

유체-고체 상호작용 해석을 위한 계면요소의 개발

김현규[†]

Development of interface elements for the analysis of fluid-solid problems

Hyun-Gyu Kim

Key Words : Fluid-solid interaction(유체-고체 상호작용), Non-matching meshes(불일치 격자), Coupled analysis(결합해석), Interface elements(계면요소)

Abstract

This paper presents a new approach to simulate fluid-solid interaction problems involving non-matching interfaces. The coupling between fluid and solid domains with dissimilar finite element meshes consisting of 4-node quadrilateral elements is achieved by using the interface element method (IEM). Conditions of compatibility between fluid and solid meshes are satisfied exactly by introducing the interface elements defined on interfacing regions. Importantly, a consistent transfer of loads through matching interface element meshes guarantees the present method to be an efficient approach of the solution strategy to fluid-solid interaction problems. An arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) description is adopted for the fluid domain, while for the solid domain an updated Lagrangian formulation is considered to accommodate finite deformations of an elastic structure. The stabilized equal order velocity-pressure elements for incompressible flows are used in the motion of fluids. Fully coupled equations are solved simultaneously in a single computational domain. Numerical results are presented for fluid-solid interaction problems involving non-matching interfaces to demonstrate the effectiveness of the methodology.

1. 서론

유체-고체 상호작용 해석은 전산역학 분야에서 도전적인 문제 중의 하나로 기계, 토목, 생체역학 등의 다양한 분야에서 필요로 하고 있다. 일반적으로 유체와 고체의 경계면에서 서로 일치하지 않는 불일치 격자(non-matching meshes)가 자주 발생하는데, 유체와 고체의 경계면에서 일관성과 traction의 평형을 유지하기 위한 방법을 개발하기 위하여 많은 연구자들이 노력을 기울이고 있다.

유체-고체 경계면에서 서로 일치하는 격자를 사용하면 두 영역을 쉽게 결합시킬 수 있으나 일반적으로 유체 영역은 고체 영역에 비하여 좀 더

세분화된 격자를 요구하므로 계면에서 불일치 격자를 처리하는 기법이 요구되게 된다. 계면에서 불일치 격자는 유체의 하중을 고체에 전달하고 고체의 움직임을 유체로 상호 전달하는 방식으로 문제를 해결하게 되는데, 내삽(interpolation) 또는 투영(projection)⁽¹⁻³⁾ 방식으로 정보를 교환하는 방법을 많이 사용하고 있다. 또한 라그랑지 승수(Lagrange multipliers)를 사용하여 불일치 격자를 결합하는 방법들⁽⁴⁻⁵⁾이 개발되었다. 유체와 고체 사이의 계면에서 올바른 정보의 전달은 유체-고체 상호작용 문제 해석에서 아주 중요한 과제가 된다.

유체-구조물 상호작용 해석의 중요한 목표는 유체와 고체 사이의 계면에서 만족해야 하는 적합성(compatibility)과 traction의 평형을 만족해야 하는데 계면이 곡률이 있는 경우는 이와 같은 조건들을 만족하기가 쉽지 않게 된다. 유체와 고체의 격자를 독립적으로 구성하게 되면 곡률이 있는 계면에서 격자망들의 침투와 틈이 발생하게 되고 계

[†] 회원, 서울산업대학교 기계공학과
E-mail : khg@snut.ac.kr
TEL : (02)970-6309 FAX : (02)949-1458

면의 조건들을 만족하기 위한 효과적인 방법이 요구되게 된다. 본 연구에서는 계면요소법⁽⁶⁾을 사용하여 불일치 격자의 새로운 결합 방법을 개발하고자 한다. 불일치 격자 사이의 침투와 틈을 제거하기 위하여 하나의 유체-고체 계면을 정의하고 계면을 따라서 계면 요소들을 정의하게 된다. 계면요소는 적합성을 정확히 만족하며 형상함수의 완전성(completeness)으로 인하여 응력의 전달을 올바르게 수행할 수 있다. 유체 영역은 ALE(arbitrary Lagrangian-Eulerian) 방법의 속도-압력 동일 차수 요소를 사용하여 수식화 하였고 고체 영역은 updated Lagrangian 방법을 사용하여 대변형을 포함한 수식화를 하였다.

