

# Krylov 부공간에 근거한 모멘트일치법을 이용한 모델차수축소법 및 배열형 MEMS 공진기 주파수응답함수 계산에의 응용

한정삼<sup>†</sup> · 고진환<sup>\*</sup>

## Model Order Reduction Using Moment-Matching Method Based on Krylov Subspace and Its Application to FRF Calculation for Array-Type MEMS Resonators

Jeong Sam Han and Jin Hwan Ko

**Key Words :** Moment-matching method(모멘트일치법), Krylov subspace(크리로프 부공간), Model order reduction(모델차수축소법), Frequency response function(주파수응답함수), Array-type MEMS resonator(배열형 MEMS 공진기)

### Abstract

One of important factors in designing array-type MEMS resonators is obtaining a desired frequency response function (FRF) within a specific range. In this paper Krylov subspace-based model order reduction using moment-matching with non-zero expansion points is represented to calculate the FRF of array-type resonators. By matching moments at a frequency around a specific range of the array-type resonators, required FRFs can be efficiently calculated with significantly reduced systems regardless of their operating frequencies. In addition, because of the characteristics of moment-matching method, a minimal order of reduced system with a specified accuracy can be determined through an error indicator using successive reduced models, which is very useful to automate the order reduction process and FRF calculation for structural optimization iterations.

### 1. 서 론

현재 사용되는 무선통신 시스템에서 여러 가지 주파수를 선택할 수 있도록 하는 필터에는 낮은 삽입손실(insertion loss), 저전력, 높은 Q-factor를 지닌 MEMS 공진기(resonator)가 요구된다.<sup>(7-9)</sup> 근래에는 가용주파수 대역이 점점 높아짐에 따라서 수백 MHz에서 수십 GHz 주파수 대역의 공진기가 개발되어 사용되고 있다. 이러한 MEMS 공진기의 설계에는 공진기의 관심주파수 대역에 대한 주파수 응답함수의 계산이 필수적이다. 특히 최근에는 용도에 부합하는 주파수응답을 얻기 위하여 여러 개

의 공진기를 연결한 배열형 MEMS 공진기가 제안되어 더욱 복잡한 시스템에 대한 방대한 주파수 응답함수의 계산이 필요하게 되었다.<sup>(7)</sup> 따라서, 특정한 고주파수 대역에 대한 주파수응답함수를 효율적으로 계산할 수 있는 수치계산방법이 절실히 요구된다.

본 논문에서는 모멘트일치법을 이용한 모델차수축소법을 이용하여 관심 고주파수 영역에서 주파수응답함수를 효과적으로 계산하는 방법에 대하여 설명한다.<sup>(1-6)</sup> 또한, 초기 유한요소모델과 축소모델 사이에 발생하는 결과의 오차를 축소모델의 차수에 따라서 비교해 봄으로써, 공학적 측면에서 요구되는 정확도를 지닌 축소모델의 차수를 자동적으로 결정할 수 있는 방법을 보이고자 한다.

### 2. 이차 시스템의 모델차수축소법

일반적으로 이차 시스템의 운동방정식을 유한

<sup>†</sup> 정회원, 안동대학교 기계공학부

E-mail : jshan@andong.ac.kr

TEL : (054)820-6218 FAX : (054)820-5167

<sup>\*</sup> 정회원, 건국대학교 항공우주정보학과

요소해석의 행렬 형태로 나타내면 다음과 같이 이차 상미분방정식으로 표현된다.<sup>(1,2)</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{b}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{L}^T \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서,  $t$ 는 시간변수,  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^N$ 은 상태변수벡터,  $u(t)$ 은 입력, 그리고  $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{R}^p$ 는 출력벡터를 의미한다. 상태변수벡터  $\mathbf{x}(t)$ 의 자유도는  $N$ , 출력벡터의 크기는  $p$ 이다. 행렬  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K} \in \mathcal{R}^{N \times N}$ 는 각각 이차 시스템의 질량행렬, 감쇠행렬, 강성행렬이다. 행렬  $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^N$ 와  $\mathbf{L} \in \mathcal{R}^{N \times p}$ 은 각각 하중이 작용하는 위치와 크기를 나타내는 하중분배벡터와 선택한 위치의 응답을 보기 위한 출력측정행렬을 의미한다.

