

# 확률론 방법에 의한 불규칙 진동 비선형 계의 준선형화

이 신 영<sup>†</sup>, G. Q. Cai<sup>\*</sup>

## Quasi-linearization of non-linear systems under random vibration by probabilistic method

Sin-Young Lee<sup>†</sup>, G. Q. Cai<sup>\*</sup>

**Key Words:** Nonlinear system(비선형 계), Quasi-linearization(준선형화), Probabilistic method(확률론 방법), Monte Carlo simulation(몬테카를로 모사)

### Abstract

Vibration of a non-linear system under random parametric excitations was evaluated by probabilistic methods. The non-linear characteristic terms of a system were quasi-linearized and excitation terms were remained as they were given. An analytical method where the square mean of error was minimized was used. An alternative method was an energy method where the damping energy and restoring energy of the linearized system were equalized to those of the original non-linear system. The numerical results were compared with those obtained by Monte Carlo simulation. The comparison showed the results obtained by Monte Carlo simulation located between those by the analytical method and those by the energy method.

### 1. 서 론

구조물에 대한 중량과 비용의 감소가 요구되는 반면 성능은 개선하는 것이 지속적으로 요구되기 때문에, 변동하는 가진력을 받는 시스템의 진동 평가는 중요성이 증대되고 있다<sup>(1)</sup>. 많은 경우 구조물의 특성과 가진 특성에는 불규칙성이 포함되므로, 불규칙 변수 가진 하의 비선형 구조에 대한 동적 응답 평가 및 신뢰성 분석을 하는 것이 요구될 수 있다<sup>(2-3)</sup>.

통계적 선형화의 기본 개념은 비선형 시스템을 원래 시스템과 유사한 거동을 하는 등가 선형

시스템으로 대체하는 것이다. 그 문제를 처리하는 효과적인 방법으로 준선형화를 들 수 있고, 이 경우 시스템의 비선형 항은 선형화하고, 변수 가진 항은 변화하지 않고 유지한다. 두 가지의 선형화 기준이 선형화 과정에서 사용되어 왔다. 일반적인 방법은 원래의 시스템과 선형화된 시스템 사이의 차이의 오차제곱의 기댓값을 최소화하는 것이다<sup>(4,5)</sup>. 또다른 방법은 두 시스템의 감쇠에너지와 탄성에너지에 대한 기댓값을 같도록 하는 것이다. 본 연구에서는, 두 가지 기준을 가지고 준선형화 방법을 1 자유도 및 2 자유도를 갖는 시스템에 적용하였다. 2계와 4계에 대한 정적 모멘트 방정식은 이토의 통계학적 미분 방정식을 이용하여 구하였다. 반복법에 의하여 등가 선형화 계수를 계산하고 모멘트 방정식을 해결하였다.

두 가지 선형화 기준에 의하여 구한 수치 결과를 몬테 카를로 모사에 의하여 얻은 결과와 비교하였다. 비교 결과 몬테 카를로 모사에 의하여

---

<sup>†</sup>책임저자, 회원, 군산대학교 기계자동차공학부

E-mail : sinylee@kunsan.ac.kr

TEL : (063)469-4716

FAX : (063)469-4727

\* Dept. of Mechanical Eng., Florida Atlantic Univ.

---

얻은 결과는 두 선형화 방법에 의하여 얻은 결과 사이에 위치하였다. 그러므로 두 선형화 기준을 결합하는 새로운 조합 방법을 얻었고, 몬테 카를로 모사로부터의 결과와 잘 일치하였다.

## 2. 비선형 계의 준선형화

### 2.1 1 자유도계

변수 가진을 받는 비선형 계의 일반적인 방정식은 식 (1)과 같다<sup>(5, 6)</sup>.

$$\begin{aligned} \dot{Y}_j(t) + h_j(Y(t), \dot{Y}(t)) = \xi_j(t) \\ + \sum_{i=1}^n [a_{ji} Y_i(t) \eta_i(t) + b_{ji} Y_i(t) \nu_i(t)] \end{aligned} \quad (1)$$

본 연구에서는 다음의 식 (2)와 같은 비선형 감쇠와 강성을 갖는 시스템에 대하여 해석한다.

