한국해안· 해양공학회 학술발표논문집 (2008)
2008년 9월 25일-9월 26일
제17권, pp. 160-163

# 임의의 반사율을 갖는 반무한 방파제에 사각(斜角)으로 입사하는 파의 산란
# Scattering of oblique wave by a semi-infinite breakwater with arbitrary reflectivity

서경덕[1], 박형성[2]
Kyung Duck Suh[1], Hyoung Seong Park[2]

## 1. 서　　론

방파제는 외해로부터 파랑을 막아 해안선 및 해안 구조물을 보호하기 위해 건설된다. 최근에는 환경보호와 방파제에 반사되는 파로 인한 주변을 지나는 선박의 안전문제도 중요한 문제로 인식되고 있으며 이를 고려한 다양한 형태의 방파제가 건설되고 있다. 그리고 이러한 새로운 방파제로 인한 파의 회절, 반사, 투과와 같은 파의 산란을 해석하기 위해서 다양한 연구가 진행되고 있다. 본 연구에서는 해석해의 방법으로 파의 산란에 대한 연구를 수행하였다.

파의 산란에 대한 해석해의 방법은 Penney & Price(1952)가 불투수성 반무한 방파제에 대해 처음 제시하였고, Yu(1995)와 McIver(1999)가 투수성 반무한 방파제에 대하여 각기 다른 방법으로 해석해를 유도하였다. 김한나(2007)는 방파제의 전면에 투수층이 있고 후면은 완전반사인 경우에 대한 해석해를 제안하였다.

본 연구에서는 전면과 후면에서 임의의 반사율을 갖는 방파제에 사각으로 입사하는 파의 산란에 대한 해석해를 제시하였다. Wiener - Hopf technique을 이용하여 해석해를 계산하였고 구한 해를 쉽게 그림으로 나타내기 위하여 Asymptotic approximation으로 유도하였다

## 2. 수학적 모델

### 2.1 해석해

Fig. 1에 묘사된 것처럼 직교 좌표계 (Cartesian coordinate system)를 사용하였으며, 수심이 $h$로 일정한 영역에 방파제는 $-\infty < x < 0$, $|y| < 0$, $-h < z < 0$에 놓여있다. 파장이 방파제의 두께 $b$보다 매우 크다고 가정하면 방파제의 두께는 무시할 수 있으며, 결국 방파제는 하나의 얇은 경계면으로 놓을 수 있다. $k$의 파수를 갖고 $x$축을 기준으로 $\Theta$의 각도로 입사파가 진행하며 이때의 $k$는 분산방정식을 통해 각 주파수 $\omega$와 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\omega/g = k tanh(kh) \tag{1}$$

여기서 $g$는 중력 가속도이다.

지배 방정식은 속도 포텐셜 $\widehat{\phi_T}(x,y,z)$에 대한 라플라스 방정식이다.

$$\frac{\partial^2 \widehat{\phi_T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widehat{\phi_T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \widehat{\phi_T}}{\partial z^2} = 0 \tag{2}$$

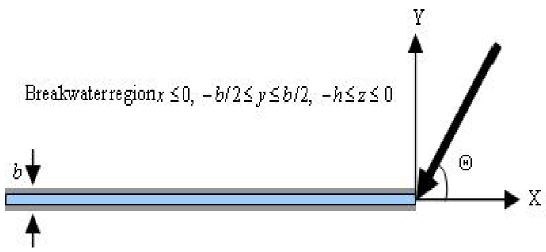



Fig.. 1. Definition sketch of wave motion around a semi – infinite breakwater with arbitrary reflectivity

1 서울대학교 건설환경공학부 교수
2 발표자: 서울대학교 건설환경공학부 연구원

방파제에서는 부분반사 경계조건을 사용하였다.

$$\widehat{\phi_T} = \pm i\delta\left(\partial\widehat{\phi_T}/\partial y\right) \text{ on } y=\pm 0,\ -\infty < x < 0 \quad (3)$$

