

# 부분적으로 유체가 채워진 사각형 탱크의 고유진동 해석

## Free Vibration Analysis of a Partially Liquid-filled Rectangular Tank

정경훈† · 이규만\* · 김태완\*\*

Kyeong-Hoon Jeong, Gyu-Mahn Lee and Tae-Wan Kim

### 1. 서론

유체와 접하는 단일 사각평판 또는 이중평판의 고유진동 해석에 대한 연구는 최근까지 몇몇 연구자들이 수행했다. 하지만 지금까지 사각형으로 이루어진 탱크에 유체가 부분적으로 채워진 경우에 대한 동특성 연구가 매우 드물다. 따라서 본 논문은 사각탱크 내부에 유체가 부분적으로 채워진 경우에 대하여 고유진동 해석이론을 유도하고 유한요소 해석으로 이론을 검증하고자 한다.

### 2. 이론전개

#### 1.1 2.1 공기중 고유진동수

Fig. 1은 유체와 부분적으로 접하고 있는 양단이고 정된 사각탱크의 형상을 보여주고 있다. 부분적으로 유체와 접하는 사각형 탱크의 동적변위인  $w(x, y, t)$ 는 Fig. 2에 나타난 사각평판으로 모사하고 사각탱크의 모서리는 단순지지된 평판으로 간주할 수 있다. 그리고 접수변위는 공기중 변위  $W_{mn}(x, y)$ 과 미정계수  $q_{(m,n)}$ 의 조합으로 나타낼 수 있다. 그런데 탱크의 마주보는 평판의 상대변위에 따라서 동위상-동위상 모드(I-I mode), 동위상-역위상 모드(I-O mode), 역위상-동위상 모드(O-I mode), 역위상-역위상 모드(O-O mode)로 나눌 수 있다.

$$w(\xi, z, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{(m,n)} W_{mn}(\xi, z) \exp(i\omega t) \quad (1)$$

공기중 사각평판의 변위는 허용함수인 직교다항식의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$W_{mn}(\xi, z) = H_m(\xi) F_n(z) \quad (2)$$

그런데 직교다항식은 사각탱크의 경계조건을 만족

하는 허용함수를 Gram-Schmidt process [6]로부터 유도할 수 있다. 미정계수  $q_{(m,n)}$ 을 식(3)과 같이 벡터로 나타낼 때 사각평판의 1/4에 해당되는 기준 운동에너지  $T^*$ 는 식(4)로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{q} = \{q_{(1,1)} \ q_{(1,2)} \ \dots \ q_{(1,N)} \ q_{(2,1)} \ q_{(2,2)} \ \dots \ q_{(M,N)}\}^T \quad (3)$$

$$T^* = \frac{\rho h}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{Z} \mathbf{q} \quad (4)$$

여기서  $\rho$ 는 사각탱크의 밀도를 나타내고 행렬  $\mathbf{Z}$ 는 식(5)로 나타낸다.

$$\mathbf{Z} = \int_0^b \int_0^a W_{mn} W_{jk} \, dx \, dy \quad (5)$$

그리고 사각탱크의 1/4에 해당되는 최대변형에너지는 식(6)으로 나타낸다.

$$V = \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ \left[ \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_{jk}}{\partial x^2} \right] + \left[ \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_{jk}}{\partial y^2} \right] + \mu \left[ \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_{jk}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_{jk}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2} \right] + 2(1-\mu) \left[ \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_{jk}}{\partial x \partial y} \right] \right\} dx \, dy \quad (6)$$

여기서 사각평판의 강성도는  $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ 이고,  $\mu$ 와  $E$ 는 평판의 Poisson비와 탄성계수를 나타낸다. 식(6)에 식(1)과 (2)를 대입하면 식(7)을 얻는다.

$$V = \frac{D}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{U} \mathbf{q} \quad (7)$$