2. 지배방정식

2.1 비압축성 Newtonian 유체

유체-고체 상호작용 해석에서 유체 영역 Ω_F 이 변하게 되므로 유체 격자의 이동을 고려한 ALE 방법을 적용하였다. 모멘트 보존과 연속 방정식을 ALE 형식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\rho_F \left(\frac{\partial \mathbf{v}_F}{\partial t} + (\mathbf{v}_F \otimes \nabla) \cdot (\mathbf{v}_F - \mathbf{v}_F^m) \right) = \rho_F \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_F \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_F = 0 \quad (2)$$

여기서 ρ_F , \mathbf{f} , \mathbf{v}_F , \mathbf{v}_F^m , $\boldsymbol{\sigma}_F$ 는 유체의 밀도, 체적력, 속도, 격자 속도, 응력을 나타낸다. Newtonian 유체의 구성방정식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla \otimes \mathbf{v}_F + \mathbf{v}_F \otimes \nabla) \quad (3)$$

여기서 μ 는 유체 점성, p 는 압력 그리고 \mathbf{I} 는 2차 항등텐서이다.

2.2 탄성 고체

유체-고체 상호작용 해석에서 고체 영역 Ω_S 의 모멘트 보존 방정식은 다음과 같다.

$$\rho_S \frac{\partial^2 \mathbf{u}_S}{\partial t^2} = \rho_S \mathbf{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_S \quad (4)$$

여기서 ρ_S , \mathbf{b} , \mathbf{u}_S 는 고체의 밀도, 체적력 그리고 변위를 나타낸다. 본 연구에서는 다음과 같은 구성방정식을 고려하였다.

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^J = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5)$$

여기서 $\boldsymbol{\tau} = \det(\mathbf{F})\boldsymbol{\sigma}$ 이고, \mathbf{F} 는 deformation gradient이며 탄성계수 $\mathbf{C} = \lambda\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu\mathbf{II}$ 이고 위첨자 J 는 Jaumann objective rate를 나타낸다.

2.3 유체-고체 상호작용 문제의 계면 조건들

유체-고체 상호작용 해석에서 유체와 고체 영역을 결합하기 위하여 만족해야 하는 조건들이 있는데 계면 Γ_{FS} 에서 적합성을 만족해야 한다.

$$\mathbf{v}_F = \dot{\mathbf{u}}_S \quad \text{at } \Gamma_{FS} \quad (6)$$

위의 조건은 유체의 경계가 구조물의 변위를 따라가서 유체와 고체 영역의 분리와 침투가 없어야 하는 물리적 조건이 된다.

유체 입자는 유체와 고체 계면을 따라야 하므로 유체 격자의 속도는 계면의 수직 방향으로는 불어 있어야 하는데 다음과 같다.

$$\mathbf{v}_F^m \cdot \mathbf{n}_F + \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n}_S = 0 \quad \text{at } \Gamma_{FS} \quad (7)$$

유체 격자의 일관성은 유체 격자의 경계가 구조물의 현재 상태를 정확히 나타내어야 한다는 조건이 된다.

유체 고체의 계면에서 응력의 평형이 이루어져야 하는데 다음과 같이 나타나게 된다.

$$\boldsymbol{\sigma}_F \cdot \mathbf{n}_F + \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{n}_S = 0 \quad \text{at } \Gamma_{FS} \quad (8)$$

특히 곡률을 갖는 계면에서 불일치 격자의 하중 전달은 주요한 어려운 과제가 된다. 계속해서 표기의 편리를 위하여 아래첨자 F 와 S 를 생략하여 나타내기로 하자.

3. 유한요소 수식화

3.1 유체 영역의 유한요소 수식화

유동장을 해석의 유한요소 중에서 속도와 압력을 동일한 차수로 근사하는 방법을 사용하게 되면 유동의 대류 그리고 속도와 압력의 적절하지 않은 조합으로 인하여 불안정이 발생하게 된다. 본 연구에서 안정된 결과를 얻기 위하여 streamline-upwind Petrov-Galerkin(SUPG)와 pressure stabilized Petrov-Galerkin(PSPG) 방법⁽⁷⁻⁸⁾을 적용하였다.

