

진행파 근사에 의한 복합 계단지형에서의 파랑변형 Wave Transformation over Multi-step Bottom Geometry by Propagating Mode Approximation

서승남¹

Seung-Nam Seo¹

1. 서 론

복합 계단지형은 여러 개로 구성된 계단지형을 의미하며 두 개의 계단지형을 조합하면 Trench 지형을 만들 수 있다. 그러므로 Trench 지형은 복합 계단지형 가운데 가장 단순하고 Trench 지형 위를 지나가는 파랑변형을 다루기 위해 본 논문에서는 이를 구성하는 계단지형에 대한 해를 이용하여 Trench 지형에 의한 파랑변형을 재구성하고자 한다. 이러한 과정을 통해 복합 계단지형에서 이루어지는 파랑의 반사와 투과에 대한 현상학적 의미를 구체화할 수 있으며 본 방법을 복수 계단지형에 적용하면 이에 대한 파랑 변형과정도 쉽게 이해할 수 있다.

Trench 지형은 수심이 일정한 3개 구역으로 나눌 수 있고 각 구역에서는 고유함수 전개법으로 속도 포텐셜(ϕ)을 표현한 후 이에 포함된 미지상수는 경계에서의 정합조건, 입사조건 또는 방사조건을 부여하여 계산한다(Kirby and Dalrymple, 1983). 이 방법은 복수 계단지형과 같은 특수한 지형에 대한 파랑변형을 정확하게 계산할 수 있다. 본 논문에서는 진행파와 역류파를 동시에 고려한 해를 정밀해로, 진행파만에 의한 해는 근사해로 각각 지칭한다. 일반적으로 역류파의 개수가 많아지면 해의 정확도가 증가하나 해의 정확도는 지형과 파랑의 특성에 대한 함수이다.

본 논문에서는 복합 계단지형 위를 지나가는 파랑의 변화과정을 분석하는 데 초점을 맞추었기 때문에 가장 단순한 경우를 대상으로 한다. 즉 진행파만을 이용

하여 Trench 지형에서 진행되는 반사와 투과의 과정을 규명하기 위해 계단 지형에서의 반사율과 투과율을 구하고 이를 이용하여 Trench 지형에 대한 근사해를 구성한다. 본 연구의 근사해를 기존 연구결과의 정밀해 또는 근사해와 비교하였다. 계단 지형을 이용한 본 근사해는 연립방정식을 풀어 구하는 기존 연구의 근사해와 동일함을 밝힘으로써 본 연구의 근사해 구성과정이 올바름을 입증하였다. 마지막으로 본 연구의 기법을 이용하여 복합 계단지형에 대한 진행파만의 근사해를 구하는 방법을 간략히 기술하였다.

2. 고유함수 전개법

비압축성 유체의 비회전성 운동은 ϕ 를 정의할 수 있고 지배방정식은 Laplace 미분방정식으로 나타낼 수 있다. 해저면에 대한 경계조건은 해저면에 수직한 유속 성분이 0인 조건을 부여하고 해면에서는 운동학 조건과 동역학 조건을 결합한 경계조건을 사용한다. 그리고 측면에서는 방사조건과 정합조건을 사용한다. 방사조건은 정의구역 내에서 생성된 파랑은 정의구역 외측만으로 퍼져나가며 또한 한정된 크기를 가짐을 의미한다. 정합조건은 해석의 편의상 정의구역을 나누어 각 구역에서의 해를 구하기 때문에 구역의 경계면에서 파랑의 운동학 특성과 동역학 특성을 같게 부여함으로써 정의구역 내에서의 파랑운동을 매끄럽게 연결하기 위한 조건이다.

