

유한요소 극한해석을 이용한 소성변형에서의 구조물의 위상최적화

이종섭[†] · 허훈^{*}

Topology Optimization of Structures in Plastic Deformation using Finite Element Limit Analysis

Jongsup Lee and Hoon Huh

Key Words : Topology optimization(위상 최적화), Plastic deformation(소성변형), Limit analysis(극한 해석)

Abstract

It is well known that the topology optimization for plastic problem is not easy since the iterative analyses to evaluate the objective and cost function with respect to the design variation are very time-consuming. The finite element limit analysis is an efficient tool which is possible to predict collapse modes and sequential collapse loads of a structure considering not only large deformation but also plastic material behavior with moderate computing cost. In this paper, the optimum topology of a structure considering large and plastic deformation is obtained using the finite element limit analysis. To verify the constructed optimization code, topology optimizations of some typical problems are performed and the optimal topologies by elastic design and plastic design are compared.

1. 서론

유한요소법을 이용한 구조물의 최적 설계기법은 최대 질량과 같은 제한조건을 만족시키면서 구조물의 변위, 고유 진동수와 같은 주요 인자를 개선시키는 것이 가능하다. 최적설계기법은 설계변수(design variable)에 따라, 치수(size), 형상(shape) 및 위상(topology) 최적설계로 나뉘어진다. 치수 및 형상 최적화에 관한 연구는 상대적으로 위상 최적화 보다 용이하여 많은 연구자들에 의하여 수행된 바 있다(1). 그러나 치수 및 형상 최적화 기법은 최적화 과정 중, 구조물의 위상변화를 고려할 수 없으므로, 초기 형상에 따라 최적해가 변화하는 단점이 있다. 이를 극복하기 위하여 위상변화를 고려하는 최적 설계기법이 요구되어 왔다.

기존의 치수 및 형상 최적화에서는 설계변수는 주요 부재의 단면적 및 두께와 같은 치수나 구멍 및 부재의 형상을 모사하는 식이 될 수 있다. 위상 최적화의 경우에는 모든 설계영역에서의 재료의 분포가 설계변수이므로, 설계변수의 증가에 따른 어려움과 재료의 분포를 수학적으로 효과적으로 나타내기 위한 어려움이 존재한다.

최근에 Bendsøe⁽²⁾등에 의하여 부재의 강성과 밀도에 관한 식을 이용하여 위상 최적화를 수행하는 SIMP(Solid Isotropic Material with Penalization) 법을 제안한 바 있다. Xie⁽³⁾등은 각 요소의 응력에 따라, 요소를 제거하거나 추가하는 ESO(Evolutionary Structural Optimization) 법을 제안하였다. 이 방법들을 이용하여 구조의 강성, 고유 진동수 등을 목적함수로 하는 위상 최적화가 수행되었다.

제한된 질량조건에 따른 구조물의 강성을 최대화하기 위한 위상 최적화 문제의 경우, 구조물의 변형량에 따라서 최적 해가 달라질 수 있다. Buhl⁽⁴⁾등은 부재의 변형량이 큰 기하학적 비선형 문제(geometrically non-linear problem)에서의 다양한

[†] KAIST, 기계항공시스템학부
E-mail : goddad78@kaist.ac.kr
TEL : (042)350-3262 FAX : (042)350-3209

^{*} KAIST, 기계항공시스템학부

목적함수(objective function)에 대하여 위상 최적화를 수행한 바 있다.

위상 최적화에서 기하 비선형 문제뿐만 아니라 소성변형(plastic deformation)을 하는 구조물과 같은 재료 비선형 문제 (material non-linear problem)의 경우, 최적화를 위한 계산시간이 선형 문제의 비하여 급격히 증가하게 된다. 이와 같은 어려움으로 인하여 비선형 문제의 경우에는 해석시간이 비교적 적게 소요되는 트러스 요소((truss element)를 이용한 위상 최적화가 수행되어왔다⁽⁵⁾. 하지만, 트러스 요소만을 이용하여 표현할 수 있는 구조물은 제한되어 있으므로, 일반적인 연속체 요소 (continuum element)를 이용한 대변형 문제의 위상 최적화 기법이 필요하다.