모델차수축소법의 기본 개념은 아래 식(2)의 관계를 만족하는 변환행렬  $\mathbf{V} \in \mathcal{R}^{N \times n}$ 을 통하여 초기 시스템의 큰 자유도의 상태변수벡터  $\mathbf{x}(t)$ 의 응답을 작은 자유도로 구성된 축소시스템의 상태변수벡터  $\mathbf{z}(t)$ 로 근사화하는 것이다.

$$\mathbf{x}(t) \cong \mathbf{V}\mathbf{z}(t) \quad \text{where } \mathbf{z}(t) \in \mathcal{R}^n, \quad n \ll N \quad (2)$$

따라서, 먼저 변환행렬  $\mathbf{V}$ 를 구한 후에 식(1)의 이차 시스템을  $\mathbf{V}$ 의 부공간에 투영(projection)시키고, 이 식의 양변에  $\mathbf{V}$ 의 전치행렬을 곱하면 식(1)과 동일한 형태를 지닌 이차 축소시스템을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}_r \mathbf{z}(t) &= \mathbf{b}_r u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{L}_r^T \mathbf{z}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, 축소행렬은  $\mathbf{M}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{C}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{K}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{b}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{b}$  및  $\mathbf{L}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{L}$ 로 각각 표현된다. 따라서, 모델차수축소법은 어떻게 변환행렬  $\mathbf{V}$ 를 구하는가 하는 문제로 귀결된다. 축소모델의 자유도는  $n \ll N$ 이고, 축소모델에서 입력  $u(t)$ 와 출력벡터  $\mathbf{y}(t)$ 는 초기 시스템과 비교하여 변동이 없음을 알 수 있다. 주파수응답함수의 계산에 축소된  $n$ 차 자유도 모델을 해석에 이용하므로 매우 효율적인 해석이 가능하다.

## 2.1 모멘트 일치법

초기조건  $d\mathbf{x}(0)/dt = \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  하에서 식(1)의 전달함수를 구하면

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{Y}(s)/U(s) = \mathbf{L}^T (s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{b} \quad (4)$$

이고, 이 식을  $s$ 에 대하여 전개점  $s=s_0$ 에서 테일러 급수 전개(Taylor series expansion)을 하면 전달함수는 아래와 같이 급수 형태로 표현할 수 있다.<sup>(2)</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1(s-s_0) + \dots + \mathbf{m}_q(s-s_0)^q + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{m}_i (s-s_0)^i \end{aligned} \quad (5)$$

이때, 계수  $\mathbf{m}_i$ 를 전개점  $s_0$ 에 대한 전달함수의 모멘트(moment)라고 한다. 이 모멘트는 초기 시스템과 축소시스템의 유사성(similarity)을 나타내는 지표로 사용된다. 즉, 식(1)과 동일한 이차 형태를 지닌 축소시스템 (3)의 전달함수를

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}(s) &= \hat{\mathbf{m}}_0 + \hat{\mathbf{m}}_1(s-s_0) + \dots + \hat{\mathbf{m}}_q(s-s_0)^q + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\mathbf{m}}_i (s-s_0)^i \end{aligned} \quad (6)$$

라고 하면, 결국 모멘트일치법은 요구되는 차수  $n$ 에 대하여 다음을 만족하는 축소시스템인 식(3)을 찾는 문제를 의미한다.

$$\mathbf{m}_i = \hat{\mathbf{m}}_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (7)$$

만약, 식(1)을 비감쇠 시스템으로 가정하면  $\mathbf{H}(s)$ 는 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \mathbf{L}^T (s^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{b} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{L}^T (-\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^i \mathbf{K}^{-1} \mathbf{b} s^{2i} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{m}_i s^{2i} \end{aligned} \quad (8)$$

즉, 비감쇠 시스템의 모멘트는  $\mathbf{m}_i = \mathbf{L}^T (-\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^i \mathbf{K}^{-1} \mathbf{b}$ 이다.