본 연구에서는 선형파에 관한 파랑변형을 대상으로 한다. 수평 y 방향에는 지형의 변화가 없다고 가정

¹ 발표자: 한국해양연구원 연안개발에너지연구부 책임연구원

하면 파랑의 y 방향 성분(e^{-iby})을 분리할 수 있다. 또한 각 주파수(ω)를 이용하여 시간 성분($e^{-i\omega t}$)도 분리한 ϕ 를 사용한다. 경계선은 수심이 변하는 모든 지점에 위치하며 경계선의 순번은 좌측 1번을 시작으로 우측방향으로 순차적으로 부여한다. 구역 번호는 우측 경계선 번호와 동일한 번호를 갖고 마지막 경계선 우측의 구역은 경계선 마지막 번호보다 1이 큰 번호를 갖는다. 복합 계단지형에서의 입사파랑은 구역 1에서만 존재하는 것으로 가정한다.

각 구역에서는 수심이 일정함으로 Laplace 미분방정식은 변수 분리법을 사용하여 상미분방정식으로 바꿀 수 있다. 그러면 연직방향(z 축)의 상미분식과 그 경계조건은 Strum-Liouville 미분식의 한 형태가 된다. 속도 포텐셜을 나타내기 위해 구역 i 에서 수심을 h_i , 진행파의 파수와 x 방향 성분을 k_{i0} 와 a_{i0} 로 각각 표기한다. 그리고 역류파의 개수는 무한개이나 계산상 n 개로 국한하며 m 번째 역류파의 파수와 x 방향 성분을 $k_{i,m}$ 와 $a_{i,m}$ 으로 각각 표기한다. 그러면 구역 i 에서의 속도 포텐셜은 Strum-Liouville 미분식으로부터 생성된 고유함수를 이용하여 식 (1)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_i = & p_i^+ \cosh k_{i0}(z+h_i) e^{ia_{i,0}x} \\ & + \sum_{m=1}^n s_{i,m}^+ \cos k_{i,m}(z+h_i) e^{-a_{i,m}(x-x_{i-1})} \\ & + p_i^- \cosh k_{i0}(z+h_i) e^{-ia_{i,0}x} \\ & + \sum_{m=1}^n s_{i,m}^- \cos k_{i,m}(z+h_i) e^{a_{i,m}(x-x_i)} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 p 와 s 는 각각 진행파와 역류파에 관한 미지상수이다. 구역 1에서는 식 (1) 우변 둘째 식이 존재하지 않고 첫째 식은 입사파에 대한 것으로 $p_1^+=1$ 로 설정한다. 마지막 구역에서는 셋째와 넷째 식이 존재하지 않는다.

첫 구역과 마지막 구역에서는 위에 기술한 바와 같이 방사조건이 적용되고 이들을 제외한 모든 구역에서는 정합조건이 부여된다. 경계선 x_i 에서의 정합조건은 식 (2)가 된다.

$$\begin{cases} \phi_i = \phi_{i+1} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial x} \end{cases} \quad (2)$$

여기서 첫 식은 동력학 정합조건으로 압력이 같음을 의미하고 둘째 식은 운동학 정합조건으로 경계면에서 x 방향 유속이 같음을 의미한다. 이 조건은 경계선 좌우의 수심이 보다 낮은 지점에서부터 정수면까지 모든 점에서 성립해야한다.

모든 구역에서 고유함수로 전개된 ϕ_i 를 관련 조건인 식 (2)에 대입하면 미지상수를 포함한 조건식이

만들어진다. 이들 조건식에서 식 (2)가 성립하는 구역 가운데 한 구역을 설정하여 그 구역의 모든 고유함수를 곱한 후 z 구간에 대해 적분하면 미지상수에 대한 연립방정식이 만들어진다. 이 과정은 고유함수의 직교성을 이용하는 것으로 형성된 연립방정식은 수치적으로 안정할 뿐만 아니라 역류파의 개수를 증가하면 엄밀해로 수렴하는 특성을 가진다.

이 연립방정식을 풀면 해를 얻게 된다. 만일 식 (1)에서 진행파와 역류파 모두를 구하게 되면 이는 정밀해가 되며 역류파를 무시하고 진행파만에 대한 연립방정식을 구성하여 해를 구하면 근사해가 된다. 지금까지 기술한 내용은 기존 연구결과를 요약한 것으로 새로운 내용이 없으나 다음 절에서 소개할 본 논문 기법의 결과와 비교하기 위한 기술하였다.

