

비선형 강성을 갖는 접시스프링의 진동해석

Study of Vibration of the Disc Spring with Non-linear Stiffness

임희곤* · 이정윤† · 박상길** · 오재웅***

Heegon Lim, Jung Youn Lee, Sang-Gil Park, Jae-Eung Oh

Key Words : Disc Spring (접시스프링), Non-linear Vibration (비선형 진동), Transfer Function (전달함수)

1. 서론

스프링의 종류는 다양하며 그에 따른 분류 방법 또한 다양하다. 이중 접시 스프링은 1867년 'Belleville'가 프랑스에서 국제 특허를 받았으며, 특정분야 적용 시 매우 비선형의 힘-처짐 특성을 갖는다. 기존의 스프링은 선형성으로 비교적 쉽게 해석할 수 있었지만 이와 같은 접시 스프링은 그렇지 않기 때문에 해석이 쉽지 않았다. 따라서 이번 연구를 통하여 비선형 강성을 갖는 접시스프링의 진동 해석을 하는데 목적이 있다.

2. 이론

Fig. 1에 접시스프링의 모양을 나타내었다. 두께 t 와 원추 높이를 h_0 를 가진 원추형으로 D_e/D_i 의 비와 h/t 의 비에 따라 비선형의 강성을 갖는다.

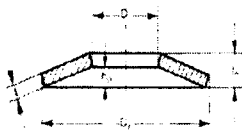


Fig. 1 Feature of the Disc Spring

2.1 접시스프링의 스프링 상수

접시스프링의 스프링 상수는 다음과 같다.

$$k(x) = \left(\frac{h_0}{t^2} + \frac{1}{h_0} \right) \cdot x - \left(\frac{1.5}{t^2} \right) \cdot x^2 + \left(\frac{1}{2h_0 t^2} \right) \cdot x^3 \quad (1)$$

(1)식으로부터 접시스프링은 비선형 강성을 갖고 있음을 알 수 있다.

2.2 운동방정식

감쇠가 있고 주기적으로 가진되는 접시스프링의 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x) = F\cos\omega t \quad (2)$$

2.3 정적 처짐을 고려한 운동 방정식

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \left(\frac{h_0}{t^2} + \frac{1}{h_0} - \frac{1.5}{t^2} \times 2\delta_s + 3\delta_s^2 \right) \cdot x - \left(\frac{1.5}{t^2} - 3\delta_s \right) \cdot x^2 + \left(\frac{1}{2h_0 t^2} \right) \cdot x^3 = F\cos\omega t \quad (3)$$

여기서 δ_s 는 질량에 의한 스프링의 초기 처짐이다.

3. 수치 해석

비선형성 강성을 갖는 접시 스프링의 전달 함수를 구하기 위해 Runge-Kutta 방법을 이용하였다. 여기서 사용한 접시 스프링의 제원은 $D_e = 50\text{mm}$, $D_i = 25.4\text{mm}$, $t = 1.25\text{mm}$, $h_0 = 1.6\text{mm}$ 이며 직렬로 200개를 연결하였으며 질량은 스프링의 정적 처짐을 고려해 120kg으로 하였다. 접시스프링의 비선형성을 검토하기 위하여 힘은 $F = 50, 30, 10\text{N}$ 으로 하였고 감쇠비는 $\zeta = 0.03, 0.1, 0.2$ 로 하였으며 초기 조건은 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ 하였다.

† 교신저자: 경기대학교 기계시스템공학부
E-mail : jylee@kgu.ac.kr
Tel : (031) 249-9811, Fax : (031) 244-6300

* 경기대학교 대학원 기계공학과

** 한양대학교 대학원 기계공학과

*** 한양대학교 기계공학부

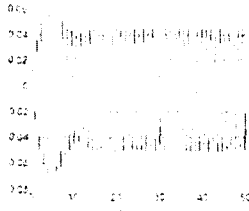


Fig. 2 Displacement and velocity vs time

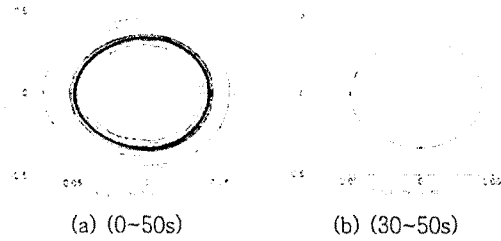


Fig. 3 Phase plane

Fig. 2는 시간에 따른 변위를 나타낸 그림으로 초기에는 transient 구간으로 불안정하지만 시간이 지날수록 안정화를 알 수 있었고 비선형 강성으로 인해 upper 부분과 lower 부분의 크기가 다를 수 있었다.

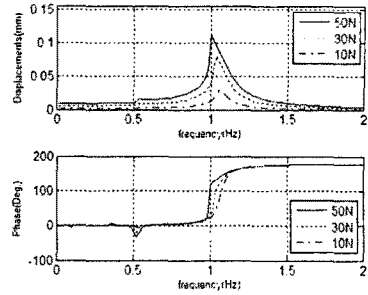
Fig. 3(a)는 0초에서 50초까지의 변위와 속도 선도이며 Fig. 3(b)는 시간 30 sec 이후의 선도로 안정화 된 것을 보다 쉽게 확인 할 수 있었다.

Fig. 4은 $\zeta = 0.03, 0.1, 0.2$ 일 때 힘 F 변화에 따른 전달 함수를 그린 그림으로 스프링이 안정화 구간에서 최대치와 시간을 구하여 위상을 나타내었다. 비선형 강성으로 인해 0.5Hz 부근에서 크기와 위상이 조금 변화하였으며 하중 증가에 따라 고유 진동수가 작어짐을 확인 할 수 있었고 ζ 가 증가함에 따라 진폭이 작아지는 현상은 선형시스템과 유사하였다.