한편 유한요소 극한해석은 소성변형을 겪는 부재의 붕괴하중 및 붕괴모드를 기존의 탄소성 유한요소해석에 비하여 적은 해석시간을 통하여 얻을 수 있다⁽⁶⁾.

본 논문에서는 유한요소 극한해석과 SIMP 법을 이용하여 소성변형을 겪는 구조물의 위상 최적화 기법에 관한 연구를 수행하였다. 목적함수로는 구조물이 붕괴하면서 흡수하는 소성일(plastic work)로 선택 하였으며, 최적화를 위하여 Svanberg⁽⁷⁾에 의한 MMA(method of moving asymptotes)를 이용하였다. 제안된 최적화 기법을 검증하기 위하여 간단한 외팔보(cantilever beam) 문제를 풀었다.

2. 유한요소 극한해석(finite element limit analysis)

2.1. 극한해석 수식화 (limit analysis formulation)

극한해석은 하계해석과 상계해석으로 구성되어 있다. 극한해석의 하계해석은 정적 평형방정식과 정역학적 가용조건(statically admissible condition) 및 항복 조건식(constitutively admissible condition)으로부터 매개변수의 최대치와 그에 상응하는 응력분포를 구하는 방법이다. 하계해석의 수식화는 다음과 같이 구속 최적화 문제(constrained maximization problem)의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{maximize } q(\boldsymbol{\sigma}) \\ & \text{subject to } \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{in } D \\ & \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q} \quad \text{on } \partial D_s \\ & \quad \|\boldsymbol{\sigma}\|_{(v)} \leq \sigma_0 \quad \text{in } D \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서 $\boldsymbol{\sigma}$ 는 응력텐서, \mathbf{t} 는 경계 면에서의 분포 하중이며, \mathbf{q} 는 비례하중계수이고, $\|\cdot\|_{(v)}$ 는 von-Mises norm 을 의미한다. 응력공간에서 해를 구하

는 하계해석은 비효율적이므로 이원정리(duality theorem)를 이용한 효율적인 상계해석 수식화가 필요하다. 상계해석 수식화는 가상일의 원리(principle of virtual work)를 이용하여 평형방정식을 적분방정식 형태의 약형(weak form)으로 만들고 여기에 부분적분(integration by part), 발산정리(divergence theorem), 일반화된 Hölder 부등식(generalized Hölder inequality)을 적용하면 식(2)와 같은 상계해석 수식을 얻을 수 있다⁽⁶⁾.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \tilde{q}(\dot{\mathbf{u}}) \\ & \text{subject to } \tilde{q} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \int_{D_e} \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\|_{(-v)} d\Omega \\ & \quad \int_{\partial D_s} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\Gamma = 1 \\ & \quad \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = 0 \\ & \quad \text{Kinematic b. c.} \end{aligned} \quad (2)$$

여기에서, $\dot{\mathbf{u}}$ 는 운동학적 가용 속도장(kinematically admissible velocity field), $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 는 재료의 초기 항복응력이나 현재의 항복응력이다. 일반적인 변형경화 재료의 유효응력을 식(3)과 같은 함수로 고려한다.

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_0 (1 + A \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p)^n \quad (3)$$

여기에서, σ_0 는 초기 항복응력, $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ 는 유효소성 변형률(effective plastic strain), A 와 n 은 재료상수이다. 극한해석에서는 유효응력 곡선을 계단형태의 상수함수로 가정하고 각 요소에서 계산된 유효소성 변형률을 이용하여 다음과 같은 이분법(bisection method)에 의해 각 반복단계에서의 현재의 유효응력을 계산한다.

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1} = \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0}{2} \quad (4)$$

여기에서 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_0$ 는 이전 시간단계에서의 항복응력이다.