식(7)의 행렬  $\mathbf{U}$ 는 식(6)에 따라 각각의 허용함수를 미분하고 구간별 적분을 통해서 구해진다. 따라서 식(8)로부터 공기중 사각탱크의 고유진동수와 모드형상을 얻는다.

$$D \mathbf{U} \mathbf{q} - \omega^2 \rho h \mathbf{Z} \mathbf{q} = 0 \quad (8)$$

† 정경훈; 한국원자력연구원  
E-mail : khjeong@kaeri.re.kr  
Tel : (042) 868-8792

\* 한국원자력연구원  
\*\* 한국원자력연구원

## 2.2 유체의 변위포텐셜 (Displacement Potential)

이상유체의 Laplace 방정식과 경계조건을 만족하는 O-O 모드에 대한 변위포텐셜은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} R_{rs} \cosh(\alpha_{rs} x) \cos(\beta_s y) \cos(\lambda_r z) \\ & + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} G_{rs} \cos(\tau_s x) \cosh(\sigma_{rs} y) \cos(\lambda_r z) \quad (9) \end{aligned}$$

여기서  $R_{rs}$ ,  $G_{rs}$ 는 미정계수이고,

$$\begin{aligned} \beta_s &= \frac{2(s-1)\pi}{c}, \quad \tau_s = \frac{2(s-1)\pi}{b}, \quad \lambda_r = \frac{(2r-1)\pi}{2d}, \\ \alpha_{rs} &= \sqrt{\beta_s^2 + \lambda_r^2}, \quad \sigma_{rs} = \sqrt{\tau_s^2 + \lambda_r^2}, \quad s, r = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (10\sim 14)$$

O-I 모드, I-O 모드 및 I-I 모드에 대해서도 유사한 식을 얻을 수 있다. 한편 유체와 접하는 사각탱크의 변위는 접하는 유체의 수직방향 변위와 동일해야 하기 때문에 O-O 모드에 대하여 식(15)와 (16)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{(m,n)} W_{mn}(\xi, z) = \partial\phi(x, c/2, z) / \partial y \\ \text{for } 0 \leq z \leq d \text{ and } 0 \leq \xi < b/2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{(m,n)} W_{mn}(\xi, z) = \partial\phi(b/2, y, z) / \partial x \\ \text{for } 0 \leq z \leq d \text{ and } b/2 \leq \xi \leq (b+c)/2. \end{aligned} \quad (16)$$

식(2)와 식(9)를 식(15)와 식(16)에 대입한 후에 유한 푸리에 변환(finite Fourier transform)을 하면 O-O 모드에 대한 유체의 변위포텐셜을 얻을 수 있다. O-I 모드, I-O 모드 및 I-I 모드에 대해서도 유사한 식을 얻을 수 있다.

## 2.3 접수 사각탱크의 고유진동수

O-O 모드에 대한 유체의 기준 운동에너지는 유체의 운동에너지를  $\omega^2$ 로 나눈 값이므로, 다음 식과 같이 적분을 통해서 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} T_o^* = & -\frac{1}{2} \rho_o \sum_{u=1}^M \sum_{v=1}^N \int_0^{b/2} \int_0^d W_{uv} q_{(u,v)} \phi(x, c/2, z) dx dz \\ & -\frac{1}{2} \rho_o \sum_{u=1}^M \sum_{v=1}^N \int_0^{c/2} \int_0^d W_{uv} q_{(u,v)} \phi(b/2, y, z) dy dz. \end{aligned} \quad (17)$$

여기서  $\rho_o$ 는 유체의 밀도를 나타낸다. 식(17)에 식(2)와 식(15)와 식(16)에서 얻은 변위포텐셜을 대입하면 식(18)을 얻는다.