3. 계단 지형의 해를 이용한 기법

계단 지형의 경우에는 경계선이 하나만 존재함으로 식 (1)의 일부 식이 존재하지 않는다. 그리고 앞에서 기술한 바와 같이 파랑변형에 포함된 물리적 현상을 파악하는 데 초점을 두기 때문에 역류파를 무시하는 단순한 경우를 대상으로 한다. 즉 경계선 우측에서 파랑이 입사하는 경우에서 우변 둘째와 넷째 식이 존재하지 않고 $p_i^+=1$ 로 설정한다. 한편 경계선 좌측에서 파랑이 입사하면 우변 둘째와 넷째 식이 역시 존재하지 않고 $p_i^-=1$ 로 정한다.

계단 지형의 해를 이용하는 기법에서는 입사파랑은 해당 상수가 1인 경우에 대한 해를 토대로 이로부터 구한 미지상수를 이용하여 복합 계단지형의 해를 구성한다. 본 기법을 복합 계단지형 가운데 가장 단순한 Trench 지형에 우선 적용하기로 한다. 그리고 보다 복잡한 지형에 대한 적용은 간략하게 서술하기로 한다.

Trench 지형에서 첫 경계선은 $x_1=0$ 에 설정하고 두 번째 경계선 x_2 는 변수이다. 첫 경계선에서 좌측에서 입사하는 파랑에 의한 해는 식 (3)이, 우측 입사파랑에 의한 해는 식 (4)가 된다.

$$\begin{cases} T_1^+ = \frac{2a_{10}I_{12}I_{11}}{a_{10}(I_{12})^2 + a_{20}I_{11}I_{22}} \\ R_1^+ = \frac{a_{10}(I_{12})^2 - a_{20}I_{11}I_{22}}{a_{10}(I_{12})^2 + a_{20}I_{11}I_{22}} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} T_1^- = \frac{2a_{20}I_{12}I_{22}}{a_{10}(I_{12})^2 + a_{20}I_{11}I_{22}} \\ R_1^- = -\frac{a_{10}(I_{12})^2 - a_{20}I_{11}I_{22}}{a_{10}(I_{12})^2 + a_{20}I_{11}I_{22}} \end{cases} \quad (4)$$

여기서 T 는 입사파랑과 같은 방향으로 진행하는 파랑이고 R 은 입사파랑과 반대방향으로 진행하는 파랑을 의미하고 식 (1)에 존재하는 미지 상수에 해당한다. 그리고 첨자 1은 경계선 x_1 을 의미하고 식 (3)과 (4)의 첨자를 갖는 기호 I 와 e 는 식 (5)로 정의된다.

$$I_{ij} \equiv \int_{-h_i}^0 \cosh k_{i0}(z+h_i) \cosh k_{j0}(z+h_j) dz \quad (5)$$

$$e_i \equiv e^{i a_{i0} x_2}$$

경계선 x_2 에서 좌측으로부터 입사하는 파랑에 의한 식 (6)이 된다. 이 식에는 식 (5)에 정의된 e 가 나타나며 이는 경계선 x_1 로부터 x_2 까지의 위상이다.

$$\begin{cases} T_2 = \frac{2a_{20}I_{22}I_{32}}{a_{20}I_{22}I_{33} + a_{30}(I_{32})^2} \frac{e_2}{e_3} \\ R_2 = \frac{[a_{20}I_{22}I_{33} - a_{30}(I_{32})^2](e_2)^2}{a_{20}I_{22}I_{33} + a_{30}(I_{32})^2} \end{cases} \quad (6)$$