2.2. 유한차원 근사화(finite dimensional approximation)

상계수식은 형상함수(shape function)를 이용하여 유한요소내의 속도장과 좌표로 유한차원 근사화할 수 있다. 식 (2)의 상계수식에서 목적함수(objective function)를 유한요소 근사화하면 다음과 같다.

$$\tilde{q} = \sum_{e=1}^E \bar{\boldsymbol{\sigma}} \int_{D_e} \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\|_{(-v)} d\Omega \quad (5)$$

식 (5)에서 von Mises 항복조건을 고려하면 유효 변형률 속도는 다음과 같이 표현된다.

$$\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\|_{(-v)} = \bar{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\epsilon}_j \dot{\epsilon}_j \quad (6)$$

위의 식 (6)의 유효변형률 속도는 다음과 같은 행렬들의 곱으로 다시 쓸 수 있다

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \left[\frac{2}{3} \dot{\mathbf{E}}^T \mathbf{G} \dot{\mathbf{E}} \right]^{1/2} = \left[\frac{2}{3} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{G} \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}} \right]^{1/2} \\ &= \left[\dot{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{u}} \right]^{1/2}\end{aligned}\quad (7)$$

여기에서 $\dot{\mathbf{E}}$ 는 변형률 속도 벡터, \mathbf{G} 는 변형률 속도의 각 항과 유효변형률 속도와의 관계로 결정되는 상수 행렬이다. $\dot{\mathbf{u}}$ 는 절점에서의 자유도에 따라 정해지는 속도벡터, $\bar{\mathbf{K}}$ 는 강성행렬을 나타낸다. 식 (7)을 이용하여 유한요소 근사화된 상계수식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{minimize } \tilde{q}(\dot{\mathbf{u}}) = \sum_{e=1}^E \int_{D_e} \bar{\sigma}_e \sqrt{\dot{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{K}}_e \dot{\mathbf{u}}} d\Omega \quad (8)$$

$$\text{subject to } \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{u}} = 1$$

여기에서 제한조건(constraint condition)은 표준화 조건(normalization condition)이다. 식 (8)의 제약 최적화 문제는 라그랑지 승수법(Lagrangian multiplier method)을 이용하여 해를 구할 수 있다. 속도벡터와 라그랑지 승수에 대하여 각각 미분하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\sum_{e=1}^E \bar{\sigma}_e \int_{D_e} \frac{\bar{\mathbf{K}}_e \dot{\mathbf{u}}}{\sqrt{\dot{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{K}}_e \dot{\mathbf{u}}}} d\Omega = \lambda \mathbf{c} \quad (9)$$

$$\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{u}} = 1$$

식 (9)에서 강성행렬은 이전 반복단계에서의 속도장을 이용하여 다음과 같이 근사화 한다.

$$\mathbf{K}^{(i)} = \sum_{e=1}^E \bar{\sigma}_e \int_{D_e} \frac{\bar{\mathbf{K}}_e}{\sqrt{\dot{\mathbf{u}}^{(i-1)T} \bar{\mathbf{K}}_e \dot{\mathbf{u}}^{(i-1)}}} d\Omega \quad (10)$$

따라서, 식(8)의 해를 얻기 위해서는 현재의 반복 단계에서는 다음과 같은 식을 계산하여야 한다.

$$\mathbf{K}^{(i)} \dot{\mathbf{u}}^{(i)} = \lambda \mathbf{c}^{(i)} \quad (11)$$

$$\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{u}}^{(i)} = 1$$

3. 위상최적화(topology optimization)

3.1. 최적화 문제의 정의(optimization formulation)

소성변형을 겪는 구조물의 최적설계를 위하여 SIMP 법을 이용하여 식(12)와 같이 각 요소에서의 항복응력을 가정하였다.

$$\bar{\sigma}_e = \rho_e^p \bar{\sigma}_0(\mathbf{u}) \quad (12)$$

여기에서 ρ_e 는 각 요소에서의 상대밀도(relative density)로 설계변수, p 는 벌칙상수(penalization constant)이며, 일반적으로 2 보다 큰 값을 사용한다. 본 연구에서는 2로 고정하였다. 목적함수를 부재가 붕괴하는 동안 흡수하는 소성일로 정의하

고, 부피 제한조건을 갖는 최적화 수식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\text{maximize } & \Pi(\boldsymbol{\rho}, \dot{\mathbf{u}}) \\ \text{subject to } & \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \rho_e d\Omega = v_r V_0 \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1\end{aligned}\quad (13)$$

여기에서 $\boldsymbol{\rho}$ 는 각 요소의 상대밀도들로 이루어진 벡터, Π 는 소성일, V_0 는 초기부피, v_r 는 부피비, E 는 요소의 수를 각각 나타낸다.