$$\begin{aligned} \ddot{Y} + 2\alpha_1 \dot{Y} + \lambda \dot{Y}^3 + \Omega_1^2 Y + \delta Y^3 \\ = \dot{Y}\eta(t) + Y\dot{\nu}(t) + \xi(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Gauss 백색 잡음  $\eta(t)$ ,  $\nu(t)$  및  $\xi(t)$ 의 스펙트럼 밀도를 각각  $K_{\eta\eta}$ ,  $K_{\nu\nu}$  및  $K_{\xi\xi}$  이고, 세 가지 가진은 편의상 서로 연관되지 않는다고 가정한다. 비선형 시스템 (2)는 다음과 같은 등가 준선형계로 대치할 수 있다.

$$\ddot{Y} + 2\alpha \dot{Y} + \Omega^2 Y = \dot{Y}\eta(t) + Y\dot{\nu}(t) + \xi(t) \quad (3)$$

여기에서  $\alpha$ 와  $\Omega$ 는 등가 선형화계수이다.  $X_1 = Y$ ,  $X_2 = \dot{Y}$ 이라고 하면, 식 (3)에서 Ito 통계학적 방정식이 유도된다.<sup>(5)</sup>

$$dX_1 = X_2 dt, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} dX_2 = (-2\alpha X_2 + \pi K_{\eta\eta} X_2 - \Omega^2 X_1) dt \\ + [2\pi(K_{\nu\nu} X_1^2 + K_{\eta\eta} X_2^2 + K_{\xi\xi})]^{1/2} dB(t) \end{aligned} \quad (5)$$

여기에서  $B(t)$ 는 단위 Wiener과정이고,

$$E[dB(t_1)dB(t_2)] = \begin{cases} 0, & t_1 \neq t_2 \\ dt, & t_1 = t_2 = t \end{cases} \quad (6)$$

Ito의 통계학적 미분규칙(stochastic differential rule)은 다음과 같다.  $p$ 차 적률(moments)을  $M$ 이라고 하면,

$$M(X) = X_1^{k_1} X_2^{k_2}, \quad p = k_1 + k_2 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E[M] = E \left[ X_2 \frac{\partial M}{\partial X_1} \right. \\ \left. + (-2\alpha X_2 + \pi K_{\eta\eta} X_2 - \Omega^2 X_1) \frac{\partial M}{\partial X_2} \right. \\ \left. + \pi(K_{\nu\nu} X_1^2 + K_{\eta\eta} X_2^2 + K_{\xi\xi}) \frac{\partial^2 M}{\partial X_2^2} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

2차 적률의 정상상태 해는

$$\begin{aligned} m_{20} = \frac{\pi K_{\xi\xi}}{2\Omega^2(\alpha - \pi K_{\eta\eta}) - \pi K_{\nu\nu}}, \\ m_{02} = \Omega^2 m_{20}, \quad m_{11} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

같은 방법으로, 4차 정상상태 해는

$$m_{40} = \frac{3\pi K_{\xi\xi} m_{20}}{\Delta m} [2\Omega^2 + 3A_{23}(\alpha - 2\pi K_{\eta\eta})]$$

여기에서

$$\begin{aligned} \Delta m = \Omega^4(4\alpha - 7\pi K_{\eta\eta}) - 3\pi K_{\nu\nu} \Omega^2 \\ + A_{23}(\alpha - 2\pi K_{\eta\eta})[6(\alpha - \pi K_{\eta\eta})\Omega^2 - 9\pi K_{\nu\nu}] \\ A_{23} = 2\alpha - 3\pi K_{\eta\eta} \\ m_{31} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$m_{22} = \frac{\Omega^2}{3} m_{40}$$

$$m_{13} = \frac{2}{3} (\alpha - \pi K_{\eta\eta}) \Omega^2 m_{40} - \pi K_{\nu\nu} m_{40} - \pi K_{\xi\xi} m_{20}$$

$$\begin{aligned} m_{04} = A_{23}[2(\alpha - \pi K_{\eta\eta})\Omega^2 - 3\pi K_{\nu\nu}] m_{40} \\ + \Omega^4 m_{40} - 3\pi A_{23} K_{\xi\xi} m_{20} \end{aligned}$$

준선형화 시스템에서 등가 선형화 계수는 오차 제곱의 기댓값을 최소화하도록 선정한다.

$$E[\{error\}^2] = \min. \quad (11)$$

여기에서

$$error = (2\alpha_1 - 2\alpha) \dot{Y} + (\Omega_1^2 - \Omega^2) Y + \lambda \dot{Y}^3 + \delta Y^3$$

