

임의의 절점 추가로 개선된 유한요소해를 얻는 새로운 방법의 개발

김혜영[†] · 김현규^{*}

Development of a new method for improving finite element solutions by placing nodes arbitrarily

Hye-Yeong Kim, Hyun-Gyu Kim

Key Words : Finite Element Methods(유한요소법), Meshless Methods(무요소법), Moving Least Square(이동최소자승)

Abstract

An advanced computational strategy for improvement of the accuracy of the structural analysis is developed in this paper. The finite elements connecting the primary nodes are constructed as a ground mesh in a domain, and the secondary nodes can be placed arbitrarily without reconstruction of a mesh. The support domains of the secondary nodes are defined on the basis of finite element mesh, and the shape functions are constructed by using MLS(moving least square) approximations. The present method is useful for controlling the errors without reconstruction of mesh when you add or remove nodes in a domain.

1. 서론

산업이 발전함에 따라 다양한 분야에서의 구조물 해석이 요청되고 있으면 구조물의 형상도 더욱 복잡해지고 있다. 이러한 요청에 의하여 정확성과 효율성을 높인 해석기법의 연구도 활발히 진행되고 있다. 지금까지 꾸준히 사용되고 있는 유한요소법(finite element methods)은 절점의 추가 또는 제거등의 변경이 있을 때마다 요소의 구성을 새롭게 해야 하기 때문에 작업시간이 길어진다는 단점이 있었다. 이것을 보완하기 위하여 시작된 무요소법(meshless methods)은 요소의 구성없이 절점의 추가와 제거가 쉽다는 장점이 있다. 그러나 대부분의 무요소법에서는 후면격자(background mesh)를 기준으로 수치적분을

수행하므로 후면격자 구성을 위한 노력이 필요하다⁽¹⁾. 또한 절점의 형상함수(shape function)가 정의되는 영역인 지지영역(support domain)이 대부분 무요소법에서 2 차원의 경우 원, 타원, 사각형등이 사용되므로 지지영역들의 경계를 따르는 적분영역 또는 후면격자를 형성하는 것은 너무 복잡한 형상이 된다⁽²⁾.

이러한 문제를 해결하기 위해서 무요소법과 유한요소법을 결합하는 시도⁽³⁾를 하였으나 적분영역과 지지영역의 불일치로 인하여 수치적분의 일관성을 유지할 수 없었다. 따라서 단순히 무요소법과 유한요소를 연결하는 연구⁽⁴⁾와 더불어 무요소법의 단점을 보완하면서 유한요소법의 장점을 적용하려는 연구는 전산역학 분야에서 새롭게 의미있는 주제가 될 것이다.

본 논문에서는 이와 같은 문제점을 보완하기 위해 임의의 절점 추가로 개선된 유한요소해를 얻는 새로운 방법을 제안하였다. 이 방법을 통하여 적분영역은 유한요소에서 정의되고 절점의

[†] 비회원, 서울산업대학교 에너지환경대학원
E-mail: 03david@hanmail.net
TEL: (02)949-6310 FAX : (02)949-6310

^{*} 서울산업대학교 기계공학과

추가, 제거시에는 무요소법을 사용하였다. 이때 형상함수의 지지영역은 유한요소를 기준으로 구성하였다. 따라서 유한요소법을 이용하여 지지영역과 적분영역을 일치시키면서 무요소법을 통하여 절점의 추가, 제거가 쉽게 이루어 질 수 있었다. 유한요소를 구성하는 절점을 1 차 절점(primary nodes)이라 하고 추가와 제거를 하는 절점을 2 차 절점(secondary nodes)으로 정의하여 형상함수를 이동최소자승법 (moving least square methods)으로 구성하게 된다. 여기서 1 차 절점이나 2 차 절점의 지지영역은 모두 유한요소를 기반으로 구성이 되게 되며, 적분도 유한요소를 기준으로 수행되게 된다⁽⁵⁾.