3.2. 민감도 해석(design sensitivity analysis)

최적화를 위하여 목적함수의 설계민감도(design sensitivity)를 구하여 한다. 목적함수인 소성일은 수치적분과 극한해석의 수식을 이용하여 다음과 같이 근사적으로 계산될 수 있다.

$$\Pi(\boldsymbol{\rho}, \dot{\mathbf{u}}) = \int_0^t \dot{\Pi}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\mathbf{u}}) dt = \int_D \bar{\sigma} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega \leq \sum_{n=1}^N \Delta \Pi^{(n)} \quad (14)$$

여기에서 N 은 적분을 위한 증분의 개수이며, $\Delta \Pi^{(n)}$ 는 다음과 같이 유한요소를 이용하여 근사적으로 계산이 가능하다.

$$\Delta \Pi^{(n)} \cong \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \bar{\sigma}_e^{(n)} \sqrt{(\Delta \mathbf{u}^{(n)})^T \bar{\mathbf{K}}_e \Delta \mathbf{u}^{(n)}} d\Omega \quad (15)$$

설계변수에 대한 민감도를 구하기 위하여 식 (15)를 상대밀도에 대하여 미분을 하면 식(16)을 얻는다.

$$\begin{aligned}\frac{d(\Delta \Pi^{(n)})}{d\rho_e} &= \frac{\partial(\Delta \Pi^{(n)})}{\partial \rho_e} + \frac{\partial(\Delta \Pi^{(n)})}{\partial \Delta \mathbf{u}^{(n)}} \cdot \frac{d\Delta \mathbf{u}^{(n)}}{d\rho_e} \\ &= \mathbf{a}^{(n)} + \mathbf{b}^{(n)} \cdot \mathbf{c}^{(n)}\end{aligned}\quad (16)$$

목적함수에 대한 민감도는 식(17)과 같이 다시 한번 근사적으로 구할 수 있다.

$$\frac{d\Pi}{d\rho_e} \leq \frac{d\left(\sum_{n=1}^N \Delta \Pi^{(n)}\right)}{d\rho_e} = \sum_{n=1}^N \frac{d(\Delta \Pi^{(n)})}{d\rho_e} \quad (17)$$

식(16)에서 $\mathbf{a}^{(n)}$ 와 $\mathbf{b}^{(n)}$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{a}^{(n)} = \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_e^{(n)}}{\partial \rho_e} \right) \sqrt{(\Delta \mathbf{u}^{(n)})^T \bar{\mathbf{K}}_e \Delta \mathbf{u}^{(n)}} d\Omega \quad (18)$$

$$\mathbf{b}^{(n)} = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_e^{(n)}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}} \right) + \frac{\bar{\sigma}_e^{(n)}}{\sqrt{(\Delta \mathbf{u}^{(n)})^T \bar{\mathbf{K}}_e \Delta \mathbf{u}^{(n)}}} \bar{\mathbf{K}}_e \Delta \mathbf{u}^{(n)} d\Omega$$

한편, $\mathbf{c}^{(n)}$ 는 상태변수(state variable)인 $\Delta \mathbf{u}^{(n)}$ 의 설계변수에 대한 민감도를 나타내며 이를 구하기 위하여는 식(9)를 이용하여 얻을 수 있다. 식(9)의 양변을 설계변수로 미분하여 정리하면, 식(19)를

얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}^{(n)}}{d\rho_e} &= \frac{\partial \mathbf{r}^{(n)}}{\partial \rho_e} + \frac{\partial \mathbf{r}^{(n)}}{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(n)}} \cdot \frac{d\dot{\mathbf{u}}^{(n)}}{d\rho_e} \\ &= -\mathbf{f}^{(n)} + \bar{\mathbf{K}} \frac{d\dot{\mathbf{u}}^{(n)}}{d\rho_e} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