식 (11)을  $\alpha$ 와  $\Omega^2$ 에 대하여 편미분하고 기댓값을 취하면 등가 선형화계수를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha_1 + \frac{\lambda m_{04} + \delta m_{31}}{2 m_{02}}, \\ \Omega^2 = \Omega_1^2 + \frac{\delta m_{40}}{m_{20}} \end{aligned} \quad (12)$$

대안으로 에너지 방법을 제시한다. 원래의 비선형 시스템 (2)와 준선형화 시스템(3)의 강성 및 감쇠 에너지의 확률 평균이 동일할 조건으로부터

$$E[\alpha \dot{Y}^2] = E[\alpha_1 \dot{Y}^2 + \frac{1}{4} \lambda \dot{Y}^4],$$

$$E[\frac{1}{2} \Omega^2 Y^2] = E[\frac{1}{2} \Omega_1^2 + \frac{1}{4} \delta Y^4] \quad (13)$$

정리하면

$$a = a_1 + \frac{\lambda m_{04}}{4 m_{02}}, \quad \Omega^2 = \Omega_1^2 + \frac{\delta m_{40}}{2 m_{20}} \quad (14)$$

식 (9), (10) 및 식 (12) 또는 식 (9), (10) 및 식 (14)를 반복적으로 풀면 선형화 감쇠계수를 구할 수 있다.

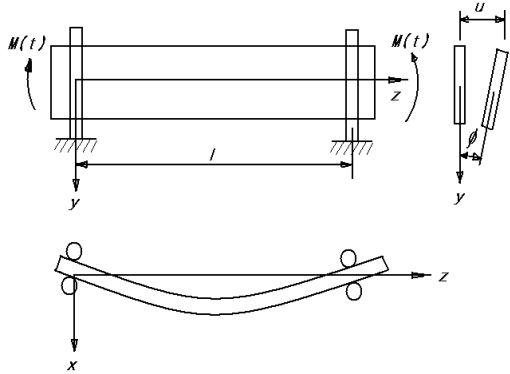


Fig. 1 A beam with narrow rectangular cross section

## 2.2 2 자유도 계

폭이 좁은 직사각형 단면을 갖는 균일 탄성 보를 고려한다. Fig. 1과 같이 단순 지지되어 있고, 양단에서 불규칙하게 변화하는 굽힘 모멘트를 받는다고 한다. 양단의 굽힘 모멘트는 같은 크기이고 광대역 정상 과정이라고 가정한다.

선형 시스템인 경우 보의 운동 지배방정식은 다음과 같다<sup>(8)</sup>.

$$EI_x \frac{\partial^4}{\partial z^4} v + m \ddot{v} + a \dot{v} = 0$$

$$EI_y \frac{\partial^4}{\partial z^4} u + M(t) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi + m \ddot{u} + \beta \dot{u} = 0$$

$$M(t) \frac{\partial^2}{\partial z^2} u - GJ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi + m \rho^2 \ddot{\phi} + \gamma \dot{\phi} = 0 \quad (15)$$

여기에서  $v = y$  방향에서의 변위,  $u = x$  방향에서의 변위,  $\phi =$  비틀림 각,  $EI_x = x$ 축에 관한 굽힘 강성,  $EI_y = y$ 축에 관한 굽힘 강성,  $GJ =$  비틀림 강성,  $m =$  단위 길이 당 보의 질량,  $\rho =$  보 단면의 극 회전반경,  $a, \beta, \gamma$ 는 점성 감쇠계수이다.  $u$ 와  $\phi$  운동은 연성되어 있고,  $v$  운동과는 비연성이다. 이 보의 경우  $x$ 축에 관한 굽힘 변형에 대하여 강하므로 연성된  $u$ 와  $\phi$  운동이 가장 큰 실용적 관심의 대상이 된다. 기본 모드를 고

려하고, 무차원 변수를 도입하며, 측변위에 기인하는 감쇠력이 속도의 3제곱 항을 갖는 비선형, 측변위에 외란이 작용한다고 가정하면

$$\ddot{Q}_1 + 2a \dot{Q}_1 + \lambda \dot{Q}_1^3 + \omega_1^2 Q_1 = \omega_1 \omega_2 Q_2 \eta(t) + \xi(t)$$

$$\ddot{Q}_2 + 2\zeta_2 \omega_2 \dot{Q}_2 + \omega_2^2 Q_2 = \omega_1 \omega_2 Q_1 \eta(t) \quad (16)$$

$\eta(t)$ 와  $\xi(t)$ 는 가우스 백색잡음이다.