## 2.2 크리로프 부공간

행렬  $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{N \times N}$  및 벡터  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}^N$ 에 대하여

$$\mathcal{K}_q(\mathbf{A}, \mathbf{r}) = \text{span}\{\mathbf{r}, \mathbf{A}\mathbf{r}, \mathbf{A}^2\mathbf{r}, \dots, \mathbf{A}^{q-1}\mathbf{r}\} \quad (9)$$

를  $q$ 차 크리로프 부공간( $q$ th Krylov subspace)라 한다. 만약  $\mathbf{A} = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{b}$ 라고 하면  $q$ 차 크리로프 부공간은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_q(-\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1} \mathbf{b}) \\ = \text{span}\{\mathbf{K}^{-1} \mathbf{b}, (-\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})\mathbf{K}^{-1} \mathbf{b}, \dots, (-\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^{q-1} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{b}\} \end{aligned} \quad (10)$$

크리로프 부공간에 근거한 모멘트일치법은 전달함수의 모멘트  $\mathbf{m}_i$ 를 실제로 계산하지 않고, 초기 및 축소시스템의 모멘트를 일치시킬 수 있도록 한다. 크리로프 부공간에 근거한 모멘트일치법에 대하여 식(2)의 변환행렬  $\mathbf{V}$ 의 각 열벡터로 이루어진 모든 선형 결합들이 식(10)의  $q$ 차 크리로프 부공간을 구성(span)하면, 초기 비감쇠 이차 시스템과 비감쇠 축소시스템의 첫  $q$ 번째까지의 모멘트는 서로 일치한다.<sup>(4,5)</sup> 이때, 변환행렬  $\mathbf{V}$ 를 구하는데 초기시스템의 질량 및 강성행렬과 하중분배벡터의 정보만을 이용한다. 이러한 열벡터로 이루어진 변환행렬  $\mathbf{V}$ 는 아놀디과정(Arnoldi process)<sup>(2,5)</sup>을 통하여 계산되며 다음과 같은 정규직교성(orthonormality)을 가지고 있다.

$$\text{colspan}\{\mathbf{V}\} = \mathcal{K}_q(-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}) \quad (11)$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_q$$

여기서  $\mathbf{I}_q$ 는  $q$ 차의 단위행렬이다.

그런데, 초기 이차 시스템에서 감쇠행렬이 아래의 식(12) 및 (13)과 같이 표현되는 경우는 식(2)의 변환행렬  $\mathbf{V}$ 가 단순히  $\mathcal{K}_q(-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}) = \text{colspan}\{\mathbf{V}\}$ 의 관계만을 만족하더라도, 초기 이차 시스템과 축소시스템의 첫  $q$ 번째까지의 모멘트는 서로 일치한다.<sup>(12)</sup>

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (12)$$

$$\mathbf{C} = \beta_c\mathbf{K} \quad (13)$$

특히, 본 논문에서 고려하고자 하는 문제와 같이 특정한 고주파수 대역에 대하여 축소모델을 생성하는 경우는  $s_0 \neq 0$ 인 전개점에 대하여 테일러 급수 전개함으로써 그 주파수 대역에서 더 높은 정확도를 가진 축소모델을 얻을 수 있다. 만약 주파수 응답함수의 관심주파수를  $f_0$  Hz라고 하면 변환행렬  $\mathbf{V}$ 는 다음 식으로 얻어진다.

$$\text{colspan}\{\mathbf{V}\} = \mathcal{K}_q\{(s_0\mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{M}, (s_0\mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{b}\} \quad (14)$$

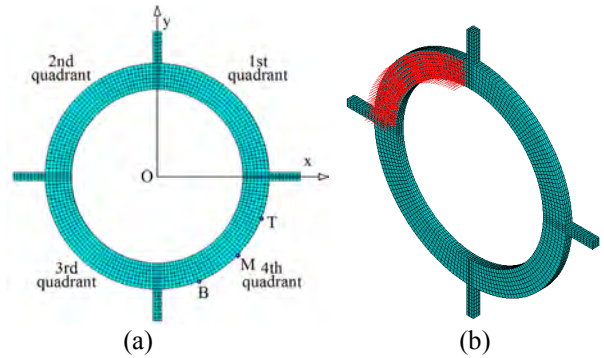
이 때,  $s_0 = -(2\pi f_0)^2$ 이다. 이와 같이 식(14)를 이용함으로써 작동 영역이 고주파수 대역인 MEMS 공진기의 주파수 응답해석에 모멘트 일치법을 이용한 축소모델링을 더욱 효과적으로 적용할 수 있다.

