}_{1j}^{<k>}] = 0 \quad (i=1,2,\dots,\mu_2) \quad (9)$$

위 식에 나타난 행렬들은 다음과 같다.

$$m_{ij}^{ab} = \int_0^l \rho \phi_{ai}(x) \phi_{bj}(x) dx$$

$$k_{ij}^S = \int_0^l EA \phi'_{1i}(x) \phi'_{1j}(x) dx$$

$$k_{ij}^B = \int_0^l EI \phi''_{2i}(x) \phi''_{2j}(x) dx$$

$$k_{ij}^G = \int_0^l G(x) \phi_{2i,x}(x) \phi_{2j,x}(x) dx$$

$$k_{ij}^{Cd} = k_D \phi_{2i}(a_D) \phi_{2j}(a_D)$$

$$k_{ij}^{Cs} = k_S \phi_{2i}(a_S) \phi_{2j}(a_S)$$

$$P_{ai} = \int_0^l \rho \phi_{ai}(x) dx$$

$$Q_{ai} = \int_0^l \rho x \phi_{ai}(x) dx$$

위 식에서 ϕ_{ai} 는 모드함수로서 x 에 대한 함수이다. k_{ij}^G 의 정의에 의해서 $G(x)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$G(x) = \rho_0 \left[r(l-x) + \frac{[l-(\alpha+\beta)r]}{2l} (l^2 - x^2) + \frac{[r\alpha\beta - l(\alpha+\beta)]}{3l} (l^3 - x^3) + \frac{\alpha\beta}{4l^2} (l^4 - x^4) \right] \quad (10)$$

일반적으로 회전하는 보의 인장방향 고유진동수는 굽힘방향 고유진동수에 비해 매우 높으며, 따라서 두 방향 모드들은 서로 간섭 효과를 가지지 않는다는 가정하에 두 방향 간의 연성효과는 무시할 수 있다. 인장, 굽힘 간 연성항을 제거하면 식 (8) 과 (9)는 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} \left[m_{ij}^{22} q_{2j}^{<k>} + \left\{ k_{ij}^B + \Omega^2 (k_{ij}^G - m_{ij}^{22}) \right\} q_{2j}^{<k>} \right] - k_{ij}^{Cd} (q_{2j}^{<k-1>} - 2q_{2j}^{<k>} + q_{2j}^{<k+1>}) - k_{ij}^{Cs} (q_{2j}^{<k-1>} - 2q_{2j}^{<k>} + q_{2j}^{<k+1>}) = 0 \quad (i=1,2,\dots,\mu_2) \quad (11)$$

식 (13)과 (14)을 무차원 진동방정식으로 변환시키기 위해 다음과 같은 무차원 변수들을 정의한다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T}, \quad \xi \equiv \frac{x}{l}, \quad \theta_j^{<k>} \equiv \frac{q_{2j}^{<k>}}{l} \quad (12)$$

T 는 다음과 같다.

$$T = \sqrt{\frac{\rho l^4}{EI_0}}$$

I_0 는 고정단에서 블레이드의 2 차 면적 모멘트를 나타낸다. 위의 무차원 변수들을 사용하면 다음과 같은 무차원 진동방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} \left[M_{ij} \ddot{\theta}_j^{<k>} + \left\{ K_{ij}^B + \gamma^2 (K_{ij}^G - M_{ij}) \right\} \theta_j^{<k>} \right] - K_{ij}^{Cd} (\theta_j^{<k-1>} - 2\theta_j^{<k>} + \theta_j^{<k+1>}) - K_{ij}^{Cs} (\theta_j^{<k-1>} - 2\theta_j^{<k>} + \theta_j^{<k+1>}) = 0 \quad (i=1,2,\dots,\mu_2) \quad (13)$$