$$\begin{aligned} T_o^* = & \frac{2\rho_o}{d} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{u=1}^M \sum_{v=1}^N \sum_{r=1}^{\infty} \left[ \frac{\Omega_{ml} \Theta_{ur} \Lambda_{nr} \Lambda_{vr}}{(\alpha_{rl} c) \sinh(\alpha_{rl} b/2)} \right. \\ & + \frac{2\Omega_{ms} (-1)^{s+1} \Theta_{urs} \Lambda_{nr} \Lambda_{vr}}{(\alpha_{rs} c) \sinh(\alpha_{rs} b/2)} + \frac{\Gamma_{ml} \Gamma_{ul} \Lambda_{nr} \Lambda_{vr}}{(\sigma_{rl} b) \tanh(\sigma_{rl} c/2)} \\ & + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{2\Gamma_{ms} \Gamma_{us} \Lambda_{nr} \Lambda_{vr}}{(\sigma_{rs} b) \tanh(\sigma_{rs} c/2)} + \frac{\Omega_{ml} \Omega_{ul} \Lambda_{nr} \Lambda_{vr}}{(\alpha_{rl} c) \tanh(\alpha_{rl} b/2)} \\ & + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{2\Omega_{ms} \Omega_{us} \Lambda_{nr} \Lambda_{vr}}{(\alpha_{rs} c) \tanh(\alpha_{rs} b/2)} + \frac{\Gamma_{ml} \Psi_{ur} \Lambda_{nr} \Lambda_{vr}}{(\sigma_{rl} b) \sinh(\sigma_{rl} c/2)} \\ & \left. + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{2\Gamma_{ms} \Psi_{urs} (-1)^{s+1} \Lambda_{nr} \Lambda_{vr}}{(\sigma_{rs} b) \sinh(\sigma_{rs} c/2)} \right] q_{(m,n)} q_{(u,v)} \\ = & \rho_o q^T \mathbf{G} q \end{aligned} \quad (18)$$

여기서  $\Gamma_{ms}$ ,  $\Lambda_{nr}$ ,  $\Psi_{urs}$ ,  $\Theta_{urs}$ 와  $\Omega_{ms}$ 는 적분과정에서 얻게 되는 계수다. 2.1절에서 유도했던 동일한 Rayleigh-Ritz 방법으로 식(19)의 접수 사각탱크에 대한 고유치 방정식을 얻게 된다. O-I 모드, I-O 모드 및 I-I 모드에 대해서도 유사한 식을 얻을 수 있다. 식(19)로부터 접수 사각탱크의 고유진동수와 모드형상을 얻는다.

$$DUq - \omega^2 \{ \rho h Z + \rho_o G \} q = 0 \quad (19)$$

## 3. 계산예 및 고찰

### 3.1 유한요소 해석모델

양단이 고정된 사각탱크에 부분적으로 유체가 채워진 구조물의 고유진동수와 모드형상을 식(19)의 행렬식으로부터 구할 수 있다. 제시된 이론적인 해석방법의 타당성을 확인하기 위하여 상용 유한요소 해석 코드인 ANSYS (release 10)를 이용하여 3차원 유한요소 해석모델을 만들었다. 해석에 사용된 사각형 탱크는 알루미늄 재질이며, 크기는 폭 240mm, 가로 300mm 이고 높이 360mm 이며 두께는 3mm 다. 사각탱크 및 유체의 물성치는 다음과 같다: 사각탱크의 탄성계수 = 69.0GPa, Poisson 비=0.3, 밀도=2700 kg/m<sup>3</sup>. 사각탱크와 접하는 유체는 물로서 밀도가 1000kg/m<sup>3</sup>이다. 사각탱크의 상하 가장자리는 고정되었다고 가정하였다.

### 3.2 이론의 검증 및 결과

Table 1 과 2 는 상용 ANSYS Code 를 이용한 유

한요소 해석결과와 이론해석 결과를 보여주고 있다. 이론계산을 수행할 때, 범용 수학계산용 소프트웨어인 Math-CAD (2000 년판)을 사용하여 이론값의 고유진동수를 구하였다. 공기중 탱크에 대한 고유진동수 계산 및 유한요소 해석결과는 Table 1에 나타나있는데 2% 오차범위 안에서 매우 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 50% 수위의 물과 접촉하는 사각탱크의 이론해석 및 유한요소해석 결과가 Table 2에 나타나 있는데, 7개의 저차 모드 고유진동수를 비교한 결과, 이론치와 유한요소해석 결과가 10% 오차범위 이내에서 일치하고 있음을 확인하였다. 따라서 유한요소 해석결과와 이론해석 결과를 비교해 볼 때, 제시된 이론의 타당성은 확보되었다고 판단된다.