여기에서, $\mathbf{r}^{(n)}$ 은

$$\mathbf{r}^{(n)} = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \bar{\sigma}_e \frac{\mathbf{K}_e \dot{\mathbf{u}}^{(n)}}{\sqrt{(\dot{\mathbf{u}}^{(n)})^T \mathbf{K}_e \dot{\mathbf{u}}^{(n)}}} d\Omega - \lambda^{(n)} \mathbf{c} \quad (20)$$

이며, $\mathbf{f}^{(n)}$ 과 $\bar{\mathbf{K}}$ 은 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{f}^{(n)} = - \int_{\Omega_e} \frac{\partial \bar{\sigma}_e}{\partial \rho_e} \frac{\mathbf{K}_e \dot{\mathbf{u}}^{(n)}}{\sqrt{(\dot{\mathbf{u}}^{(n)})^T \mathbf{K}_e \dot{\mathbf{u}}^{(n)}}} d\Omega \quad (21)$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \left(\bar{\sigma}_e \frac{\mathbf{K}_e}{\sqrt{(\dot{\mathbf{u}}^{(n)})^T \mathbf{K}_e \dot{\mathbf{u}}^{(n)}}} + A \cdot \frac{(\mathbf{K}_e \dot{\mathbf{u}}^{(n)}) \cdot (\mathbf{K}_e \dot{\mathbf{u}}^{(n)})}{(\dot{\mathbf{u}}^{(n)})^T \mathbf{K}_e \dot{\mathbf{u}}^{(n)}} \right) d\Omega \quad (22)$$

$$\text{where } A = \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_e}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}} \Delta \varepsilon^{(n)} - \frac{\bar{\sigma}_e}{\sqrt{(\dot{\mathbf{u}}^{(n)})^T \mathbf{K}_e \dot{\mathbf{u}}^{(n)}}} \right)$$

위의 결과들을 이용하여, 식(16)의 목적함수에 대한 설계민감도는 보조변수법(adjoint variable method)를 이용하여 구할 수 있다.

3.3. 최적화 절차(optimization procedure)

위상최적화문제의 최적화 알고리즘으로는 최적조건법(Optimality Criteria method)과 MMA 법이 있다. 본 논문에서는 MMA 법을 이용하여 최적화를 수행하였다. MMA 에 따라서 식(13)의 최적화 수식은 식(23)과 같이 나타내어질 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{maximize } \Pi^{(k)} &= r^{(k)} + \sum_{e=1}^E \left(\frac{p_e^{(k)}}{U_e^{(k)} - \rho_e} + \frac{q_e^{(k)}}{\rho_e - L_e^{(k)}} \right) \\ \text{subject to } \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \rho_e d\Omega &= v_r V_0 \\ \rho_{\min} \leq L_e^{(k)} < \rho_e^{(k)} < U_e^{(k)} \leq 1 \\ e &= 1, \dots, E \end{aligned} \quad (23)$$

여기에서

$$\begin{aligned} p_e^{(k)} &= \begin{cases} (U_e^{(k)} - \rho_e^{(k)})^2 \frac{d\Pi}{d\rho_e}(\rho_e^{(k)}), & \text{if } d\Pi/d\rho_e > 0 \\ 0, & \text{if } d\Pi/d\rho_e \leq 0 \end{cases} \\ q_e^{(k)} &= \begin{cases} 0, & \text{if } d\Pi/d\rho_e \geq 0 \\ -(\rho_e^{(k)} - L_e^{(k)})^2 \frac{d\Pi}{d\rho_e}(\rho_e^{(k)}), & \text{if } d\Pi/d\rho_e < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

$$r^{(k)} = \Pi(\boldsymbol{\rho}^{(k)}) - \sum_{e=1}^E \left(\frac{p_e^{(k)}}{U_e^{(k)} - \rho_e^{(k)}} + \frac{q_e^{(k)}}{\rho_e^{(k)} - L_e^{(k)}} \right)$$

