

## 시간 지연을 가지는 이산 시간 비선형 상호 결합 시스템의 분산 퍼지 출력 궤환 제어기 설계

구근범\*, 주영훈\*\*, 박진배\*

\*연세대학교 전기전자공학과, \*\*군산대학교 전자정보공학부

### Decentralized fuzzy output feedback controller for discrete time nonlinear interconnected system with time delay

Geun Bum Koo\*, Young Hoon Joo\*\* and Jin Bae Park\*

\*Department of Electrical and Electronic Engineering, Yonsei University

\*\*School of Electronic and Information Engineering, Kunsan National University

**Abstract** - 본 논문은 시간 지연을 가지는 이산 시간 비선형 상호 결합 시스템의 분산 퍼지 출력 궤환 제어기의 설계에 대해 연구한다. T-S (Takagi-Sugeno) 퍼지 모델 기법을 이용하여 퍼지 상호 결합 시스템을 구한다. 이를 바탕으로 분산 퍼지 출력 궤환 제어기를 설계하고, 페루프 시스템의 안정도 충분 조건을 선형 행렬 부등식 (LMI)의 형태로 나타낸다. 설계된 이득값을 통하여 상호 결합 시스템이 안정화됨을 모의실험을 통하여 보인다.

는 퍼지 시스템의 소속함수로써 0과 1사이의 값을 가진다.

위의 퍼지 시스템을 제어하기 위해서 다음과 같은 퍼지 출력 궤환 제어기를 설계한다.

$$u_i(t) = \sum_{k=1}^n \mu_{ik}(z_i(t)) K_{ik} y_i(t) \quad (3)$$

식 (3)을 식 (2)에 대입하면 분산 퍼지 출력 궤환 제어기를 포함한 이산 시간 퍼지 상호 결합 시스템을 구할 수 있다.

$$x_i(t+1) = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \mu_{ik}(z_i(t)) \mu_m(z_i(t)) \times ((A_{ik} + B_{ik} K_{im} C_i) x_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ijk} x_j(t - \tau_{ij})) \quad (4)$$

본 논문에서는 페루프 시스템 (4)의 안정도 조건을 구하고, 구한 안정도 조건을 통하여 이득 행렬  $K_{ik}$ 을 구하는 것이다. 상호 결합 시스템의 특성상 안정도 조건을 구하는 것은 매우 어렵다. 뿐만 아니라, 시간 지연의 문제까지 포함하고 있다. 이러한 문제를 해결하면서 안정도 조건을 구하는 방법은 다음 장에서 설명한다.

#### 2.2 안정도 조건을 위한 선형 행렬 부등식 유도

상호 결합 시스템의 안정도 조건을 통하여 이득 행렬을 구하기 위해서는 안정도 조건을 선형 행렬 부등식으로 나타내야 한다. 이를 위해서는 적절한 Lyapunov 함수를 정의해야 한다.

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^n (x_i^T(t) P_i x_i(t) + \sum_{j=1, l=k-\tau_j}^{k-1} (x_j(l))^T ( \sum_{l=k-\tau_j}^{k-1} x_j(l) )) \quad (5)$$

여기서  $P_i$ 는 양한정 행렬로  $V(x(t))$ 는 양수의 값을 가지는 것을 알 수 있다. 만약 Lyapunov 함수의 변화율이 음수 값을 가지는 조건을 구함으로써 안정화 조건을 구할 수 있다. 이를 위해서는 다음과 같은 보조 정리가 필요하다.

**보조 정리 1 [6]** 적합한 차원의 어떤 상수 대칭 행렬  $N, O, L$ 이 주어졌을 때 다음의 두 개의 부등식은 서로 필요충분조건이 된다:

$$O > 0, N + L^T O L < 0 \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} N & L^T \\ L & -O^{-1} \end{bmatrix} < 0 \text{ or } \begin{bmatrix} -O^{-1} & L^T \\ L & N \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

**정리 1** 만약 다음의 선형 행렬 부등식 (8)과 특정한 조건 (9)를 만족하는 양한정 행렬  $Q$ 이 존재하게 되면, 분산 퍼지 출력 궤환 제어기를 포함한 시간 지연을 가지는 비선형 상호 결합 시스템은 점근적으로 안정하게 된다,

$$\begin{bmatrix} -Q_i & * & \cdots & \cdots & * & * & * \\ 0 & -I & * & & & * & * \\ & 0 & & & & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & & & * & \\ \vdots & & & \ddots & & * & \vdots \\ 0 & & & & * & -I & * \\ \Phi_{ikm} & A_{i1k} & \cdots & A_{i,i-1,k} & A_{i,i+1,k} & \cdots & A_{ink} - Q_i & * \\ Q_i & 0 & \cdots & \cdots & & & 0 & -\alpha I \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