2. 이동최소자승법

이동최소자승법(moving least square methods)은 임의로 주어진 점들을 이용하여 정확한 근사가 가능한 무요소법에 최적의 방법이라 알려져 있다⁽⁶⁾. 임의의 지역에서 근사함수 $u(\mathbf{x})$ 는 다음과 같다.

$$u(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(x)\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{p}^T(x)$ 는 기저 함수이고 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 는 계수벡터이다. 이동최소자승법에서는 다음과 같은 L_2 -norm을 정의하고 최소화 조건에서 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 를 결정하게 된다⁽⁵⁾.

$$\begin{aligned} Y(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^N w_I(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(x_I)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - u^I]^2 \\ &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{u} \quad \mathbf{W}(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}] \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $w_I(\mathbf{x})$ 는 지지영역 Ω_I 에서 정의되는 가중 함수(weight functions)이다. 이 가중함수는 x_I 에서 $w_I(\mathbf{x})=1$ 이 되고 Ω_I 의 경계면에서 $w_I(\mathbf{x})=0$ 이 된다. 식 (2)를 최소화 하여 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 를 구할 수 있다.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3)$$

여기서

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \quad (4)$$

결과적으로 다음과 같이 된다

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \phi^I(x) u^I \quad (5)$$

여기서 $\phi^I(x)$ 는 절점 I의 형상함수로 다음과 같다

$$\phi^T(x) = \mathbf{p}^T(x)\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{B}(x) \quad (6)$$

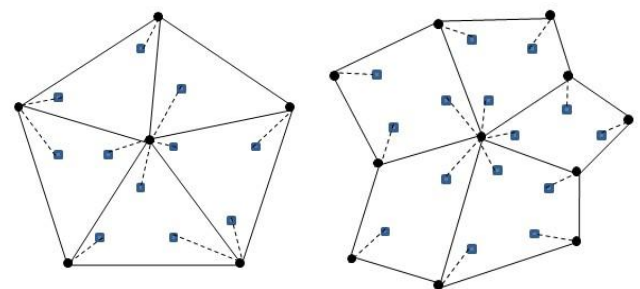
3. 개선된 유한요소법

3.1 다각형 지지영역

유한요소법에서는 구조물의 해석과정에서 절점의 변경이 있을 때마다 요소를 새롭게 구성해야 하는 번거로움이 있었고 이에 따른 시간도 많이 소요되었다. 무요소법의 사용시에도 절점의 추가 제거에 따라 적분영역을 위한 후면격자를 생성해야 하는 어려움이 있게 된다.

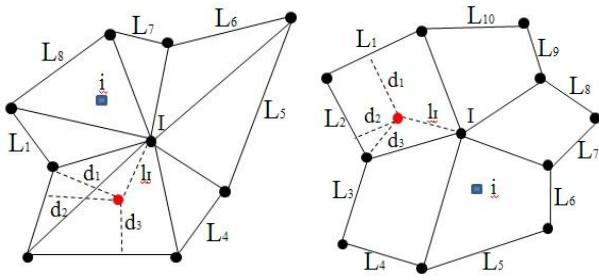
그러나 개선된 유한요소해를 얻는 새로운 방법은 1 차 절점을 이용하여 유한요소를 기반으로 하는 기본격자를 구성하고 이것을 이용하여 1 차 절점뿐만 아니라 2 차 절점의 지지영역과 적분영역을 지정한다. 본 연구에서 제시하는 방법은 유한요소법의 바탕에서 무요소법을 이용하여 새로운 격자 구성 없이 임의의 절점을 추가, 제거 하여 오차를 제어하는데 유용한 방법이 될 것이다.

1 차 요소들은 기본 유한요소 격자를 구성하고 2 차 절점들의 지지영역도 그 기본격자로 정의한다. 이때 2 차 절점은 자신과 가장 가까운 위치에 있는 1 차 절점을 선택하고 그 절점의 다각형 지지영역을 적용한다⁽⁵⁾. Fig.1은 삼각형 요소와 사각형 요소에서 2 차 절점이 지지영역을 적용할 1 차 절점을 선택하는 방법을 나타내고 있다.