유체영역을 n_F^{el} 의 유한요소로 분할하고 유한요소 수식화를 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_F^h} \left\{ \mathbf{w}^h \cdot \left[\rho_F \left(\frac{\partial \mathbf{v}^h}{\partial t} + (\mathbf{v}^h \otimes \nabla) \cdot (\mathbf{v}^h - \mathbf{v}^m) - \mathbf{f} \right) \right] - p^h (\nabla \cdot \mathbf{w}^h) \right. \\
& \left. + \mu (\mathbf{w}^h \otimes \nabla) : (\mathbf{v}^h \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{v}^h) \right\} d\Omega + \int_{\Omega_F^h} q^h (\nabla \cdot \mathbf{v}^h) d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_F^{el}} \int_{\Omega_F^e} \left[\tau_{SUPG} (\mathbf{w}^h \otimes \nabla) \cdot (\mathbf{v}^h - \mathbf{v}^m) + \frac{1}{\rho_F} \tau_{PSPG} \nabla q^h \right] \\
& \cdot \left[\rho_F \left(\frac{\partial \mathbf{v}^h}{\partial t} + (\mathbf{v}^h \otimes \nabla) \cdot (\mathbf{v}^h - \mathbf{v}^m) - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_F^{el}} \int_{\Omega_F^e} \tau_{LSIC} \rho_F (\nabla \cdot \mathbf{w}^h) (\nabla \cdot \mathbf{v}^h) d\Omega = \int_{\Gamma_F^+} \mathbf{w}^h \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (9)
\end{aligned}$$

여기서 \mathbf{w}^h 와 q^h 는 Galerkin 수식의 일반 가중함수이다. 식 (9)에서 안정화 계수 τ_{SUPG} , τ_{PSPG} , τ_{LSIC} 는 참고문헌⁽⁹⁾의 방법을 적용하였다.

식 (9)에 유한요소 근사를 적용하면,

$$\mathbf{M}_F \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}_F \mathbf{v} + \mathbf{G}_F \mathbf{p} = \mathbf{F}_F \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_F^* \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{G}_F^* \mathbf{v} + \mathbf{H}_F \mathbf{p} = \mathbf{Q}_F \quad (11)$$

여기서

$$\begin{aligned}
[\mathbf{M}_F]_{ij}^{\mu} &= \int_{\Omega_F^h} \delta_{ij} \rho_F N^i N^j d\Omega + \sum_{e=1}^{n_F^{el}} \int_{\Omega_F^e} \tau_{SUPG} \rho_F \delta_{ij} \nabla N^i \cdot (\mathbf{v}^h - \mathbf{v}^m) N^j d\Omega \\
[\mathbf{K}_F]_{ij}^{\mu} &= \int_{\Omega_F^h} [\delta_{ij} \rho_F N^i \nabla N^j \cdot (\mathbf{v}^h - \mathbf{v}^m) + \mu (\delta_{ij} \nabla N^i \cdot \nabla N^j + (\nabla N^i)_j (\nabla N^j)_i)] d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_F^{el}} \int_{\Omega_F^e} \tau_{SUPG} \rho_F \delta_{ij} [\nabla N^i \cdot (\mathbf{v}^h - \mathbf{v}^m)] [\nabla N^j \cdot (\mathbf{v}^h - \mathbf{v}^m)] d\Omega \\
& - \sum_{e=1}^{n_F^{el}} \int_{\Omega_F^e} \tau_{SUPG} \mu \nabla N^i (\mathbf{v}^h - \mathbf{v}^m) (\delta_{ij} \nabla \cdot (\nabla N^j) + (\nabla^2 N^j)_{jj}) d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_F^{el}} \int_{\Omega_F^e} \tau_{LSIC} \rho_F (\nabla N^i) (\nabla N^j)_j d\Omega \\
[\mathbf{G}_F]_{ij}^{\mu} &= - \int_{\Omega_F^h} (\nabla N^i)_j N^j d\Omega + \sum_{e=1}^{n_F^{el}} \int_{\Omega_F^e} \tau_{SUPG} \nabla N^i \cdot (\mathbf{v}^h - \mathbf{v}^m) (\nabla N^j)_j d\Omega \\
[\mathbf{F}_F]_{ij}^{\mu} &= \int_{\Omega_F^h} \rho_F N^i (\mathbf{f})_j d\Omega + \int_{\Gamma} N^i (\bar{\mathbf{t}})_j d\Gamma + \sum_{e=1}^{n_F^{el}} \int_{\Omega_F^e} \tau_{SUPG} \rho_F \nabla N^i \cdot (\mathbf{v}^h - \mathbf{v}^m) (\mathbf{f})_j d\Omega \\
[\mathbf{M}_F^*]_{ij}^{\mu} &= \sum_{e=1}^{n_F^{el}} \int_{\Omega_F^e} \tau_{PSPG} (\nabla N^i)_j N^j d\Omega \\
[\mathbf{G}_F^*]_{ij}^{\mu} &= \int_{\Omega_F^h} N^i (\nabla N^j)_j d\Omega + \sum_{e=1}^{n_F^{el}} \int_{\Omega_F^e} \tau_{PSPG} (\nabla N^i)_j \nabla N^j \cdot (\mathbf{v}^h - \mathbf{v}^m) d\Omega \\
& - \sum_{e=1}^{n_F^{el}} \int_{\Omega_F^e} \tau_{PSPG} \frac{\mu}{\rho_F} ((\nabla N^i)_j \nabla \cdot (\nabla N^j) + \nabla N^i \cdot \nabla (\nabla N^j)_j) d\Omega \\
[\mathbf{H}_F]_{ij}^{\mu} &= \sum_{e=1}^{n_F^{el}} \int_{\Omega_F^e} \tau_{PSPG} \frac{1}{\rho_F} \nabla N^i \cdot \nabla N^j d\Omega \\
[\mathbf{Q}_F]_{ij}^{\mu} &= \sum_{e=1}^{n_F^{el}} \int_{\Omega_F^e} \tau_{PSPG} \nabla N^i \cdot \mathbf{f} d\Omega
\end{aligned}$$