여기서 $\delta$는 임의의 값으로 임의의 반사율을 의미한다.
자유수면에는 선형 경계조건식을 적용하였다.

$$\frac{\partial\widehat{\phi_T}}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g}\widehat{\phi_T} \text{ on } z=0 \quad (4)$$

바닥면 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial\widehat{\phi_T}}{\partial z} = 0 \text{ on } z=-h \quad (5)$$

만일 경계조건에서 Evanescent modes가 없다고 가정하면 속도포텐셜을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\widehat{\phi_T}(x,y,z) = \phi_t(x,y)\cosh(z+h) \quad (6)$$

식 (2.9)는 자유수면 경계조건과 바닥면 경계조건을 만족하므로 앞으로는 깊이에 관련된 항 ($\cosh(z+h)$)은 생략 할 것이다.
본 연구에 사용되는 입사파의 속도포텐셜은 다음과 같이 정의한다.

$$\phi_{i=}\exp(-ikx cos\Theta - iky sin\Theta) \quad (7)$$

그러면 전체의 속도 포텐셜은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi_t = \phi_i + \phi \quad (8)$$

여기서 $\phi$는 산란파의 속도 포텐셜이고, 다음의 Helmholtz 방정식의 해이다.

$$\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial y^2} + k^2\phi = 0 \quad (9)$$

$\phi$는 방파제 위에서 다음과 같은 경계조건을 만족한다.

$$\phi_t = \pm i\delta\frac{\partial\phi_t}{\partial y},\ y=\pm 0,\ -\infty < x < 0 \quad (10)$$

또한 $\phi$는 무한방사경계조건을 만족한다.

$$\lim_{kr\to\infty}(kr)^{1/2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r} - ik\phi\right) = 0 \quad (11)$$

여기서

$$r = \sqrt{x^2+y^2},\ i = \sqrt{-1} \quad (12)$$

이다.
이제 Wiener - Hopf Technique을 적용하는 과정은 다음과 같다. 식 (9)에 $x$에 대한 Fourier 변환을 적용시키면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2\Phi(\alpha,y)}{dy^2} - \gamma^2\Phi(\alpha,y) = 0 \quad (13)$$

여기서

$$\gamma = \left(\alpha^2 - k^2\right)^{1/2} \quad (14)$$

$\phi$의 Fourier 변환 $\Phi$는 다음과 같이 정의된다.

$$\Phi(\alpha,y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,y)e^{i\alpha x}dx \quad (15)$$

식 (14)는 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$\Phi(\alpha,y) = \Phi_+(\alpha,y) + \Phi_-(\alpha,y) \quad (16)$$

여기서

$$\Phi_+(\alpha,y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_0^{\infty}\phi(x,y)e^{i\alpha x}dx \quad (17)$$

$$\Phi_-(\alpha,y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{0}\phi(x,y)e^{i\alpha x}dx \quad (18)$$

식 (13)의 일반해는 다음과 같이 정의된다.

$$\Phi(\alpha,y) = \begin{cases} A(\alpha)\exp(-\gamma y), & (y \geq 0) \\ B(\alpha)\exp(\gamma y) & (y \leq 0) \end{cases} \quad (19)$$

방파제 위에서 ($y \cong 0$) 식 (19)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi_+(0) + \Phi_-(+0) = A(\alpha) \quad (20)$$

$$\Phi_+(0) + \Phi_-(-0) = B(\alpha) \quad (21)$$

식 (20)과 식 (21)을 $y$에 대해 한번 미분하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\Phi_+'(0)+\Phi_-'(+0)=-\gamma A(\alpha) \tag{22}$$
$$\Phi_+'(0)+\Phi_-'(-0)=\gamma B(\alpha) \tag{23}$$