#### 4. 결론

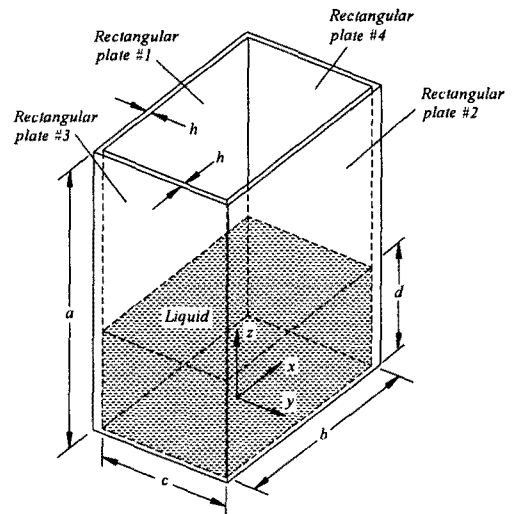
본 논문은 유체가 부분적으로 채워진 사각탱크에 대하여 고유진동수를 구하는 해석방법을 제시하였다. 이 해석방법의 타당성을 확인하기 위하여 고유진동수를 이론적으로 구하고 상용컴퓨터 유한요소 해석코드로 검증하였다. 계산결과를 통해서 이론값의 고유진동수와 유한요소 계산결과로 얻은 고유진동수가 잘 일치하고 있음을 확인하였다.

**Table 1** Natural frequencies of the clamped dry rectangular tank

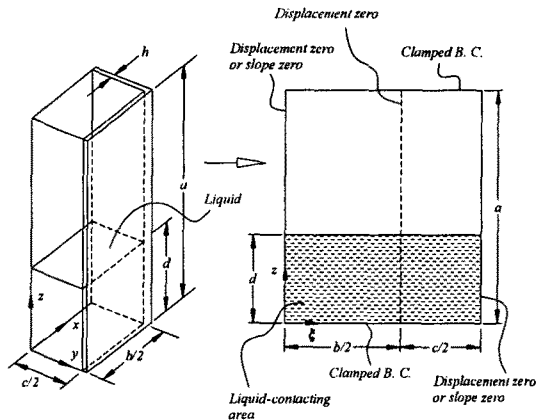
Mode No.	Mode shape	Natural frequency (Hz)		Discrepancy (%)
		Theory	ANSYS	
1	O-O	193.6	193.5	0.05
2	I-O	214.0	213.4	0.28
3	O-I	263.2	262.4	0.30
4	O-O	301.7	301.3	0.13
5	O-O	419.8	419.6	0.05
6	I-O	429.4	429.0	0.09
7	I-I	454.9	446.0	2.00

**Table 2** Natural frequencies of the wet tank filled with water (water level  $d = 180$  mm)

Mode No.	Mode shape	Natural frequency (Hz)		Discrepancy (%)
		Theory	ANSYS	
1	O-O	93.2	92.9	0.32
2	I-O	107.4	104.3	2.97
3	O-O	124.5	120.9	2.98
4	O-I	118.1	128.6	-8.16
5	O-I	219.9	225.2	-2.35
6	I-I	215.9	233.0	-7.34
7	O-O	279.8	276.1	1.34



**Fig. 1** A flexible rectangular tank partially filled with a liquid.



**Fig. 2** Theoretical model of a partially water-filled rectangular tank ( $a = 360$ mm,  $b = 300$  mm,  $c = 240$ mm,  $h = 3$ mm).