### 1. 서 론

산업이 고도로 발전할수록 시스템은 더욱 거대해지고, 시스템 간의 상호 영향도 늘어나고 있다. 이러한 복잡하고 거대한 시스템을 효과적으로 해석하고 제어하기 위해서 많은 연구가들이 상호 결합 시스템에 관심을 가지게 되었다. 상호 결합 시스템을 효과적으로 제어하기 위해서는 분산 (decentralized) 제어가 필수적이다. 하지만 분산 제어는 상호 결합을 고려하면서도 각 하위시스템을 제어하는 방식이기 때문에, 제어기를 설계하는 것에는 많은 어려움이 따른다. 특히나 비선형 상호 결합 시스템의 경우 분산 제어를 설계하는 것은 매우 어렵다. 여러 연구가들이 이러한 비선형성의 문제를 해결하기 위해서 퍼지를 사용하였다 [1-5]. Tseng는 비선형 상호 결합 시스템의 퍼지 모델링을 구하고, 분산 퍼지 제어기를 설계하였다 [1]. Wang은 시간 지연이 있는 비선형 상호 결합 시스템에 대한 제어를 설계하였다 [5]. 이에, 본 논문에서는 아직까지 연구되지 않은 시간 지연을 가지는 이산 시간 비선형 상호 결합 시스템의 분산 퍼지 출력 궤환 제어기에 대하여 연구한다.

T-S (Takagi-Sugeno) 퍼지 모델 기법을 이용하여 시간 지연을 가지는 이산 시간 비선형 상호 결합 시스템을 퍼지 시스템으로 모델링한다. 그리고 모델링된 시스템을 바탕으로 분산 퍼지 출력 궤환 제어기를 설계한다. 제어기의 이득값을 구하기 위해서 페루프 시스템의 안정도 충분 조건을 구한다.

### 2. 본 론

#### 2.1 이산 시간 상호 결합 시스템 및 분산 퍼지 출력 궤환 제어기

$n$ 개의 하위 시스템으로 구성된 이산 시간의 비선형 상호 결합 시스템은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_i(t+1) = f_i(x_i(t)) + g_i(u_i(t)) + \sum_{j=1, j \neq i}^n f_{ij}(x_j(t - \tau_{ij}))$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t) \quad (1)$$

여기서  $f_i(\cdot)$ 와  $g_i(\cdot)$ 는 각각  $i$  번째 하위 시스템의 상태변수와 입력으로 이루어진 비선형 함수이고,  $f_{ij}(\cdot)$ 는  $j$  번째 하위 시스템과의 상호 결합적 특성을 나타내는 비선형 함수이다.  $\tau_{ij}$ 는 시간 지연을 나타내는 상수로 양수의 값을 가지고 있다. 선형 출력 행렬  $C_i$ 는 계산상의 편의를 위해 선행계수라고 가정한다.

주어진 이산 시간 비선형 상호 결합 시스템의 퍼지 모델링을 위하여 T-S 퍼지 모델 기법을 도입한다. 이를 통해 얻은 T-S 퍼지 규칙은 비퍼지화를 통해 다음과 같은 T-S 퍼지 시스템으로 나타내어진다.

$$x_i(t+1) = \sum_{k=1}^n \mu_{ik}(z_i(t)) (A_{ik} x_i(t) + B_{ik} u_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ijk} x_j(t - \tau_{ij}))$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t) \quad (2)$$

여기서  $A_{ik}, B_{ik}, A_{ijk}$ 는 적절한 크기를 가지는 선형 행렬이고,  $\mu_k(\cdot)$

그리고

$$C_i Q_i = M_i C_i \quad (9)$$

여기서

$$\Phi_{ikm} = A_{ik} Q_i + B_{ik} N_{im} C_i$$

$$N_{im} = K_{im} M_i$$

$$\alpha = (n-1)^{-1}$$

이고, \*는 행렬에서의 전칭요소를 의미한다. 그리고 분산 퍼지 출력 제한 제어기의 제어 이득 행렬은 다음을 통해 구할 수 있다.