식 (22)과 식 (23)에 식 (20)과 식 (21)을 각각 넣어서 $A(\alpha)$와 $B(\alpha)$를 제거하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\Phi_+'(0)+\Phi_-'(+0)=-\gamma\{\Phi_+(0)+\Phi_-(+0)\} \tag{24}$$
$$\Phi_+'(0)+\Phi_-'(-0)=\gamma\{\Phi_+(0)+\Phi_-(-0)\} \tag{25}$$

식 (9)을 식 (8)에 대입한 식을 Fourier 변환 하면 다음의 식을 얻는다.

$$-i(2\pi)^{-1/2}(1-\delta ksin\Theta)/(\alpha-kcos\Theta) \tag{26}$$
$$+\Phi_-(+0)-i\delta\Phi_-'(+0)=0$$
$$-i(2\pi)^{-1/2}(1+\delta ksin\Theta)/(\alpha-kcos\Theta) \tag{27}$$
$$+\Phi_-(-0)+i\delta\Phi_-'(-0)=0$$

이제 식 (24)과 식(25)에서 $\Phi_-(+0)$과 $\Phi_-(-0)$을 각각 제거하면 다음의 두 식을 구할 수 있다.

$$\Phi_+'(0)+\gamma\Phi_+(0)=-(1+i\delta\gamma)\Phi_-'(+0) \tag{28}$$
$$-i(2\pi)^{-1/2}\gamma(1-\delta ksin\Theta)(\alpha-kcos\Theta)^{-1}$$
$$\Phi_+'(0)-\gamma\Phi_+(0)=-(1+i\delta\gamma)\Phi_-'(-0) \tag{29}$$
$$+i(2\pi)^{-1/2}\gamma(1+\delta ksin\Theta)(\alpha-kcos\Theta)^{-1}$$

식 (28)과 식 (29)을 더하고 빼면 다음의 식을 각각 유도할 수 있다.

$$+:\ 2\Phi_+'(0)+(1+i\delta\gamma)\left(\Phi_-'(+0)+\Phi_-'(-0)\right)=\frac{2i\gamma(\delta k\sin\Theta)}{(2\pi)^{1/2}(\alpha-k\cos\Theta)} \tag{30}$$
$$-:\ 2\gamma\Phi_+(0)+(1+i\delta\gamma)\left(\Phi_-'(+0)-\Phi_-'(-0)\right)=-\frac{2i\gamma}{(2\pi)^{1/2}(\alpha-k\cos\Theta)} \tag{31}$$

식 (30)와 식 (31)을 Liouville's theorem을 이용하여 정리하면 다음의 식을 각각 얻는다.

$$\Phi_+'(0)=\frac{i(2\pi)^{-1/2}\gamma(\delta k\sin\Theta)}{(\alpha-k\cos\Theta)}\left(1-\frac{K_+(\alpha)}{K_+(kcos\Theta)}\right) \tag{32}$$

$$\Phi_+(0)=\frac{-i(2\pi)^{-1/2}}{(\alpha-k\cos\Theta)}\left(1-\frac{K_+(\alpha)}{K_+(kcos\Theta)}\right) \tag{33}$$

식 (30)에 식 (32)와 식 (33)의 $\Phi_+'(0)$, $\Phi_+(0)$를 각각 대입하고 정리하면 다음의 식을 얻게 된다.

$$\Phi_-'(+0)=-\frac{(1-\delta k\sin\Theta)}{1+i\delta\gamma}\left(\frac{i(2\pi)^{-1/2}\gamma}{\alpha-kcos\Theta}\right)\left(\frac{K_+(\alpha)}{K_+(kcos\Theta)}\right) \tag{34}$$

식 (31)를 같은 방법으로 정리하면 $\Phi_-'(-0)$에 대한 식을 얻을 수 있다.

$$\Phi_-'(-0)=\frac{(1+\delta k\sin\Theta)}{(1+i\delta\gamma)}\left(\frac{i\gamma(2\pi)^{-1/2}}{\alpha-kcos\Theta}\right)\left(\frac{K_+(\alpha)}{K_+(kcos\Theta)}\right) \tag{37}$$