### 3. 배열형 MEMS 공진기의 차수모델링

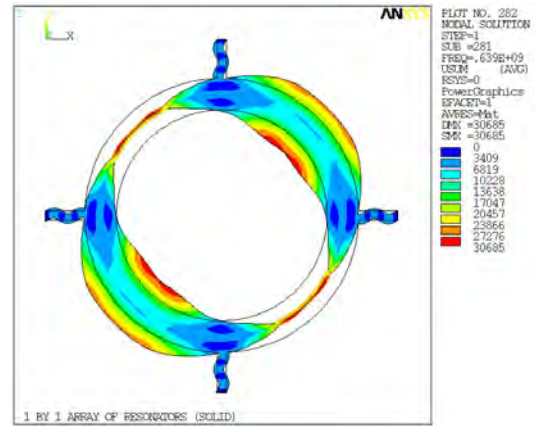
본 절에서는 Fig. 1 형태의 MEMS 공진기의 수백 MHz 주파수 대역에서 발생하는 Fig. 2와 같은 와인잔 형태의 고유진동모드(extensional wine-glass mode)<sup>(8)</sup>를 사용하여 높은 Q-factor를 가지도록 응용된 단일 MEMS 공진기에 대한 주파수 응답함수를 기본으로 하여 이를 2x2, 4x4, 6x6의 배열 형태로 확장한 배열형 MEMS 공진기에 대한 주파수 응답함수를 모델차수 축소법을 이용하여 효율적으로 계산하고 이를 초기 ANSYS 유한요소모델의 결과와 비교하여 제안한 해석 방법의 유용성을 보이고자 한다.

#### 3.1 유한요소모델링

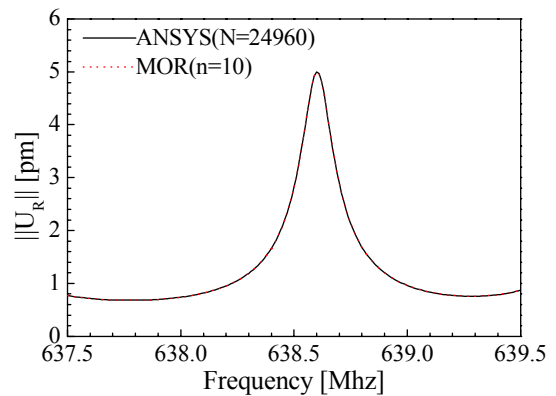
Fig. 1은 단일 공진기에 대한 ANSYS의 유한요소모델과 입력 및 출력을 나타낸다. 이 유한요소모델은 SOLID45 요소로 구성되며 화살표는 유전체를 이용한 구동(dielectric transduction)<sup>(7, 9)</sup>을 모델링한 압력(1 kPa)을 나타낸다. 유한요소모델에서 네 면 끝단의 빔 부분은 구속되었다. 주변형 방향



**Fig. 1** A 1x1 resonator: (a) finite element model with 24,960 DOFs; (b) pressure on the surface of the second quadrant to model actuation force by dielectric transduction



**Fig. 2** Extensional wine glass (EWG) mode of the 1x1 resonator ( $f=638.6$  MHz)



**Fig. 3** Frequency response of the 1x1 resonator

이 각 공진기의 중심축에 대한 반경 방향이므로 각 중심축을 원점으로 하는 원통좌표계를 기본좌표계로 사용하였으며, 4사분면에 있는 세 점 B, T, 그리고 M에서 반경 방향의 응답을 고려하였다.