이며, k 는 축차(iteration) 회수를 나타낸다. 이러한 근사를 통하여 식(23)의 최적화 문제는 convexity 와 separability 를 만족하게 된다. 라그랑지 승수법

을 적용하여 구성된 라그랑지함수는 식(25)와 같다.

$$L(\boldsymbol{\rho}, \lambda) = \Pi^{(k)}(\boldsymbol{\rho}) + \lambda \left(\sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \rho_e d\Omega - v_r V_0 \right) \quad (25)$$

식(25)의 dual 목적함수는 식(26)과 같다.

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= \min_{\boldsymbol{\rho}} \{ L(\boldsymbol{\rho}, \lambda); \alpha_e \leq \rho_e \leq \beta_e \text{ for all } e \} \\ &= r^{(k)} - \lambda v_r V_0 + \sum_{e=1}^E \min_{\rho_e} W_e(\lambda, \rho_e) \end{aligned} \quad (26)$$

여기서,

$$W_e(\lambda, \rho_e) = \frac{p_e^{(k)}}{U_e^{(k)} - \rho_e} + \frac{q_e^{(k)}}{\rho_e - L_e^{(k)}} + \lambda \rho_e A_e \quad (27)$$

$$A_e = \int_{\Omega_e} d\Omega$$

$$\lambda \geq 0$$

이다. 따라서, 식(23)에 대한 dual problem 은 다음과 같이 정의된다.

Problem D

$$\text{minimize } W(\lambda) = r^{(k)} - \lambda v_r V_0 + \sum_{e=1}^E \min_{\rho_e} W_e(\lambda, \rho_e) \quad (28)$$

subject to $\lambda \geq 0$

식(28)의 경우, 설계변수는 한 개의 라그랑지 승수이므로, 매우 간단한 수치해석 방법으로 해를 구할 수 있다.

최적화를 위한 각 축차 단계에서 moving asymptote 의 조절은 최적화 알고리즘의 성능을 크게 좌우할 수 있다. 본 논문에서는 Svanberg 가 제안한 방법에 따라 식(29)와 같이 moving asymptote 를 조절하였다.

For $k < 2$

$$\begin{aligned} L_e^{(k)} &= \rho_e^{(k)} - 0.5(\rho_{\max} - \rho_{\min}) \\ U_j^{(k)} &= \rho_e^{(k)} + 0.5(\rho_{\max} - \rho_{\min}) \end{aligned} \quad (29)$$

For $k \geq 2$

$$\begin{aligned} L_e^{(k)} &= \rho_e^{(k)} - \gamma_e^{(k)} (\rho_e^{(k-1)} - L_e^{(k-1)}) \\ U_e^{(k)} &= \rho_e^{(k)} + \gamma_e^{(k)} (U_e^{(k-1)} - \rho_e^{(k-1)}) \end{aligned}$$

여기서,

$$\gamma_e^{(k)} = \begin{cases} 0.7 & \text{if } (\rho_e^{(k)} - \rho_e^{(k-1)}) \cdot (\rho_e^{(k-1)} - \rho_e^{(k-2)}) < 0 \\ 1.2 & \text{if } (\rho_e^{(k)} - \rho_e^{(k-1)}) \cdot (\rho_e^{(k-1)} - \rho_e^{(k-2)}) > 0 \\ 1.0 & \text{if } (\rho_e^{(k)} - \rho_e^{(k-1)}) \cdot (\rho_e^{(k-1)} - \rho_e^{(k-2)}) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

이다. 식(30)에서 각 조건에 따른 $\gamma_e^{(k)}$ 의 값의 결정은 경험적으로 결정되었으며, 문제의 조건에 따라 조정이 요구된다.

3.4. 설계민감도의 필터링(filtering)

SIMP 기법을 적용한 위상 최적화 기법의 경우,

mesh dependency, checker-board problem 과 같은 수치적인 불안정성(numerical instability)을 가지고 있다⁽⁸⁾. 이를 해결하기 위한 방법으로, mesh independent filtering 기법을 사용한다. 본 연구에서는 식(31)과 같은 필터링 기법을 사용하였다.