준선형화를 적용하면 다음 식 (17)이 얻어진다.

$$\ddot{Q}_1 + 2\zeta_1 \omega_1 \dot{Q}_1 + \omega_1^2 Q_1 = \omega_1 \omega_2 Q_2 \eta(t) + \xi(t)$$

$$\ddot{Q}_2 + 2\zeta_2 \omega_2 \dot{Q}_2 + \omega_2^2 Q_2 = \omega_1 \omega_2 Q_1 \eta(t) \quad (17)$$

2.1절과 같은 방법으로 2차 적률에 대한 정상상태 해를 구하는 절차로부터

$$m_{2000} = \frac{2\pi\zeta_2 K_{\xi\xi}}{\omega_1^3(4\zeta_1\zeta_2 - \pi^2\omega_1\omega_2 K_{\eta\eta}^2)}, \quad m_{0020} = \omega_1^2 m_{2000},$$

$$m_{0200} = \frac{\pi\omega_1^2 K_{\eta\eta}}{2\zeta_2\omega_2} m_{2000}, \quad m_{0002} = \omega_2 m_{0200} \quad (18)$$

그 외의 2차 적률은 0이다. 4차 적률에 대해서는 연립방정식을 세울 수 있다.

$$3m_{2110} + m_{3001} = 0$$

$$3m_{2020} - 2\zeta_1\omega_1 m_{3010} - \omega_1^2 m_{4000} = 0$$

$$3m_{2011} - 2\zeta_2\omega_2 m_{3001} - \omega_2^2 m_{3100} = 0 \quad (19)$$

$$2\zeta_1\omega_1 m_{2020} - m_{1030} + \omega_1^2 m_{3010}$$

$$- \pi K_{\eta\eta} \omega_1^2 \omega_2^2 m_{2200} = \pi K_{\xi\xi} m_{2000}$$

$$3m_{0202} - 2\zeta_2\omega_2 m_{0301} - \omega_2 m_{0400} = 0$$

오차의 제곱평균을 최소화하도록 선정하면,

$$E\{(2aX_3 + \lambda X_3^3 - 2\zeta_1\omega_1 X_3)^2\} = \min. \quad (20)$$

$$\zeta_1 = \frac{a_1}{\omega_1} + \frac{\lambda m_{0040}}{2\omega_1 m_{0020}} \quad (21)$$

대안으로써, 에너지 방법을 적용하면

$$\zeta_1 = \frac{a_1}{\omega_1} + \frac{\lambda m_{0040}}{4\omega_1 m_{0020}} \quad (22)$$

식 (18), (18) 및 식 (21) 또는 (22)를 반복적으로 풀면 선형화 감쇠계수를 구할 수 있다.

## 3. 몬테카를로 모사

몬테 카를로 모사(Monte Carlo Simulation, MCS)는 수치 계산을 수행하기 위하여 난수(random number)의 수열을 이용하는 방법을 가리키는 일반적인 용어이다<sup>(9-11)</sup>. 많이 사용하는 난수 발생 방법은 선형 조화 발생기이고, 다음의 순환 방정식

에 기초한다.

$$X_{n+1} = (A \times X_n + C) \text{ mod } M \quad (23)$$

여기에서  $X_{n+1}$ 은 새로 발생되는 난수,  $X_n$ 은 직전에 발생된 난수,  $A$ 는 배수,  $C$ 는 증분, 모듈  $M$ 은  $M > X_n$ ,  $M > A$ , 및  $M > C$ . 박스밀러 (Box-Muller) 방법<sup>(9-10)</sup>에 의하여 정규분포로 변환하고, 룬게쿠타(Runge-Kutta) 방법<sup>(12-13)</sup>을 이용하여 시각이력 응답을 구하였으며 정상상태 적률과 응답의 스펙트럼밀도를 계산하였다.

#### 4. 수치해석 결과

##### 4.1 1 자유도계

시스템 (2)에 대한 수치 계산을 하기 위하여  $\alpha_1 = 0.4$ ,  $\Omega_1 = 6.0$ 인 경우에 해석을 실시하고, MCS의 결과와 비교하였다. Fig. 2는  $\lambda = 0.1$  or  $1.0$ ,  $\delta = 5.0$  or  $50.0$ 인 경우의 결과를 나타낸다.