이제 식 (22)와 식 (23)을 정리하면 $A(\alpha),B(\alpha)$를 구할 수 있다.

$$A(\alpha)=-\frac{i\delta k\sin\Theta\left(K_+(kcos\Theta)-K_+(\alpha)+K_+(\alpha)/K(\alpha)\right)}{(2\pi)^{-1/2}(\alpha-kcos\Theta)K_+(kcos\Theta)}+\frac{iK_+(\alpha)}{(2\pi)^{1/2}(\alpha-kcos\Theta)K_+(kcos\Theta)K(\alpha)} \tag{38}$$

$$B(\alpha)=\frac{i\delta k\sin\Theta\left(K_+(kcos\Theta)-K_+(\alpha)+K_+(\alpha)/K(\alpha)\right)}{(2\pi)^{1/2}(\alpha-kcos\Theta)K_+(kcos\Theta)}+\frac{iK_+(\alpha)}{(2\pi)^{1/2}(\alpha-kcos\Theta)K_+(kcos\Theta)K(\alpha)} \tag{39}$$

이제 식 (19)에 앞에서 구한 $A(\alpha)$, $B(\alpha)$를 넣고 역 Fourier변환 하면 $\phi$에 대한 해석해를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\phi(x,y)=&\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\alpha,y)e^{-i\alpha x}d\alpha\\&-sgn(y)i(2\pi)^{-1/2}\delta k\sin\Theta e^{-i\alpha x-\gamma|y|}\\&\times\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\{K_+(kcos\Theta)-K_+(\alpha)+K_+(\alpha)/K(\alpha)\}}{(2\pi)^{1/2}(\alpha-k\cos\Theta)K_+(kcos\Theta)}\right)d\alpha\\&+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{i(2\pi)K_+(\alpha)e^{-i}\alpha x-\gamma|y|}{(\alpha-k\cos\Theta)K_+(kcos\Theta)K(\alpha)}\right)d\alpha\end{aligned} \tag{40}$$

## 2.2 Asymptotic form

앞서 유도한 해석해의 적분항들은 Noble(1988, equation 1.71, 1.62, 1.65)의 방법을 사용하여 Asymptotic form으로 변환할 수 있다.

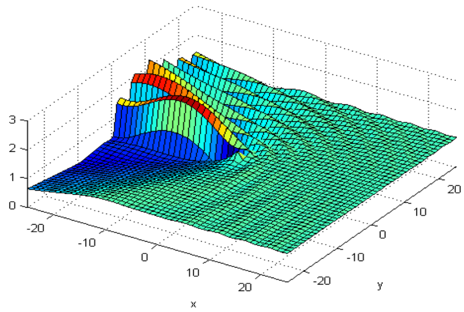
$$\begin{aligned}\phi(x,y)=&\frac{ie^{i(kr-\pi/4)}\sin\Theta(1-sgn(y)\delta k\sin\Theta)}{(2\pi kr)^{1/2}(1+\cos\Theta)^{1/2}(\cos\theta+\cos\Theta)K_+(kcos\theta)}\\&\times\left\{\frac{(1+\cos\theta)^{1/2}K_+(-kcos\theta)}{1+\delta k\sin|\theta|}-\frac{(1-\cos\Theta)^{1/2}K_+(kcos\Theta)}{1+\delta k\sin\Theta}\right\}\\&+\frac{sgn(y)ie^{i(kr-\pi/4)}\delta k\sin\theta\sin\Theta\{K_+(kcos\Theta)-K_+(-kcos\Theta)\}}{(2\pi kr)^{1/2}(\cos\theta+\cos\Theta)K_+(kcos\Theta)}\end{aligned}$$

$$
+\frac{ie^{i\pi/4}(1-sgn(y)\delta k\sin\Theta)}{\pi^{1/2}(1+\delta k\sin\Theta)}\times
\begin{Bmatrix} -e^{-ikr\cos(\theta-\Theta)}F[(2kr)^{1/2}\cos\frac{1}{2}(\theta-\Theta)] \\ +e^{-ikr\cos(\theta+\Theta)}F[(2kr)^{1/2}\cos\frac{1}{2}(\theta+\Theta)] \end{Bmatrix} \tag{41}
$$