(a) Triangular element (b) Quadrilateral element

Fig. 1 Nodes and Support domain



(a) Triangular element (b) Quadrilateral element

Fig. 2 Construction of weight function for primary nodes

3.2 가중함수

1 차 절점으로 구성되는 다각형의 지지영역에서 이동최소자승법으로 형상함수를 구성하기 위하여 가중함수를 정의해야한다. 이 가중함수는 절점에서 최대값을 갖고 지지영역의 경계에서는 0 이 되도록 해야 한다.

본 연구에서는 다각형영역에서 1 차 절점 I 의 가중함수를 다음과 같이 정의 하였다.

$$w^I(x) = \sum_{k=1}^n f_k^I(\mathbf{x}) \quad \text{on} \quad \Omega^I \quad (7)$$

$$f_k^I(x) = \{3[s_k^I(x)]^2 - 2[s_k^I(x)]^3\}^{\frac{1}{n}} \quad (8)$$

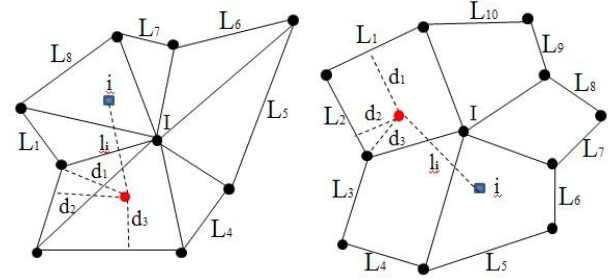
$$s_k^I(x) = \frac{d_k(x)}{l_I(x) + d_k(x)} \quad (9)$$

여기서 $l_I(x) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|$ 로 절점에서 임의의 지점까지의 거리를 나타낸다. 식(9)에서 d_k 는 임의의 지점에서 지지영역을 이루고 있는 삼각형 또는 사각형 요소의 경계면까지의 거리이고 n 은 그 개수를 나타내고 있다.

Fig.2 는 임의의 절점에서 d_k 와 l_I 를 이용하여 가중함수를 구하는 방법을 설명하고 있다.

결과적으로 1 차 절점 $I(d_k(x_I)=0)$ 에서 가중함수는 최대 $w_I(x)=1$ 을 갖고 지지영역의 경계 ($d_k(x)=0$)에서 0 을 갖게 된다. 이와 같은 가중함수를 이용하여 삼각형 요소와 사각형 요소뿐만 아니라 다양한 모양의 유한요소에 대하여 적용될 수 있다.

Fig.3 과 같이 2 차 절점을 위한 가중함수는 2 차 절점의 지지 영역이 1 차 절점의 지지영역과 동일하므로 1 차 절점으로 이루어진 다각형 지지영역의 경계에서 0 이 되어야 한다



(a) Triangular element (b) Quadrilateral element

Fig. 3 Construction of weight function for secondary nodes

1 차 절점과 같은 방법으로 정의된 2 차 절점의 가중함수는 다음과 같다.

$$w^I(x) = \sum_{k=1}^n f_k^I(\mathbf{x}) \quad \text{on} \quad \Omega^I = \Omega^I \quad (10)$$

$$f_k^I(x) = \{3[s_k^I(x)]^2 - 2[s_k^I(x)]^3\}^{\frac{1}{n}} \quad (11)$$

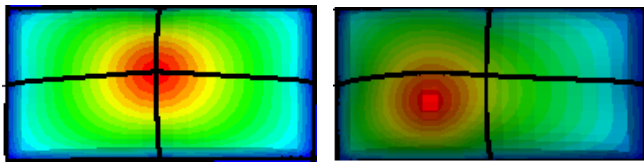
$$s_k^I(x) = \frac{d_k(x)}{l_I(x) + d_k(x)} \quad (12)$$

$$k_e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} J d\xi d\eta \quad (13)$$

식 (13)은 선형 탄성 문제의 요소 강성행렬이다. 여기서 J 는 사상에 의한 Jacobian 이고 변위-변형을 행렬은 \mathbf{B} 이고 \mathbf{D} 는 탄성계수 행렬이다. 식 (13)의 강성행렬을 계산하는데 사용되는 형상 함수는 식 (7)과 식 (11)을 사용한 식 (5)의 MLS 형상함수를 적용하게 된다. 식 (8)과 식 (11)의 $\frac{\partial f_k^I(x)}{\partial x}$ 는 다음과 같이 표현된다.