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho_e} = \frac{1}{\rho_e \sum_{i=1}^N \hat{H}_i} \sum_{i=1}^N \hat{H}_i \rho_i \frac{\partial f}{\partial \rho_i} \quad (31)$$

여기서,

$$\hat{H}_i = r_{filter} - \text{dist}(k, i), \quad \{ i \in N \mid \text{dist}(k, i) \leq r_{filter} \} \quad (32)$$

$$k = 1, \dots, N$$

이다. r_{filter} 의 값에 따라서, 민감도가 필터링이 되는 영역이 증가 된다. 민감도는 요소에 따라서 달라지기 때문에, r_{filter} 에 따른 필터링 된 민감도의 변화는 거의 불연속(discrete)에 가까운 형태를 띠게 된다.

4. Verification examples

4.1. Short cantilever problem

구성된 최적화 기법을 확인하기 위하여 Fig. 1 과 같은 외팔보 문제에 대하여 위상최적화를 수행하였다. 해석 조건 및 최적화 조건을 표 1 에 정리하였다. 외팔보의 자유단에 2.0m 만큼의 붕괴거리를 부과하였다. 최적설계의 의한 최적위상을 비교하기 위하여 선형(linear) 탄성해석을 바탕으로 한 최적위상설계 또한 수행하였다. 탄성해석을 기반으로 한 최적설계의 경우, Young's modulus 는 210GPa 이며, 변위 경계조건은 자유단에 0.001m 의 변위를 부과하였다. 그 외의 설계변수는 극한해석의 경우와 동일하다. 탄성해석과 극한해석에 의한 최적위상을 각각 Fig. 2 와 Fig. 3 에 나타내었다. 탄성설계의 경우, 대변형이 고려되지 않는 경우에는 대칭형의 구조가 나온다.

Table 1 Design parameters of SC problem

Design condition	Specified data
Geometry	8m×6m, rectangular domain
Mesh	2700(60×45) elements
Material	$\bar{\sigma} = 1.0(1.0 + 100.0\bar{\varepsilon}_p)^{0.5} \text{ MPa}$
Boundary conditions	collapse distance: 2.0 m number of increment: 40 $\Delta u = 0.05\text{m}$
Optimization conditions	volume constraint : $V \leq 0.5V_0$ maximum number of iteration: 200 filtering radius: 0.02m

하지만, 극한해석을 바탕으로 한 소성설계의 경우에는 비대칭형의 위상을 얻을 수 있다.

4.2. Long cantilever problem

구성된 최적화 기법을 확인하기 위하여 Fig. 2 와 같은 긴 외팔보 문제에 대하여 위상최적화를 수행하였다. 해석 조건 및 최적화 조건을 표 2 에 정리하였다.

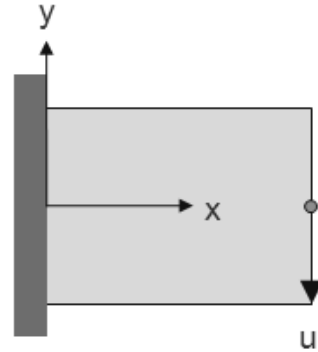


Fig. 1 Schematic diagram of short cantilever



Fig. 2 Optimum topology by elastic analysis



Fig. 3 Optimum topology by limit analysis

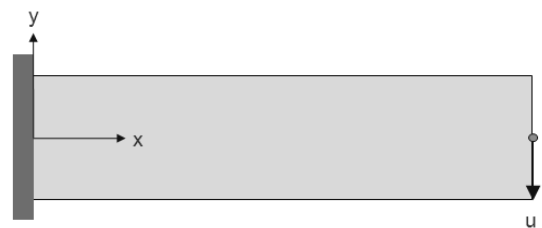


Fig. 1 schematic diagram of long cantilever

Table 2 Design parameters of LC problem

Design condition	Specified data
Geometry	9m×3m, rectangular domain
Mesh	2700(90×30) elements
Material	$\bar{\sigma} = 1.0(1.0 + 100.0\bar{\epsilon}_p)^{0.5} MPa$
Boundary conditions	collapse distance: 1.0 m number of increment: 20 $\Delta u = 0.05m$
Optimization conditions	volume constraint : $V \leq 0.2V_0, V \leq 0.4V_0, V \leq 0.6V_0$ maximum number of iteration: 200 filtering radius: 0.15m