여기서 N^i 는 절점 i 의 유한요소 형상함수이다.

Generalized- α 방법을 사용하여 속도의 시간 증분을 다음과 같이 나타내었다.

$$\dot{\mathbf{v}}^h(n+1) = \frac{1}{\alpha \Delta t} (\mathbf{v}^h(n+1) - \tilde{\mathbf{v}}^h(n+1)) \quad (12)$$

여기서 $\tilde{\mathbf{v}}^h(n+1) = \mathbf{v}^h(n) + \Delta t(1-\alpha)\dot{\mathbf{v}}^h(n)$ 이고 본 연구에서는 Crank-Nicolson 방법 ($\alpha=1/2$)을 적용하였다. 식 (12)를 식 (10)과 (11)에 대입하면 다음과 같은 방정식을 얻게 된다.

$$\mathbf{P}_F^{(n+1)} - \mathbf{F}_F^{(n+1)} = \mathbf{0} \quad (13)$$

$$\mathbf{R}_F^{(n+1)} - \mathbf{Q}_F^{(n+1)} = \mathbf{0} \quad (14)$$

여기서

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_F^{(n+1)} &= \left(\frac{1}{\alpha \Delta t} \mathbf{M}_F + \mathbf{K}_F \right)^{(n+1)} \mathbf{v}^h(n+1) + \mathbf{G}_F^{(n+1)} \mathbf{p}^h(n+1) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \mathbf{M}_F^{(n+1)} \tilde{\mathbf{v}}^h(n+1) \\
\mathbf{R}_F^{(n+1)} &= \left(\frac{1}{\alpha \Delta t} \mathbf{M}_F^* + \mathbf{G}^* \right)^{(n+1)} \mathbf{v}^h(n+1) + \mathbf{H}_F^{(n+1)} \mathbf{p}^h(n+1) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \mathbf{M}_F^{*(n+1)} \tilde{\mathbf{v}}^h(n+1)
\end{aligned}$$

식 (13)과 (14)를 선형화하면 다음과 같이 나타나진다.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_F & \bar{\mathbf{G}}_F \\ \bar{\mathbf{G}}_F^* & \bar{\mathbf{H}}_F \end{bmatrix}^{(n,i)} \begin{Bmatrix} d\mathbf{v}^h(n,i+1) \\ d\mathbf{p}^h(n,i+1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_F^{(n+1)} - \mathbf{P}_F^{(n,i)} \\ \mathbf{Q}_F^{(n+1)} - \mathbf{R}_F^{(n,i)} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

식 (15)를 Newton-Raphson 반복 계산으로 유체의 속도와 압력을 구하게 된다.