Trench 지형에서 입사파랑은 구역 1의 좌측에만 존재하고 이 파랑이 구역 2을 만나면 파랑에

너지의 일부가 반사(R_1^+)되고 나머지는 구역 2쪽으로 투과(T_1^+)된다. 이 투과된 파랑은 구역 3을 만나기 전까지 에너지는 변하지 않으나 구역 3을 만나면 일부 에너지가 구역 2쪽으로 재반사($T_1^+R_2$)되고 나머지 에너지는 구역 3쪽으로 투과($T_1^+T_2$)된다. 구역 2쪽으로 재반사된 파랑이 구역 1을 만나면 에너지 일부가 구역 1쪽으로 투과($T_1^+R_2T_1^-$)되고 나머지 에너지는 구역 2쪽으로 재반사($T_1^+R_2R_1^-$)된다. 구역 2쪽으로 재반사된 파랑은 위의 방식으로 반사와 투과과정을 Trench 내에서 반복하며 반사된 에너지가 0이 될 때까지 계속된다. 식 (3)-(5)에 정의된 반사파와 투과파는 위상을 포함하는 복소수이다.

위 과정을 Table 1에 정리하였고 구역 1에서 좌측으로 진행하는 모든 파랑의 크기의 합이 반사율이며 구역 3의 우측으로 진행하는 모든 파랑의 크기의 합에 $\cosh k_{30}h_3/\cosh k_{10}h_1$ 을 곱한 값이 투과율이 된다.

Table 1. Reflected and transmitted waves by different incident waves at boundary x_i .

순번	입사파	반사파	투과파	x_i
1	1	R_1^+		x_1
2	T_1^+		$T_1^+T_2$	x_2
3	$T_1^+R_2$	$T_1^+R_2T_1^-$		x_1
4	$T_1^+R_2R_1^-$		$T_1^+R_2R_1^-T_2$	x_2
5	$T_1^+R_2R_1^-R_2$	$T_1^+R_2R_1^-R_2T_1^-$		x_1
6	$T_1^+R_2R_1^-R_2R_1^-$		$T_1^+R_2R_1^-R_2R_1^-T_2$	x_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Table 1에서 반사파의 합(R)과 투과파의 합(T)을 각각 구하면 이들은 식 (7)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} R &= R_1^+ + T_1^+R_2T_1^- + T_1^+R_2R_1^-R_2T_1^- + \dots \\ &= R_1^+ + T_1^+R_2T_1^- [1 + R_2R_1^- + (R_2R_1^-)^2 + \dots] \\ &= R_1^+ + \frac{T_1^+R_2T_1^-}{1 - R_2R_1^-} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} T &= T_1^+T_2 + T_1^+R_2R_1^-T_2 + T_1^+(R_2R_1^-)^2T_2 + \dots \\ &= T_1^+T_2 [1 + R_2R_1^- + (R_2R_1^-)^2 + \dots] \\ &= \frac{T_1^+T_2}{1 - R_2R_1^-} \end{aligned}$$

식 (7)에서 무한급수는 비율 $R_2R_1^-$ 의 기하급수의 합에 대한 식을 이용하면 최종 식은 아주 간단하게 된다. 무엇보다 중요한 점은 식 (7)의 결과는 앞 절에서 연립방정식을 풀어 계산한 근사해와 일치함을 보일

수 있다. 따라서 Trench 지형 위를 지나는 파랑의 변형은 식 (7)의 유도에 포함된 각 계단 지형의 해를 조합함으로써 나타낼 수 있으며 이는 실제 현상의 과정을 이해하는 데 매우 효과적이다. 본 기법은 Mei(1989)에 서술되었을 뿐 본 연구와 같이 수식에 의한 입증과정은 기술되지 않았다.

만일 Trench 지형에 다른 계단 지형이 붙게 되는 경우의 해를 구하기로 한다. 우선 각 구역에서 크기 1인 입사파에 대한 반사파와 투과파를 먼저 계산한다. 그리고 각 경계선에서 위와 같은 방법으로 단계별 반사파와 투과파를 계산하여 구역 1에서 좌측으로 진행하는 모든 파랑의 합과 구역 4에서 우측으로 진행하는 모든 파랑의 합을 구하면 반사율과 투과율을 계산할 수 있다.