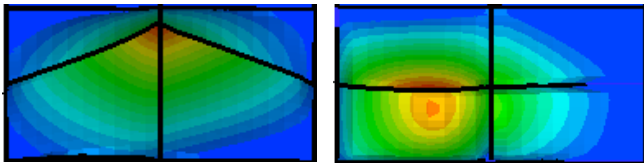
$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k^I(x)}{\partial x} &= \frac{1}{n} \{3[s_k^I(x)]^2 - 2[s_k^I(x)]^3\}^{\frac{1}{n}-1} \\ &\{6s_k^I(x) - 6[s_k^I(x)]^2\} \left\{ \frac{d_k(x)(x_I - x)}{l_I(x)[l_I(x) + d_k(x)]^2} \right. \\ &\left. + \frac{l_I(x)}{[l_I(x) + d_k(x)]^2} \frac{\partial d_k(x)}{\partial x} \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

Fig.4 와 Fig.5 는 1 차 절점과 2 차 절점에서의 가중함수와 이동최소자승법을 통한 형상함수를 나타내고 있다. Fig.4 통해서 가중함수가 절점에서 최대값을 갖고 요소의 경계면에서 최소값을 갖는 것을 확인할 수 있다.



(1) Primary node I (2) Secondary node i

Fig. 4 Weight function



(1) Primary node I (2) secondary node i

Fig. 5 Shape function

4. 결 론

본 논문에서는 점점 더 복잡해 지고 다양화 되는 구조물 해석의 정확도를 높이기 위하여 새로운 해석 방법을 제시하였다. 1 차 절점으로 구성된 격자를 이용하여 추가되는 절점의 지지영역을 결정하였기 때문에 절점이 추가, 삭제될 때에도 추가적인 격자의 재구성이 필요 없이 형상함수를 이동최소자승법으로 구성할 수 있었다. 그러므로 유한요소법에서 절점의 변화에 따라 요소를 새로 구성해야하는 번거로움을 해결하고 무요소법에서 발생하는 지지영역과 적분영역의 불일치로 인한 문제도 해결할 수 있다. 그러므로 본 논문에서 제시하는 방법은 전산역학 분야에서 절점을 자유롭게 추가, 제거하는 것을 통하여 오차를 제어하는데 유용할 것이다. 수치예제문제를 통하여 본 논문의 방법이 검증될 것이며 다양한 문제의 해결에 응용될 수 있을 것으로 기대가 된다.

참고문헌

- (1) Gingold, R. A. and Monaghan, J. J., 1977, "Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-spherical Stars," *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, Vol.181, pp. 375~389.
- (2) Liu, W. K., Jun, S. and Zhang, Y. F., 1995, "Reproducing Kernel Particle Methods," *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, Vol. 20, pp. 1081~1106.
- (3) Liu, W. K., Uras, R. A. and Chen, Y., 1998, "Enrichment of the Finite Element Method with the

- Reproducing Kernel Particle Method," *J. Appl. Mech. A S M E*, V o l . 6 4 , p p . 8 6 1 ~ 8 7 0 .
- (4) T.D. Vuyst, R. Vignjevic, J.C. Campbell, 2005, "Coupling between meshless and finite element methods," *Int. J. Impact. Eng.*, Vol.31, pp.1054-1064
 - (5) Kim Hyungyu, 2006, "An Improved Finite Element Method by Adding Arbitrary Nodes in a Domain," *Trans. of KSME (A)*, Vol. 30, No. 12, pp. 1626~1633
 - (6) Atluri. S.N., 2004, "The Meshless Local-Petrov-Galerkin Method for Domain & BIE Discretization," *Tech Science Press*, Forsyth, GA.