3.2 고체 영역의 유한요소 수식화

고체영역을 n_S^{el} 의 유한요소로 분할하고 유한요소 수식화를 하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega_S^h} \left(\rho_S \mathbf{w}^h \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}^h}{\partial t^2} + (\mathbf{w}^h \otimes \nabla) : \boldsymbol{\sigma} \right) d\Omega = \int_{\Omega_S^h} \rho_S \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_S} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{t} d\Gamma \quad (16)$$

고체의 재료는 탄성이지만 유한 변형과 회전으로 인한 비선형이 발생하는데 본 연구에서는 updated Lagrangian 방법을 사용하여 선형화 하였다. 시간 증분 $[t^n, t^{n+1}]$ 사이의 반복 계산에서 $t^{(n,i)}$ 까지 계산이 된 경우에 기준 상태를 $t^{(n,i)}$ 로 하여 응력을 선형화 하면 다음과 같다.

$$\mathbf{T}^{(n,i+1)} = \mathbf{T}^{(n,i)} + d\mathbf{T}^{(n,i+1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(n,i)} + (\dot{\mathbf{t}}^{(n,i)} - \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(n,i)}) dt \quad (17)$$

여기서 $\mathbf{T} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ 이고 \mathbf{L} 은 velocity gradient 이다. 식 (17)과 구성방정식 (5)를 식 (16)에 대입 하면 다음을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_S^{h(n,i)}} \left\{ \rho_S \mathbf{w}^h \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{h(n,i+1)}}{\partial t^2} + \boldsymbol{\varepsilon}^{h*} : (\mathbf{C} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{h(n,i+1)} - d\boldsymbol{\varepsilon}^{h(n,i+1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(n,i)} - \boldsymbol{\sigma}^{(n,i)} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^{h(n,i+1)}) \right. \\ & \quad \left. + (\mathbf{w}^h \otimes \nabla) : \left[d\mathbf{u}^{h(n,i+1)} \otimes \nabla \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(n,i)} \right\} d\Omega \\ & = \int_{\Omega_S^{h(n,i)}} \rho_S \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{b}^{(n+1)} d\Omega + \int_{\Gamma_S^{h(n,i)}} \mathbf{w}^h \cdot \bar{\mathbf{t}}^{(n+1)} d\Gamma - \int_{\Omega_S^{h(n,i)}} \boldsymbol{\varepsilon}^{h*} : \boldsymbol{\sigma}^{(n,i)} d\Omega \quad (18) \end{aligned}$$

여기서 $\boldsymbol{\varepsilon}^{h*}$ 는 가중함수 \mathbf{w}^h 의 변형률이고 $\mathbf{u}^{h(n,i+1)} = \mathbf{u}^{h(n,i)} + d\mathbf{u}^{h(n,i+1)}$ 이다. Newmark 방법을 사용하여 변위와 가속도는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{u}^{h(n,i+1)} = \tilde{\mathbf{u}}^{h(n+1)} + \frac{\beta \Delta t}{\gamma} \left(\mathbf{v}^{h(n,i+1)} - \tilde{\mathbf{v}}^{h(n+1)} \right) \quad (19)$$

$$\mathbf{a}^{h(n,i+1)} = \frac{1}{\gamma \Delta t} \left(\mathbf{v}^{h(n,i+1)} - \tilde{\mathbf{v}}^{h(n+1)} \right) \quad (20)$$

여기서

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}^{h(n+1)} &= \mathbf{u}^{h(n)} + \Delta t \mathbf{v}^{h(n)} + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \mathbf{a}^{h(n)} \\ \tilde{\mathbf{v}}^{h(n+1)} &= \mathbf{v}^{h(n)} + (1 - \gamma) \Delta t \mathbf{a}^{h(n)} \end{aligned}$$

본 연구에서는 평균 사다리꼴 방법 ($\beta=1/4, \gamma=1/2$)을 적용하였고 선형화된 유한요소 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{\mathbf{K}}_S d\mathbf{v}^{h(n,i+1)} = \mathbf{F}_S^{(n+1)} - \mathbf{P}_S^{(n,i)} \quad (21)$$