여기서,

$$\gamma = \Omega T$$

$$M_{ij} = \int_0^1 [1-(1-\alpha)\xi][1-(1-\beta)\xi] \phi_i(\xi) \phi_j(\xi) d\xi$$

$$K_{ij}^B = \int_0^1 [1-(1-\alpha)\xi]^3 [1-(1-\beta)\xi] \phi_i''(\xi) \phi_j''(\xi) d\xi$$

$$K_{ij}^G = \int_0^1 g(\xi) \phi_i'(\xi) \phi_j'(\xi) d\xi$$

$$K_{ij}^{Cd} = \beta_D \phi_i(\xi_D) \phi_j(\xi_D)$$

$$K_{ij}^{Cs} = \beta_S \phi_i(\xi_S) \phi_j(\xi_S)$$

ϕ_i 는 ξ 의 함수로서 보의 굽힘 방향에 대한 모드 함수를 무차원화한 형태이다. 위에서 나타난 무차원 매개변수들은 다음과 같다.

$$\delta \equiv \frac{r}{l}, \quad \xi_D \equiv \frac{a_D}{l}, \quad \xi_S \equiv \frac{a_S}{l}, \quad \beta_D = \frac{k_D l^3}{EI}, \quad \beta_S = \frac{k_S l^3}{EI}$$

K_{ij}^G 는 그 정의로부터 다음과 같이 유도된다.

$$g(\xi) = \delta(1-\xi) + \frac{1}{2} [1-(\alpha+\beta)\delta] (1-\xi^2) + \frac{1}{3} [\alpha\beta\delta - \alpha - \beta] (1-\xi^3) + \frac{1}{4} \alpha\beta (1-\xi^4) \quad (14)$$

다중 패킷 블레이드 시스템의 경우, 두 패킷 사이에는 쉬라우드 스프링 강성이 존재하지 않으므로 이 같은 특성을 효율적으로 표현하기 위해 다음과 같이 변환된 형태의 무차원 진동방정식을 사용하였다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} \left[M_{ij} \ddot{\theta}_j^{<k>} + \left\{ K_{ij}^B + \gamma^2 (K_{ij}^G - M_{ij}) \right\} \theta_j^{<k>} \right] - K_{ij}^{Cd} (\theta_j^{<k-1>} - 2\theta_j^{<k>} + \theta_j^{<k+1>}) - K_{ij}^{Cs} (\theta_j^{<k+1>} - \theta_j^{<k>}) - K_{ij}^{Cs} (\theta_j^{<k-1>} - \theta_j^{<k>}) = 0 \quad (15)$$

K_{ij}^{Cs} 와 K_{ij}^{Cs} 은 다음과 같이 정의되는 함수로 식 (17)의 조건을 갖는다.

$$K_{ij}^{Cs} \equiv \delta_F^*(k) K_{ij}^{Cs} \quad (16)$$

$$K_{ij}^{Cs} \equiv \delta_R^*(k) K_{ij}^{Cs}$$

$$\delta_F^*(k) = \begin{cases} 0 & \text{if } \text{mod}(k,m) = 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (17)$$

$$\delta_R^*(k) = \begin{cases} 0 & \text{if } \text{mod}(k,m) = 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

위 식에서 m 은 한 패킷 내에 존재하는 블레이드의 개수를 나타내며 함수 $\text{mod}(k,m)$ 은 k 를 m 으로 나누었을 때의 나머지를 뜻한다. 또한 마지막 블레이드는 첫번째 블레이드와 연결되어 있으므로 k 가 시스템의 총 블레이드의 개수 n 와 같은 경우 $k+1$ 은 1 이 된다. 이상의 과정들을 종합하여 식 (15)를 다음과 같은 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$[\bar{M}]\{\theta\} + [\bar{K}]\{\theta\} = 0 \quad (19)$$

모드 해석을 위하여 열벡터 $\{\theta\}$ 를 다음과 같이 나타낸다.

$$\{\theta\} = e^{j\omega t} \{\eta\} \quad (20)$$

여기서 ω 는 시스템의 무차원 고유진동수이다. 식 (17)과 (18)을 이용하여 얻는 다음 식을 통해 모드 해석을 수행할 수 있다.