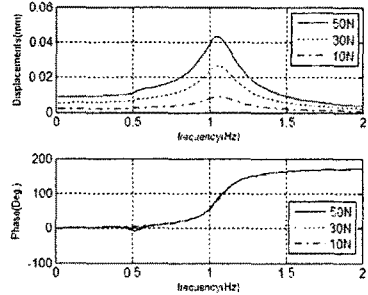
Fig. 5(a)는 $F = 50\text{N}$, $\zeta = 0.03$ 인 경우 가진 주파수 $\omega = 0.96\text{Hz}$ 를 0초에서 50초 까지 $\omega = 0.98\text{Hz}$ 를 50초에서 100초 까지 가진 시켰을 때의 시간에 따른 응답을 그린 그림으로 $\omega = 0.98\text{Hz}$ 일 때의 최대 변위가 -0.0698m 이다. Fig. 5(b)는 같은 조건에서 가진 주파수 $\omega = 1.00\text{Hz}$ 를 0초에서 50초 까지 $\omega = 0.98\text{Hz}$ 를 50초에서 100초 까지 가진 시켰을 때의 시간에 따른 응답을 그린 그림으로 $\omega = 0.98\text{Hz}$ 일 때의 최대 변위가 -0.188m 이다. 같은 가진 주파수 $\omega = 0.98\text{Hz}$ 에서 응답이 다른 이유는 강성에 비선형 항이 있어 도약 현상이 일어났기 때문이다.

Fig. 6은 $F = 50\text{N}$, $\zeta = 0.03$ 인 경우 주파수를 forward sweeping으로 가진 시킨 경우와 backward sweeping으로 가진 시킨 경우의 전달함수를 나타낸 것으로 고유 진동수 부근에서 전형적인 비선형 스프링에서 나타는 도약현상

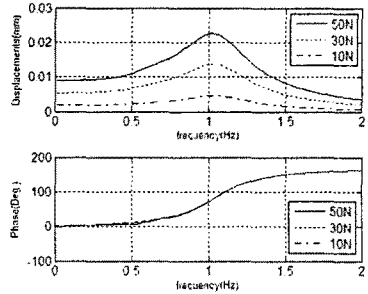
이 발생하였다.



(a) $\zeta = 0.03$



(b) $\zeta = 0.1$



(c) $\zeta = 0.2$

Fig. 4 Transfer function of the disc spring

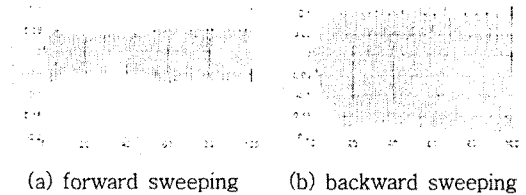


Fig. 5 Displacement vs time according to the sweeping methods

참 고 문 헌

- (1) Daniel J. Inman, 2005, ENGINEERING VIBRATION, Prentice-Hall, Inc
- (2) Cyril M. Harris, 1961, Shock and Vibration Handbook
- (3) KEY BELLEVILLE, 2005, ENGINEERING HANDBOOK, INC
- (4) Carrella A., Brennan M. J. and Waters T. P., 2008, "Forced Transmissibility of a Nonlinear Vibration Isolator with HSLDS" ENOC-2008, Saint Petersburg, Russia.

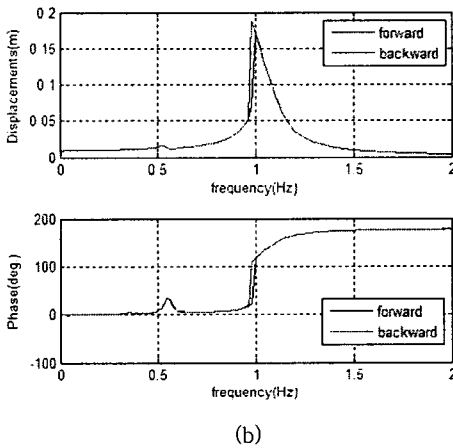
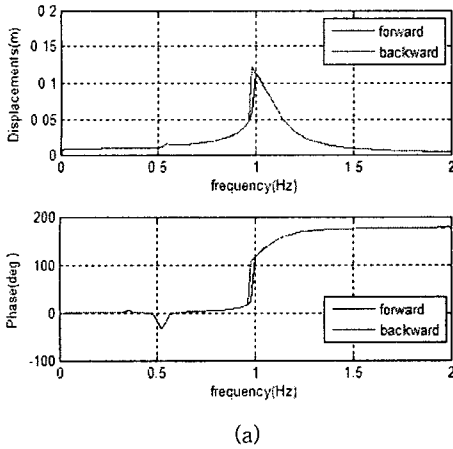


Fig. 6 Transfer function according to the sweeping methods

4. 결 론

비선형 강성을 갖는 접시스프링의 진동해석을 하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

- (1) 접시스프링의 운동방정식을 Runge-Kutta 방법을 이용하여 응답을 구한 결과 시간이 지날수록 변위가 안정화됨을 확인하였다.
- (2) 가진에 대한 응답으로부터 전달함수의 크기와 위상을 구하는 방법을 제시하였다.
- (3) 고유진동수 부근에서 전형적인 비선형 진동에서 보이는 도약현상이 나타남을 알 수 있었다.