#### 3.2 주파수 응답해석

공진기에서 출력응답은 Fig. 1(a)처럼 마지막 열(column)에 위치하는 각 공진체의 4사분면에 표시

된 세 지점에서의 반경 방향 응답의 노름(norm)이며 다음 식으로 계산하였다.

$$\|U_R\| = \sqrt{U_{RT1}^2 + U_{RMI}^2 + \dots + U_{RMk}^2 + U_{RBk}^2} \quad (15)$$

여기서,  $k$ 는 배열형 공진기에서 열의 개수를 표시한다. 주파수응답 해석시, 각 시스템의 감쇠는 주파수  $f=638.6$  MHz에서  $Q=4650$ 을 가정하여  $\alpha=0$   $s^{-1}$  및  $\beta=5.36 \times 10^{-14}$  s인 비례감쇠로 하였다.<sup>(8)</sup> 이 때, 기준은 ANSYS의 direct method를 이용하여 해당 주파수대역의 201개의 주파수에서 계산한 주파수응답이다. Fig 3은 EWG 모드 부근(637.5~639.5 MHz)에서의 주파수응답을 도시한 것이다. 자유도  $n=10$ 인 축소모델로 그래프 상에서 오차를 확인할 수 없을 정도로 정확한 결과를 얻을 수 있었다.

최근에 주파수응답의 대역폭(bandwidth) 및 통과대역(pass-band)을 사용 용도에 부합되도록 설계하기 위하여 단일 공진기를 배열 형태로 연결한 배열형 공진기가 도입되고 있다.<sup>(7)</sup> Fig. 4~6은 각각 2x2, 4x4, 6x6 배열형 공진기의 주파수응답을 축소모델과 ANSYS의 초기 유한요소모델을 사용하여 계산한 것이다. 배열형 공진기에서 EWG 모드가 발생하는 주파수 대역인 636.5~638.5 MHz에서의 주파수응답을 도시하였다. 배열형 공진기의 경우, 단일 공진기에 비하여 통과대역은 대략 1 MHz 정도 낮아졌으며 주파수응답의 대역폭이 넓어지고, 필터의 형상계수(shape factor)가 향상되는 경향을 보였다.

2x2 배열형 공진기의 경우, 초기 유한요소모델은 자유도  $N=93,720$ 이며 이를  $n=30$ 인 축소모델로 관심주파수대역에 대하여 그래프상에서 오차를 구분할 수 없을 정도로 정확한 결과를 구할 수 있었다. 4x4 및 6x6 배열형 공진기의 경우, 각각 초기 유한요소모델은 자유도  $N=371,280$  및  $N=832,680$ 이며 이를  $n=80$ 과  $n=150$ 인 축소모델로 관심주파수대역에 대하여 그래프상에서 오차를 구분할 수 없을 정도로 정확한 결과를 구할 수 있었다.

### 3.3 오차분석

MEMS 공진기의 주파수응답 해석에서 설계에 필요한 높은 정확도를 가지면서 최소의 차수( $n$ )를 가지는 축소모델을 생성하는 것은 해석의 정확도와 경제적인 측면에서 중요한 문제이다. 이차 시스템의 주파수응답함수의 경우에 오차지표(error indicator)<sup>(2, 13)</sup>를 이용하면 공학적 측면에서 사용자의 개입없이 자동적으로 축소모델의 차수를 결정할 수 있다. 이것은 테일러 급수 전개점에서부터 관심주파수 대역이 멀어지면 초기모델과 축소모델