$$\omega^2 [\bar{M}]\{\eta\} = [\bar{K}]\{\eta\} \quad (21)$$

3. 수치해석

수치해석을 위해 굽힘방향 변위의 가상모드 (assumed modes)로 고정된 외팔보의 굽힘진동모드를 적용하였으며 굽힘방향에 대해 5 개의 모드 함수가 사용되었다. 본 절에서 사용된 수치예제는 8 개 패킷, 총 48 개의 블레이드로 구성된 시스템으로서 각 패킷에는 6 개의 블레이드가 존재한다. 시스템의 고유진동수는 5 개 그룹, 총 240 개이며 한 그룹은 48 개의 고유진동수로 이루어져 있다. Fig. 4 는 이 중 낮은 2 개 그룹의 결과로서 고유진동수가 회전 각속도에 따라 증가하는 것을 보여 준다. 이러한 현상은 직관적으로 예측될 수 있는 것이다.

Fig. 5 과 Fig. 6 는 각각, 테이퍼 단면 비를 나타내는 무차원 매개변수 α 와 β 가 첫번째 그룹의 고유진동수 변화에 미치는 영향을 나타낸 그림이

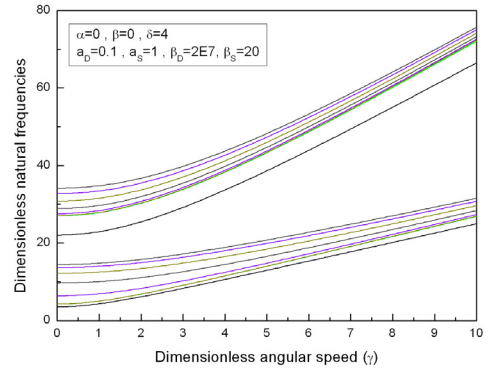


Fig. 4 Natural frequency variations

다. 그림에서 α 와 β 가 커짐에 따라 고유진동수는 확연히 감소함을 확인하였으며 이러한 현상은 무차원 각속도 γ 가 증가할수록 더 뚜렷하게 나타났다. 이는 테이퍼 단면으로 인한 효과를 나타내는 K_{ij}^G 행렬이 stiffening effect 항 내에 있기 때문이며 운동방정식 상에서도 이를 확인할 수 있다. 보다 명확한 비교를 위해 Table 1 에서는 $\gamma=5$ 일 경우, 각각의 경우에 대한 η 번째 고유진동수를 나타내었다.

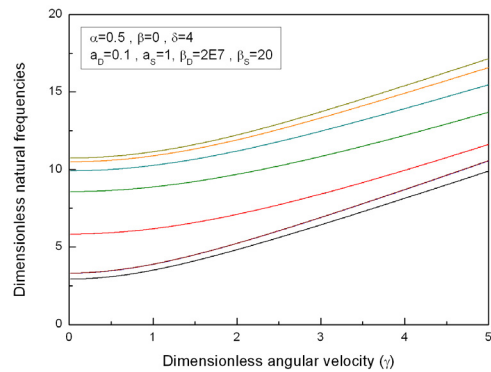
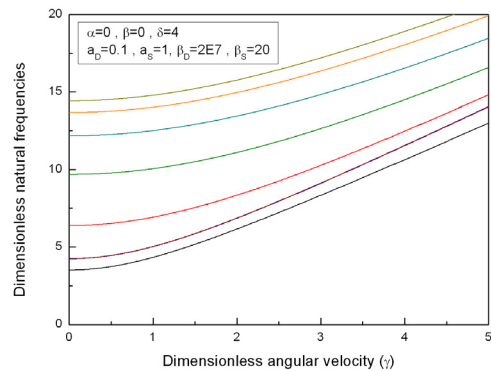