Fig. 3은  $\alpha_1 = 0.4$ ,  $\Omega_1 = 6$ ,  $K_{yy} = 0.5$ ,  $K_{nn} = 0.05$ 인 경우부가 가진의 스펙트럼 밀도  $K_{\xi\xi}$ 에 따른  $E[Y_1^2]$ 을 나타내고, Fig. 4는  $\alpha_1 = 0.8$ ,  $\Omega_1 = 12$ ,  $K_{yy} = 1.0$ ,  $K_{nn} = 0.1$ 인 경우의  $E[Y_1^2]$ 을, Fig. 5는 그 중  $K_{\xi\xi} = 1.5$ 인 경우의 스펙트럼밀도를 나타낸다.

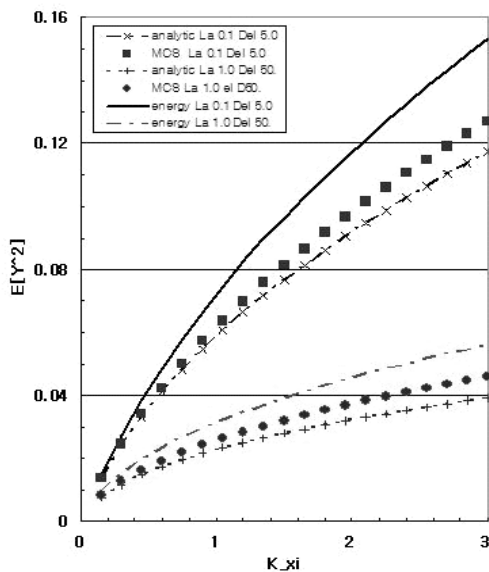


Fig. 2 Stationary mean square with  $\lambda \bar{Y}^3$  and  $\delta Y^3$

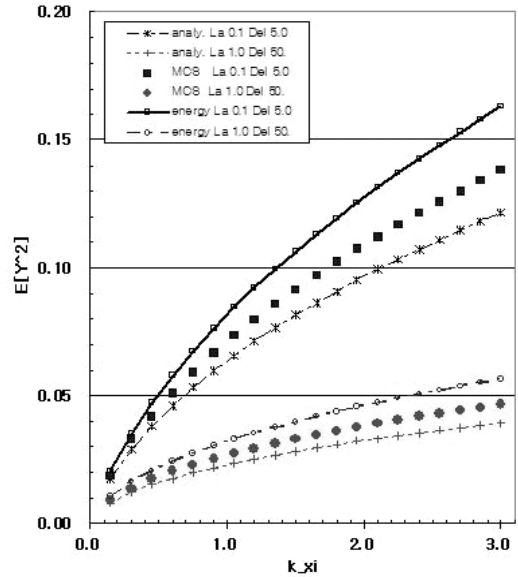


Fig. 3 Stationary mean square values of response

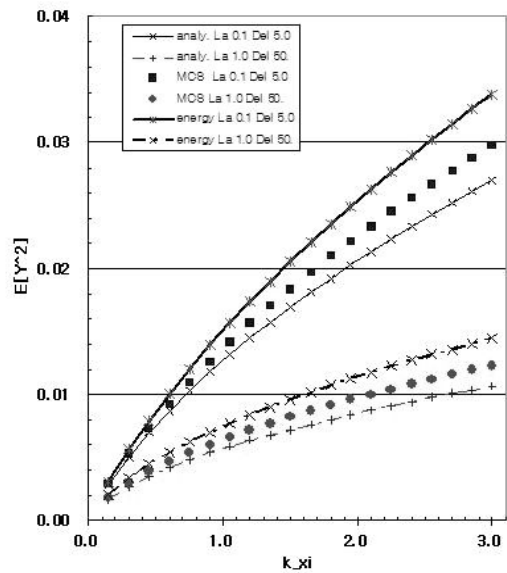


Fig. 4 Stationary mean square values of response

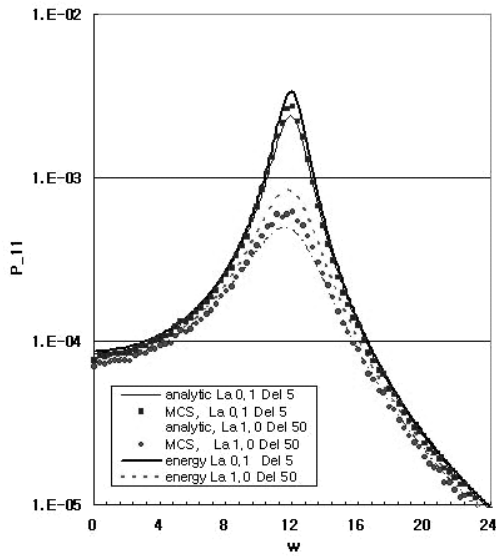


Fig. 5 Spectral density for  $K_{\zeta\zeta}=1.5$

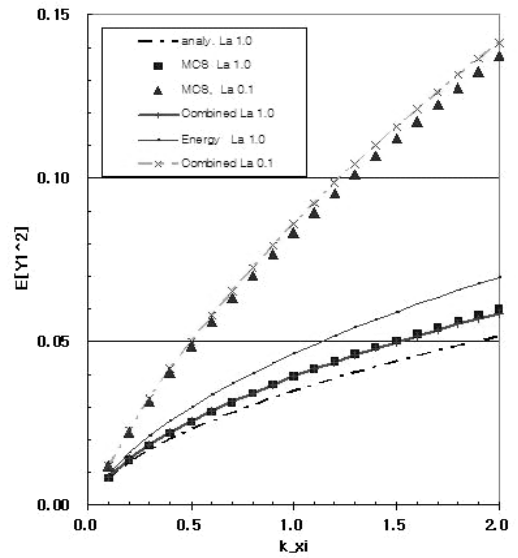