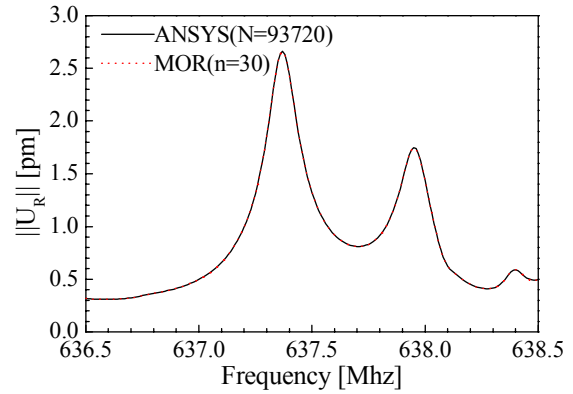


Fig. 4 Frequency response of a 2x2 resonator

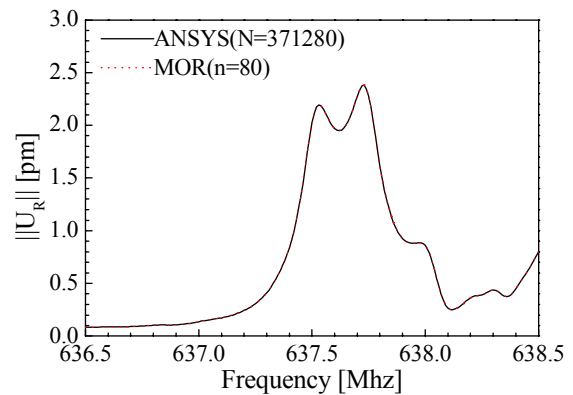


Fig. 5 Frequency response of a 4x4 resonator

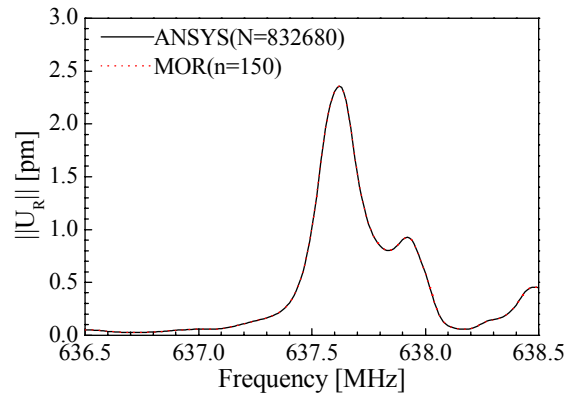


Fig. 6 Frequency response of a 6x6 resonator

사이의 오차가 커지지만 축소모델의 차수를 높이면 더 넓은 주파수 대역까지 두 응답이 정확히 일치하는 모멘트일치법의 특징을 이용한 것이다. 예를 들어 축소모델의 차수가  $n$ 일 때, 특정한 주파수에 대한 주파수응답함수의 진오차( $E_n$ )와 오차지표( $e_n$ )는 각각 아래의 식으로 정의한다.

$$E_n(s) = \frac{\|\hat{H}_n(s) - H(s)\|}{\|H(s)\|} \quad (16)$$

$$e_n(s) = \frac{\|\hat{H}_n(s) - \hat{H}_{n+1}(s)\|}{\|\hat{H}_{n+1}(s)\|} \quad (17)$$

여기서  $H(s)$ 와  $\hat{H}_n(s)$ 는 각각 초기 유한요소모델과  $n$ 차 축소모델의 전달함수를 의미한다. 즉, 진오차  $E_n(s)$ 는  $n$ 차 축소모델로 계산한 전달함수와 초기 유한요소모델의 전달함수와의 상대오차를 의미하며, 오차지표  $e_n(s)$ 는  $n$ 차 축소모델과  $n+1$ 차 축소모델로 계산한 전달함수의 상대오차를 의미한다. 여러 가지 문제의 경우에 넓은 주파수 대역에서 다음과 같은 관계가 성립됨이 수치적 계산을 통하여 관찰되었다<sup>(2, 13)</sup>.

$$E_n(s) \approx e_n(s) \quad (18)$$

Fig. 7은 각 공진기에 대하여 최대 관심주파수  $f$  Hz에서의 진오차와 오차지표로 계산한 상대오차를 비교한 결과인데, 진오차가 기계정확도(machine precision)에 수렴할 때까지는 식(18)의 관계가 성립하며 오히려 그 이후에는 오차지표가 오히려 더 작은 값을 가지는 경향을 가짐을 확인할 수 있다. 따라서, 이를 활용하면 진오차를 계산하지 않고도 원하는 주파수에 대하여 사용자가 설정한 오차 수준( $\epsilon$ )에 해당되는 축소모델의 최저 차수  $n_{\min}$ 을 사용자의 반복적인 개입없이 자동적으로 구할 수 있을 것이다.

$$n_{\min} = \min\{n \mid e_n(f) \leq \epsilon\} \quad (19)$$

Table 1은 각 MEMS 공진기에 대하여 오차 수준을  $\epsilon=10^{-4}$ 로 설정하였을 경우, 식(19)로 결정된 축소모델의 최저 차수  $n_{\min}$ 을 나타낸다.