Fig. 5 Natural frequency variations for different α 's

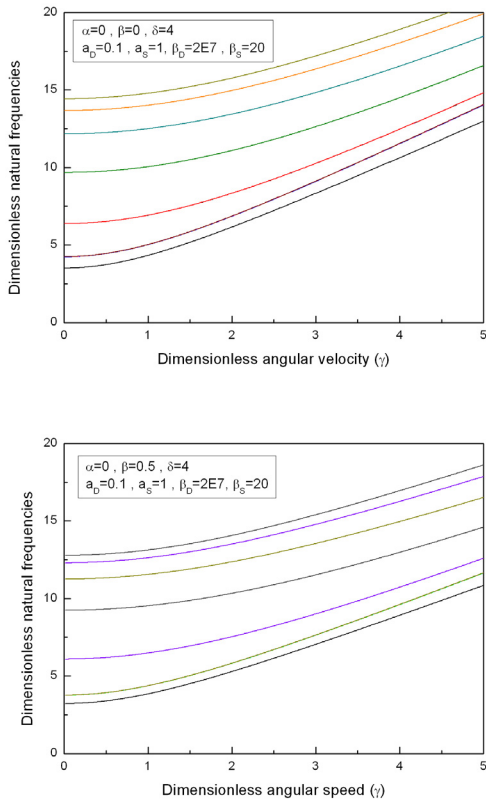


Fig. 6 Natural frequency variations for different β 's

η	$\alpha = 0, \beta = 0$	$\alpha = 0.5, \beta = 0$	$\alpha = 0, \beta = 0.5$
1	12.99093	9.89933	10.85001
12	14.82004	11.6193	12.59746
24	16.58302	13.69614	14.60503
36	19.91727	16.57254	17.86865
48	20.78991	17.14543	18.61531

Table 1 Natural frequencies for different taper ratio

4. 결론

본 논문에서는 디스크와 테이퍼 단면을 갖는 회전 운동을 하는 다중 패킷 블레이드 시스템의 고유진동 특성을 예측하기 위한 모델링 방법이 제시되었으며 이를 이용해 회전각속도, 축반경 비, 디스크와 쉬라우드의 강성을 고려한 해석 결과를 도출하였다. 본 논문에서는 특히 단면의 테이퍼 비가 고유진동수 변화에 미치는 영향을 집중적으로 조사하였으며 테이퍼 비가 커짐에 따라 고유진동수가 감소함을 확인하였다. 이 같은 현상은 각속도가 커질수록, 고차모드로 갈수록 뚜렷하게 나타나는

것을 알 수 있었다. 테이퍼 단면을 갖는 다중 블레이드 형태의 구조물의 경우, 항공기 회전익이나 발전기 터빈 등 많은 분야에 사용되고 있으므로 논문에 제시된 방법은 디스크와 축판의 강성들을 고려한 블레이드 구조설계 시 유용하게 사용될 수 있으며 관련 연구분야에도 이해되고 응용될 수 있으리라 판단된다.

후 기

본 논문은 2008년도 2 단계 두뇌한국 21 프로젝트에 의해서 지원되었습니다.

참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," *British A. R. C. Reports and Memoranda* No.766.
- (2) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 25, pp. 28~30.
- (3) Putter, S. And Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *J. Sound and Vibration*, Vol. 56, pp. 175~185.
- (4) Yoo, H. H., 1991, "A Linear Dynamic Modeling Using Hybrid Deformation Variables for Rotating Structures." *KSAS*, Vol. 19, No. 3, pp. 32~39.
- (5) Yoo, H. H., 1991, "Bending Vibration of Rotating Cantilever Beams," *Transactions of the KSME*, Vol. 16, No. 5, pp. 891~898.
- (6) Singh, M. P. and Schiffer, D M., 1982, "Vibrational Characteristics of Packeted Bladed Discs," *ASME Paper* No. 82-DET-137
- (7) Kane, T. and Levinson, D., 1985, *Dynamics : Theory and Applications*, McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y.
- (8) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, "Dynamic of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," *J. of Sound and Vibration*, 181(2), pp. 261~278.