Fig. 7 Stationary mean square values of response with  $\lambda=0.1$  or  $1.0$  and  $K_{\eta\eta}=0.001$

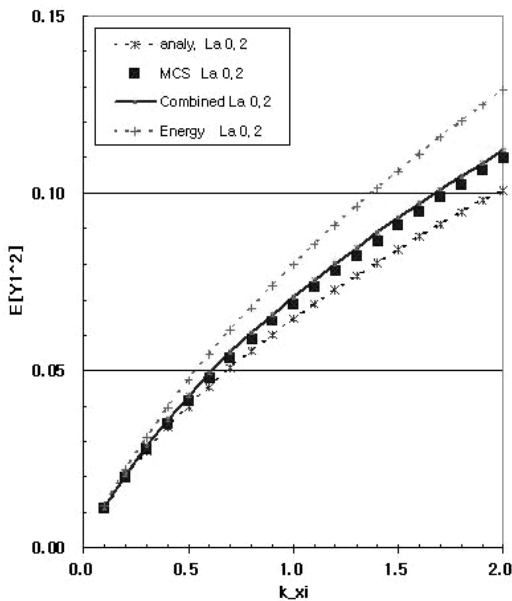


Fig. 6 Stationary mean square values of response with  $\lambda=0.2$  and  $K_{\eta\eta}=0.001$

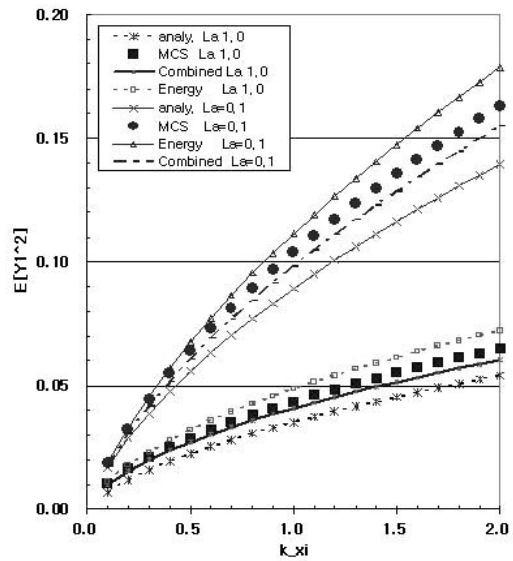


Fig. 8 Stationary mean square values of response with  $K_{\eta\eta}=0.004$

#### 4.2 2 자유도계

1 자유도계의 결과로부터 다음과 같은 절충형을 구상할 수 있다.

$$\zeta_1 = \frac{\alpha_1}{\omega_1} + \frac{3\lambda m_{0040}}{8\omega_1 m_{0020}} \quad (24)$$

$\omega_1=5$ ,  $\omega_2=25$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\zeta_2=0.1$  인 경우에 해석을 실시하고, MCS의 결과와 비교하였다. Figs. 6~8은  $\lambda$ 와  $K_{\eta\eta}$ 에 따른 결과를 나타낸다.