5. 결 론

복합 계단지형 위를 지나는 파랑의 변형은 수심이 변하는 경계에서 반사와 투과가 복합적으로 일어나는 과정을 거친다. 이러한 현상을 규명하기 위해 본 연구에서는 선형 파랑의 변형만을 대상으로 하였고 이 경우에는 해의 중첩이 가능하다. 복합 계단지형 가운데 가장 단순한 Trench를 대상으로 이를 구성하는 계단지형의 해를 구해 이를 조합함으로써 Trench 지형에 의해 변형된 파랑의 반사율과 투과율을 계산하였다. 본 계산은 진행과 성분에 대한 근사해로 이 결과는 연립방정식을 이용한 기존 연구의 근사해와 일치함을 보였다.

본 기법은 기존 연구에 비해 해를 구하는 과정이 복잡하나 Trench 지형 위를 지나는 파랑의 반사와 투과과정을 명확하게 설명할 수 있다. 이 기법은 복합 계단지형의 파랑변형에도 적용할 수 있으며 이에 대한 해를 구하는 과정은 본 기법을 확장·적용하면 된다.

감사의 글

본 연구는 한국해양연구원의 기본연구사업인 “연안 국지 해일 정밀예보 지원체제 현업화 기술” 과 “해상파랑 관측 및 조사” 연구에서 수행된 결과의 일부이며 연구비 지원에 감사를 드립니다.

참고문헌

- Kirby, T.K. and Dalrymple, R.A. (1983). Propagation of obliquely incident water waves over a trench. *J. Fluid Mech.*, 133, 47-63.
- Mei, C.C. (1989). *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*. World Scientific, Singapore.

4. 수치실험

제 2절과 3절에 기술한 방법을 좌우 대칭인 Trench 지형에 적용하여 반사율과 투과율을 계산하였다. 대상 지형은 Kirby and Dalrymple(1983)이 제시한 예와 같으며 $h_2/h_1=1$, $h_3/h_1=3$, $x_2/h_1=10$ 이고 입사각은 45° 이다. 계산 결과는 Fig. 1에 나타내었고 점선은 식 (7)로 계산한 진행과 근사해이고 실선은 제 2절의 역류과 10개 항을 이용하여 계산한 정밀해의 결과이다.

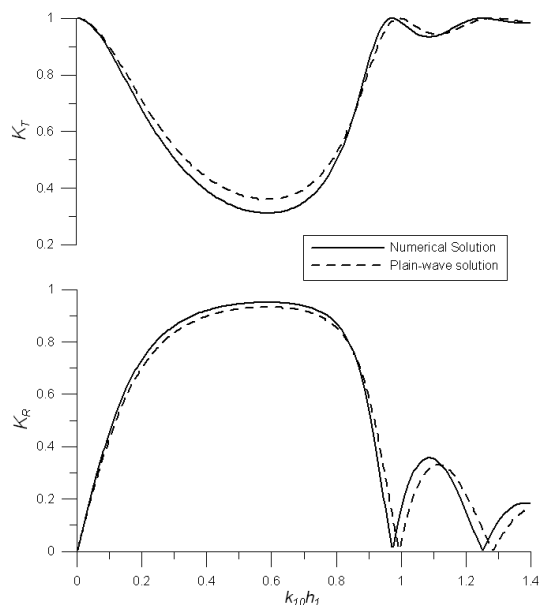


Fig. 1. Computed reflection and transmission coefficient for incident angle 45° over a symmetric trench; $h_2/h_1=1$, $h_3/h_1=3$, $x_2/h_1=10$.

이 경우 본 계산 결과인 정밀해(numerical solution)와 근사해(plain-wave solution)는 기존 결과와 동일하며 근사해는 정밀해에 비해 큰 차이를 보이지 않는다. 그 이유로는 Trench 폭이 Trench에서의 수심에 비해 비교적 커서 양측 경계선에서의 역류과의 영향이 작기 때문인 것으로 분석된다. 그리고 근사해의 결과는 정밀해에 비해 반사율 최저점의 위치가 이동됨을 알 수 있고 이는 진행파의 에너지 일부가 역류파로 이동된 것으로 판단된다.