여기서

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_S &= \frac{1}{\gamma \Delta t} \mathbf{M}_S + \frac{\beta \Delta t}{\gamma} \mathbf{K}_S \\ [\mathbf{M}_S]_{ij}^w &= \int_{\Omega_S^i} \rho_S \delta_j N^i N^j d\Omega \\ [\mathbf{K}_S]_{ij}^w &= \int_{\Omega_S^i} \left[(\mathbf{B}_j^T)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j^T \right] d\Omega + \int_{\Omega_S^i} \frac{1}{2} \left[\delta_j \nabla N^i \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla N^j - (\boldsymbol{\sigma})_j \nabla N^i \cdot \nabla N^j \right. \\ & \quad \left. - (\nabla N^i)_j (\nabla N^j \cdot \boldsymbol{\sigma}) - (\nabla N^i \cdot \boldsymbol{\sigma})_j (\nabla N^j)_i \right] d\Omega \\ [\mathbf{F}_S^{(n+1)}]_i &= \int_{\Omega_S^i} \rho_S N^i (\mathbf{b}^{(n+1)}) d\Omega + \int_{\Gamma_S^i} N^i (\bar{\mathbf{t}}^{(n+1)}) d\Gamma \\ [\mathbf{P}_S^{(n,i)}]_i &= \int_{\Omega_S^i} (\mathbf{B}_i^T)^T \boldsymbol{\sigma}^{(n,i)} d\Omega - \left(\frac{1}{\gamma \Delta t} \mathbf{M}_S + \frac{\beta \Delta t}{\gamma} \mathbf{K}_S \right) (\tilde{\mathbf{v}}^{h(n+1)} - \mathbf{v}^{h(n,i)}) + \mathbf{K}_S (\tilde{\mathbf{u}}^{h(n+1)} - \mathbf{u}^{h(n,i)}) \end{aligned}$$

4. 불일치 격자의 연결

4.1 계면 요소

일반적으로 유체 영역은 고체 영역에 비하여 세밀한 격자를 사용하게 되므로 계면에서 불일치 격자의 결합 기법이 요구된다. 본 연구에서는 유체와 고체 요소 사이의 불일치 격자를 겹침이나 틈이 없이 적합 조건을 정확히 만족하고 하중 전달을 바르게 할 수 있는 방법을 개발하고자 한다.

Fig. 1(a)와 같이 불일치 격자 사이의 요소의 침투와 틈이 있게 되는데 계면요소법에서는 계면의 절점들을 연결하여 침투와 틈이 없는 연속적인 계면을 구성하게 된다. Fig. 1(b)에 연속적인 계면을 보여 주고 있는데, 계면에 부합하는 요소들을 계면요소라 부르게 된다. 결과적으로 구성되는 계면 요소는 기존의 유한요소와는 다른 분할이 되며 새로운 형상함수가 요구되게 된다.

계면요소 형상함수는 moving least square(MLS) 방법을 사용하여 구성되는데 Fig. 2 와 같이 유체 영역의 계면요소에서는 속도와 압력 변수를 사용하게 되고 고체 영역의 계면요소는 속도 변수만 사용하게 된다.

MLS 형상함수를 구성하기 위하여 가중함수를 정의해야 하는데 본 연구에서는 다음과 같이 정의 하였다.

$$w^I(\mathbf{x}) = 3[s^I(\mathbf{x})]^2 - 2[s^I(\mathbf{x})]^3 \quad \text{for } \mathbf{x} \in \Omega_{\text{sup}}^I \quad (22)$$

$$s^I(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^4 N^k(\mathbf{x}) s_k^I$$

여기서 k 는 계면요소의 꼭지점, $\Omega_{\text{sup}}^I \in \Omega^E$ 는 절점 I 의 지지영역, s_k^I 는 $s^I(\mathbf{x})$ 의 꼭지점 값 그리고 $N^k(x)$ 는 계면요소에서 정의된 유한요소 형상함수이다.

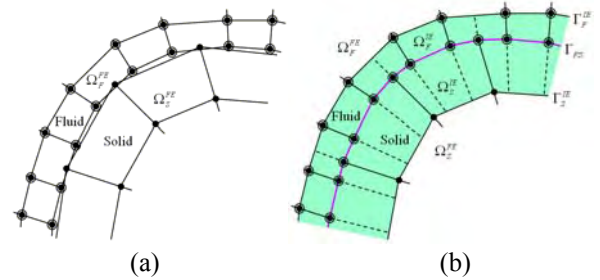


Fig. 1 Finite and interface elements at the FS interface: (a) overlays and gaps between non-matching finite element meshes, (b) matching interface element meshes.

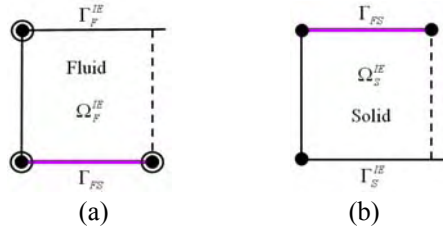


Fig. 2 Interface elements in fluid and solid domains: the hollow circles denote pressure variables at nodes.