#### 4. 결론

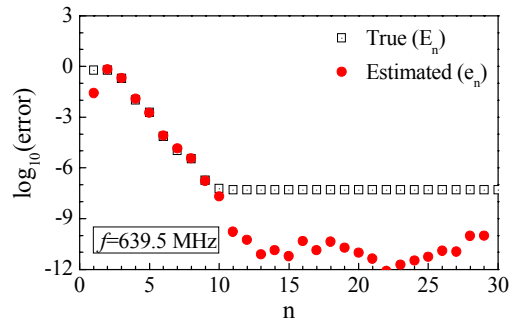
본 논문에서는 고주파수 대역에 존재하는 관심주파수에서의 전달함수의 전개를 이용한 모멘트일치법과 크리토프 부공간에 근거한 모델차수축소법을 이용하여 배열형 MEMS 공진기의 주파수응답함수를 정확하면서도 매우 효율적으로 계산할 수 있음을 보였다. 본 논문을 통하여 다음과 같은 결론을 도출하였다.

1) 모멘트일치법의 특징에 근거하여 고주파수 대역에 존재하는 관심주파수 영역에서 초기 시스템의 전달함수의 전개를 이용함으로써 낮은 차수의 축소모델로 고주파수 대역의 주파수응답함수를 효율적으로 계산할 수 있었다.

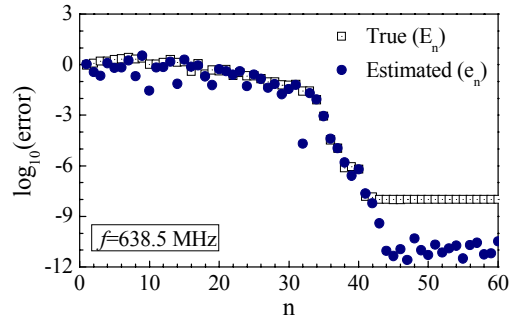
2) 이러한 유형의 문제에서도 오차지표를 이용함으로써 설계 및 해석에 요구되는 정확도를 설정

**Table 1** The optimum order of reduced system

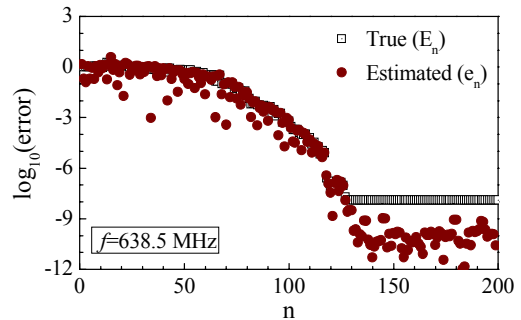
MEMS array	1×1	2×2	4×4	6×6
$f$ (MHz)	639.5	638.5	638.5	638.5
$\epsilon$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$
$n_{\min}$	6	36	109	179



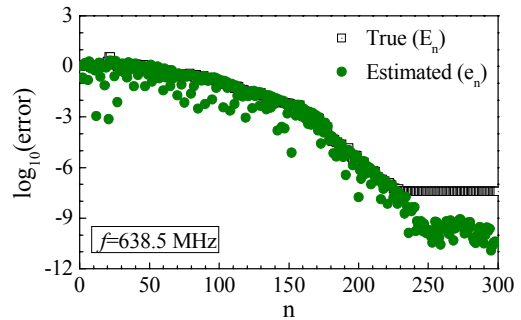
(a) 1×1 resonator



(b) 2×2 resonator



(c) 4×4 resonator



(d) 6×6 resonator

**Fig. 7** Comparison between true errors  $E_n(f)$  and estimated errors by the error indicator  $e_n(f)$

한 후, 이를 만족하는 최소 차수의 축소모델을 자동적으로 결정할 수 있음을 보였다.