두번째는  $\omega_1=6$ ,  $\omega_2=20$ ,  $\alpha=0.6$ ,  $\zeta_2=0.1$  인 경우에 수치해석을 실시하고, MCS의 결과와 비교하였다. Fig. 9는  $K_{\eta\eta}=0.004$ 의 경우에 대한 해석결과를 나타낸다. Fig.6~9에서 보는 바와 같이, 절충형의 결과가 MCS의 결과와 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 또한, 해석적인 방법은 하한치를, 에너지 방법은 상한치를 나타내었다.

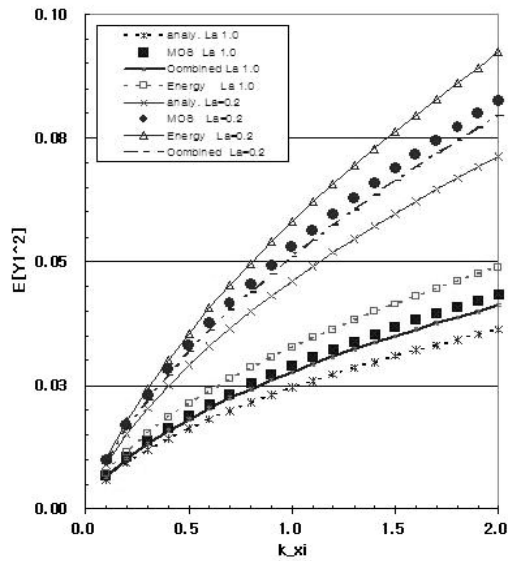


Fig. 9 Stationary mean square values of response with  $K_{nn}=0.004$

## 5. 결론

변수 가진을 받는 비선형 불규칙 진동을 해석하기 위하여 통계적 방법을 사용하였다. 주어진 시스템의 비선형 항만을 선형화하는 준선형화 방법을 사용하였다. 오차 제공의 기댓값을 최소화하는 해석적 방법은 하한치를 나타내었다. 한편 원래의 계와 준선형화된 계의 에너지의 기댓값을 같도록 하는 에너지 방법은 상한치를 나타내었다. 이 결과로부터 두 방법의 절충형을 사용하여 해석하는 방법을 구상하였고 이 절충형을 사용하여 해석한 결과는 MCS의 결과와 잘 일치하였다.

## 참고문헌

- (1) Roberts, J. B. and Spanos, P. D., 1999, *Random Vibration and Statistical Linearization*, New York: Dover Publications, Inc.
- (2) Chen, J. B. and Li, J., 2005, "Dynamic response and reliability analysis of non-linear stochastic structure," *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 20, pp. 33~44.
- (3) Deodatis, G., 1989, "Stochastic FEM sensitivity

analysis of nonlinear dynamic problems," *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 4, pp. 135~141.

(4) To, C. H. S., 2000, *Nonlinear Random Vibration: Analytical Techniques and Applications*, the Netherlands: Swets & Zeitlinger B.V.

(5) Lin, Y. K. and Cai, G. Q., 2004, *Probabilistic Structural Dynamics: Advanced Theory and Applications*, New York: McGraw-Hill.

(6) Iwan, W. D. and Huang, C. T., 1996, "On the dynamic response of non-linear systems with parameter uncertainty," *International Journal of Non-Linear Mechanics* Vol. 31, pp. 631~645.

(7) Bernard, P., 1998, "Stochastic linearization: what is available and what is not," *Computers and Structures*, Vol. 67, pp. 9~18.

(8) Ariaratnam, S. T. and Srikantaiah, T. K., 1978, "Parametric instabilities in elastic structures under stochastic loading," *Journal of Structural Mechanics* Vol. 6, pp. 349~365.

(9) Marek, P., Brozzetti, J. and Gustar, M., 2001, *Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation*, Praha : Institute of Theoretical and Applied Mechanics.

(10) Landau, D. P. and Binder, K., 2000, *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*, Cambridge: Cambridge University Press.

(11) Spanos, P. D. and Zeldin, B. A., 1998, "Monte Carlo treatment of random fields: a broad perspective," *Applied Mechanics Review*, Vol. 51, pp. 219~237.

(12) Meirovitch, L., 1985, *Introduction to Dynamics and Control*, John Wiley & Sons.

(13) Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. and Vetterling, W. T., 1988, *Numerical Recipes in C*, New York: Cambridge University Press.