부피제한조건을 달리하여 얻어지는 최적위상을 비교하여 보았다. 최종 부피가 초기 부피의 40%, 50%, 60% 일 때의 최적위상을 Fig. 5 에 비교하였다.

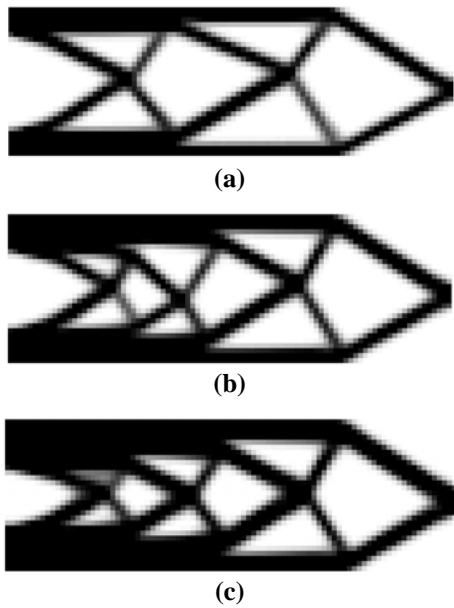


Fig. 5 Optimal topologies: a) $V = 0.4V_0$; b) $V = 0.4V_0$; c) $V = 0.4V_0$;

사용되는 재료의 양이 감소함에 따라서 격자의 개수와 두께가 감소한다. 대변형문제이므로 선형탄성해석에 의한 최적위상과는 달리 비대칭형으로 위상이 생기게 된다.

5. 결론

본 논문에서는 소성변형을 하는 구조물의 최적 위상설계를 위한 최적화 기법을 유한요소 극한해석을 바탕으로 하여 구성하였다. 위상 최적화를 위하여 SIMP 법을 적용하여 요소의 응력과 설계 변수인 상대밀도에 관계를 통하여 최적화 수식을 구성하였다. 최적화 알고리즘으로는 MMA 를 적용하였다. 구성된 최적화 기법을 이용하여 외팔보 문제의 최적위상을 탄성설계와 소성설계의 경우에 대하여 비교하였다. 최적위상의 경우, 탄성설계와는 달리 비대칭형이다.

참고문헌

- (1) Haftka, R. T. and Grandhi, R. V., 1986, "Structural Shape Optimization – A Survey", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 57, pp. 91~106.
- (2) Bendsøe, M. P., 1989, "Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem", *Structural Optimization*, Vol. 1, pp. 193~202.
- (3) Xie, Y. M. and Steven, G. P., 1993, "A Simple Evolutionary Procedure for Structural Optimization", *Computers & Structures*, Vol. 49, No. 5, pp. 885~896.
- (4) Buhl, T., Pedersen, C. B. W. and Sigmund, O. 2000, "Stiffness Design of Geometrically Nonlinear Structures Using Topology Optimization", *Structural Multidisciplinary Optimization*, Vol. 19, pp. 93 ~ 104.
- (5) Pedersen, C. B. W., 2004, "Crashworthiness Design of Transient Frame Structures Using Topology Optimization", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 193, pp. 653 ~ 678.
- (6) Huh, H., Lee, C. H. and Yang, W. H., 1999, "A General Algorithm for Plastic Flow Simulation by Finite Element Limit Analysis", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 36, pp. 1193 ~ 1207.
- (7) Svanberg, K., 1987, "The Method of Moving Asymptotes – A New Method for Structural Optimization", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 359 ~ 373.
- (8) Sigmund, O. and Petersson, J., 1998, "Numerical instabilities in topology optimization: A survey on process dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima", *Structural Optimization*, Vol. 16, pp. 68 ~ 75.