계면 Γ_{FS} 에 있는 절점의 지지영역은 이 절점을 포함하는 계면요소들에서 정의가 되는데, Fig. 3(a) 에 보여주고 있다. 또한 계면요소와 유한요소의 경계 $\Gamma^{IE} = \partial\Omega^{IE} \cap \partial\Omega^{FE}$ 의 절점에 대한 지지영역은 Fig. 3(b)와 같이 유한요소를 기반으로 하는 계면요소들에서 정의가 된다. 즉, 유체-고체 계면에서 다음과 같은 적합성을 완벽하게 만족하게 된다.

$$\mathbf{v}(\mathbf{x})|_{\partial\Omega_F^{IE}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})|_{\partial\Omega_S^{IE}} \text{ at } \Gamma_{FS} \quad (23)$$

또한 두 절점 사이에 정의된 가중함수를 사용하는 MLS 근사는 항상 유한요소 형상함수와 같게 되므로⁽¹⁰⁾ 다음과 같이 계면요소와 유한요소의 적합성이 만족하게 된다.

$$\mathbf{v}(\mathbf{x})|_{\partial\Omega^{IE}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})|_{\partial\Omega^{FE}} \text{ at } \Gamma^{IE} \quad (24)$$

MLS 근사는 중요한 특성 중의 하나로 기저함수 조합의 함수 $f(\mathbf{x})$ 를 완벽하게 재현할 수 있다.

$$\sum_{K=1}^{N_A} \phi^K(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}^K) = f(\mathbf{x}) \quad (25)$$

여기서 $\phi^K(\mathbf{x})$ 는 계면요소 형상함수이다. 식 (25)의 재현성은 계면요소를 통하여 응력을 올바르게 전달할 수 있는 능력으로 형상함수의 완전성이 된다.

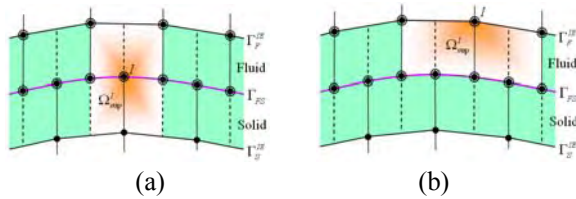


Fig. 3 Support domains in the interface element domain: (a) support domain of a node at Γ_{FS}^{IE} , (b) support domain of a node at Γ^{IE} .

5. 예제

본 연구에서는 Fig. 4 와 같이 2 차원 탄성 벽 사이의 유동을 해석하였다. 유체의 왼쪽 면에 아래와 같은 속도를 부여하였고 오른쪽 면에는 압력은 0 으로 하였다.

$$v_0(t) = v_{\max}(1 - \cos(\omega t)) \quad (26)$$

식 (26)에서 $\omega = \pi/2$ 이고 왼쪽면의 최대 속도는 $v_{\max} = 60.0 \text{ mm/s}$ 로 하였다. 해석 영역의 크기는 $L = 100.0 \text{ mm}$, $L_b = 28.0 \text{ mm}$, $H = 40.0 \text{ mm}$, $h = 8.0 \text{ mm}$, $T = 4.0 \text{ mm}$ 이다. 고체의 탄성계수는 $E = 2.0 \times 10^1 \text{ g/mm}^2$ 이고 포와슨 비는 $\nu = 0.4$ 그리고 밀도는 $\rho_s = 1.13 \times 10^{-4} \text{ g/mm}^3$ 로 하였다. 유체의 점성은 $\mu = 1.82 \times 10^{-5} \text{ g/mm} \cdot \text{s}$ 이고 밀도는 $\rho_f = 1.18 \times 10^{-6} \text{ g/mm}^3$ 로 하였다. Fig. 5(a)에 유체와 고체의 요소 분할로 인한 침투와 틈을 보여 주고 있고 Fig. 5(b)에는 계면요소를 보여주고 있다. 시간 증분을 $\Delta t = 0.04 \text{ s}$ 로 고정하여 해석 하였다. Fig. 6 에 유체의 유동 흐름에 따른 고체 벽의 변형과 유체의 속도를 보여 주고 있다. 유체 격자의 효율적인 이동을 보여주고 있으며 완전 결합 방정식의 우수한 결과를 보여주고 있다.