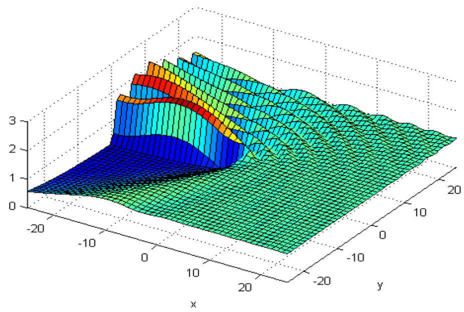
## 3. 결과 및 분석

### 3.1 해석해의 결과

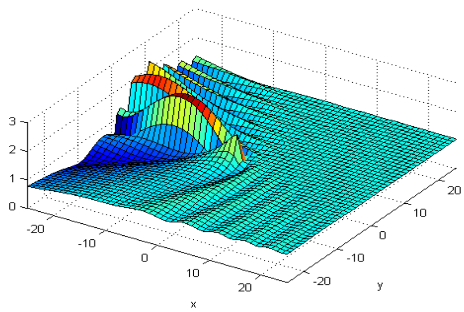
파고에 비례하는 값인 총 속도 포텐셜의 절대값 $|\phi_t|$를 MATLAB 프로그램을 사용하여 계산하였다. 주기를 10초로 하여 심해조건이라고 가정하였고, 파는 $\Theta=\pi/4$로 입사한다고 가정하였다.




(a) $\delta=0$




(b) $\delta=1$




(c) $\delta=3$

Fig. 2. Distribution of $|\phi_t|$ around tip of barrier

with $\Theta=\pi/4$

### 3.2 분석

입사각이 $\pi/4$일 때 전체적으로 파의 입사와 반사 그리고 회절의 경향성은 잘 표현되었다. 그러나 $\delta$값이 0에 가까우면 파의 산란을 잘 나타낸 반면에 $\delta$값이 점차 커질수록 방파제 후면에서 blow - up이 발생하였다.

## 4. 결　론

본 연구에서는 임의의 반사율을 갖는 방파제에 사각으로 입사하는 파가 산란되는 현상에 대해 해석해를 유도하였다. 속도포텐셜의 Laplace 방정식을 Wiener - Hopf Technique을 이용하여 해석해를 구하였다. 최종적으로 계산의 편의성을 위해 구해진 해석해를 Asymptotic form으로 유도하였다. 임의의 $\delta$값이 0에 가까운 값일 때는 결과가 잘 맞지만, 이 값이 커질수록 blow - up 현상이 발생하므로 $\delta$값이 작을 때(3보다 작을 때) 유효함을 알 수 있었다

## 감사의 글


본 연구는 한국해양수산진흥원의 해양한국발전프로그램(KSGP) 과제와 서울대학교 BK21 안전하고 지속가능한 사회기반 건설사업단의 지원 하에 수행되었습니다.


## 참고문헌


김한나. (2007). 투수성 전면 및 불투수성 후면을 갖는 반무한 방파제 또는 방파제 개구부에 의한 파의 산란. 석사학위논문, 서울대학교

Mathews, J. H, Howell, R. W. (2006). ComplexAnalysis,JonesandBartlett.

McIver, P. (1999). Water - Wave Diffraction by Thin Porous Breakwater. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 125(2), 66-70.

Noble, B. (1988). Method Based on the Wiener - Hopf Technique, Chelsea Publishing Company.