3) 배열형 MEMS 공진기의 주파수응답함수에 오차지표를 도입한 모델차수축소법을 이용함으로써 향후 필요한 대역폭 및 통과대역의 향상을 위한 최적설계, 제작오차를 고려한 강건최적설계 등에 효율적으로 사용할 수 있을 것으로 판단된다.

## 후 기

이 논문은 2008학년도 안동대학교 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

## 참고문헌

- (1) Han, J. S., 2006, "Efficient Vibration Simulation Using Model Order Reduction," *Transactions of the KSME A*, Vol. 30, No. 3, pp. 310~317.
- (2) Han, J. S., 2007, "Eigenvalue and Frequency Response Analyses of a Hard Disk Drive Actuator Using Reduced Finite Element Models," *Transactions of the KSME A*, Vol. 31, No. 5, pp. 541~549.
- (3) Rudnyi, E. and Korvink, J., 2006, "Model Order Reduction for Large Scale Engineering Models Developed in ANSYS," *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 3732, pp. 349~356.
- (4) Su, T. J. and Craig, Jr. R. R., 1991, "Krylov Model Reduction Algorithm for Undamped Structural Dynamics Systems," *J. Guid. Control Dyn.*, Vol. 14, pp. 1311~1313.
- (5) Freund, R. W., 2000, "Krylov-Subspace Methods for Reduced-Order Modeling in Circuit Simulation," *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 123, pp. 395~421.
- (6) Han, J. S., Rudnyi, E. B. and Korvink, J. G., 2005, "Efficient Optimization of Transient Dynamic Problems in MEMS Devices Using Model Order Reduction," *J. Micromech. Microeng.*, Vol. 15, pp. 822~832.
- (7) Weinstein, D., Bhawe, S. A., Tada, M., Mitarai, S., Morita, S. and Ikeda, K., 2007, "Mechanical Coupling of 2D Resonator Arrays for MEMS Filter Applications," *IEEE International Frequency Control Symposium (FCS 2007)*, Geneva, Switzerland, pp. 1362~1365.
- (8) Xie, Y., Li, S. S., Lin, Y. W., Ren, Z. and Nguyen, C. T. C., 2003, "UHF Micromechanical Extensional Wine-Glass Mode Ring Resonators," *Technical Digest, IEEE International Electron Devices Meeting*, Washington, DC, pp. 953~956.
- (9) Weinstein, D., Chandralim, H., Cheow, L. F. and Bhawe, S.A., 2006, "Dielectrically Transduced Single-Ended to Differential MEMS Filter," *IEEE International Solid-State Circuits Conference (ISSCC 2006)*, pp. 1236~1243.
- (10) Shalaby, M., Abdelmoneum, M. and Saitou, K., 2006, "Design of Spring Coupling for High Q, High Frequency MEMS Filters," *Proceedings of IMECE2006, 2006 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, November 5~10, Chicago, Illinois, USA.
- (11) Bai, Z., Meerbergen, K. and Su, Y., 2005, "Arnoldi Methods for Structure-Preserving Dimension Reduction of Second-Order Dynamical Systems," *Springer Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Vol. 45, pp. 173~189.
- (12) Salimbahrami, B., Lohmann, B. and Eid, R., 2006, "Order Reduction of Second Order Systems with Proportional Damping," *Book of Abstracts for the Joint GAMM-SIAM Conference on Applied Linear Algebra*, July 24-27, Dusseldorf, Germany, pp. 168.
- (13) Bechtold, T., Rudnyi, E. B. and Korvink, J. G., 2005, "Error Indicators for Fully Automatic Extraction of Heat-Transfer Macromodels for MEMS," *J. Micromech. Microeng.*, Vol. 15, pp. 1205~1214.
- (14) ANSYS, 2007, *ANSYS Theory Reference 11.0*, SAS IP, Inc.
- (15) Wolfram Research, Inc., <http://www.wolfram.com>, 2008.