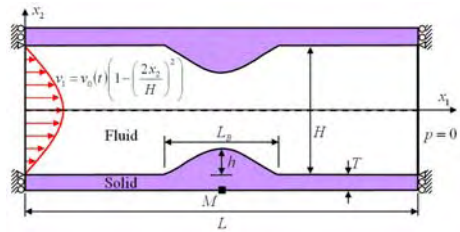


Fig. 4 Channel flow with an elastic wall

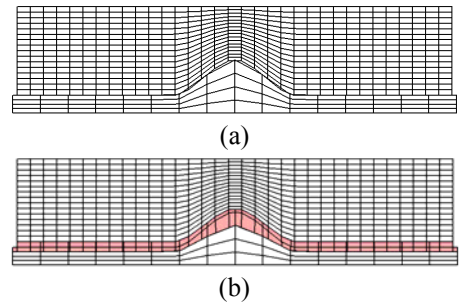


Fig. 5 Non-matching meshes of channel flows with an elastic wall: (a) non-matching interfaces between finite element meshes, (b) interface elements between finite element meshes.

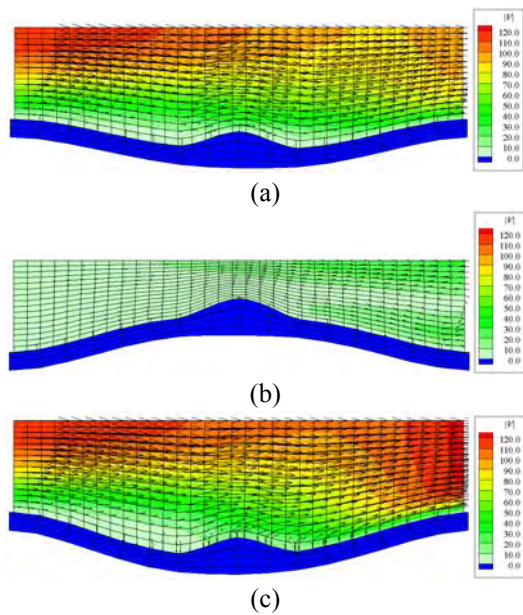


Fig. 6 Velocity distributions at different time instances of the channel flow with an elastic wall: (a) $t = 2.0 \text{ s}$, (b) $t = 4.0 \text{ s}$, (c) $t = 6.0 \text{ s}$.

6. 결론

유체와 고체 영역의 불일치 격자를 결합하기 위한 계면요소를 본 연구에서 개발하였다. 계면요소는 유체와 고체 사이의 요소들의 침투와 틈을 제거하며 완벽하게 접합성을 만족시키게 된다. 또한 유체의 하중을 고체 표면에 올바르게 전달하며 고체의 움직임을 유체 격자의 이동에 정확하게 전달하게 된다. 본 연구에서는 계면요소를 사용하여 유체와 고체 방정식들을 하나의 완전 결합방정식으로 해석 하였으며 유체-고체 상호작용 해석을 위한 효율적이고 정확성이 높은 새로운 방법을 제시하였다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 특정기초연구(No. R01-2006-000-11122-0)지원으로 수행되었음.

참고문헌

(1) Cebal, J. R. and Löhner R., 1997, "Conservative load projection and tracking for fluid-structure problems," *AIAA J.*, Vol. 35, pp. 687~692.

(2) Dettmer, W. and Perić, D., 2006, "A computational framework for fluid-structure interaction: Finite element formulation and applications," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 195, pp. 5754~5779.

(3) Jaiman, R. K., Jiao, X., Geubelle, P. H. and Loth E., 2005, "Assessment of conservative load transfer for fluid-solid interface with non-matching meshes," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 64, pp. 2014~2038.

(4) Park K. C., Felippa, C. A. and Ohayon, R., 2001, "Partitioned formulation of internal fluid-structure interaction problems by localized Lagrange multipliers," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 190, pp. 1989~3007.

(5) Casadei, F., Halleux, J. P., Sala A. and Chillé, F., 2001, "Transient fluid-structure interaction algorithms for large industrial applications," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 190, pp. 3081~3110.

(6) Kim H.-G., 2002, "Interface element method (IEM) for a partitoned system with non-matching interfaces," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 191, pp. 3165~3194.

(7) Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R., 1982, "Streamline-upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 32, pp. 199~259.

(8) Tezduyar, T. E., Mittal, S., Ray, S. E. and Shih, R., 1992, "Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 95, pp. 221~242.

(9) Tezduyar, T. E., 2003, "Computation of moving boundaries and interfaces and stabilization parameters," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 43, pp. 555~575.

(10) Kim H.-G., 2003, "Arbitrary placement of local meshes in a global mesh by the interface element method (IEM)," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 56, pp. 2279~2312.