$$K_{ik} = N_{ik} \{ C_i Q_i C_i^T (C_i C_i^T)^{-1} \}^{-1} \quad (10)$$

### 3. 모의실험

논문에 대한 내용을 검증하기 위해서 다음과 같은 3개의 하위 시스템을 가지는 이산 시간 비선형 상호 결합 시스템을 고려한다.

$$x_i(t+1) = \sum_{k=1}^3 \mu_{ik}(x_i(t)) (A_{ik} x_i(t) + B_{ik} u_i(k) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n A_{ijk} x_j(t - \tau_{ij}))$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t)$$

여기서,  $x_1 = [x_{11}, x_{12}]^T$ ,  $x_2 = [x_{21}, x_{22}]^T$ ,  $x_3 = [x_{31}, x_{32}]^T$  이고, 시스템 행렬은 각각 다음과 같이 이루어져 있다.

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0 & 0.42 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad B_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{121} = A_{122} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{131} = A_{132} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.4 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.2 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{211} = A_{212} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{231} = A_{232} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{32} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad B_{31} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_{32} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{311} = A_{312} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad A_{321} = A_{322} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = [1 \ 1]$$

또한 각 하위 시스템의 소속 함수는 다음과 같다.

$$\mu_{11}(x_{11}(t)) = \exp[-2x_{11}^2(t)], \quad \mu_{12}(x_{11}(t)) = 1 - \mu_{11}(x_{11}(t)),$$

$$\mu_{21}(x_{21}(t)) = \frac{1}{1 + \exp[-x_{21}(t)]}, \quad \mu_{22}(x_{21}(t)) = 1 - \mu_{21}(x_{21}(t)),$$

$$\mu_{31}(x_{31}(t)) = \frac{1}{1 + \exp[-2x_{31}(t)]}, \quad \mu_{32}(x_{31}(t)) = 1 - \mu_{31}(x_{31}(t))$$

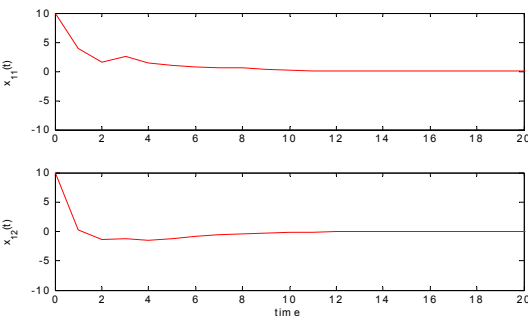
선형 행렬 부등식을 이용하여 이득값을 구하면

$$K_{11} = [-0.5520], \quad K_{12} = [-0.3839],$$

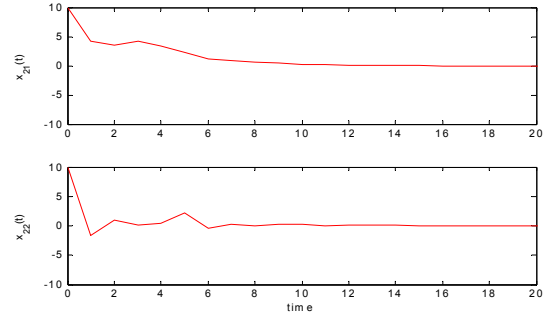
$$K_{21} = [-0.2860], \quad K_{22} = [-0.2757],$$

$$K_{31} = [-0.2505], \quad K_{32} = [0.0413]$$

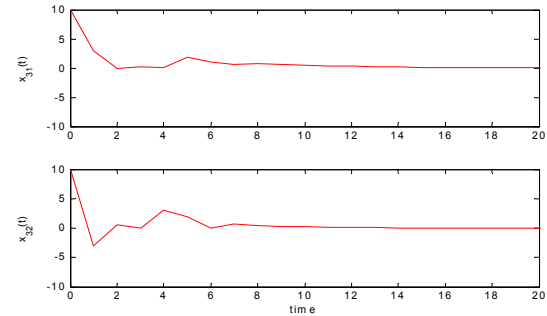
그림 1,2,3은 모의실험의 결과로 각 하위 시스템의 상태변수를 나타내고 있다. 상태 변수들이 모두 0으로 가는 것을 통하여 상호 결합 시스템이 안정화됨을 알 수 있다. 이를 통해, 우리는 시간 지연을 가지는 이산 시간 비선형 상호 결합 시스템에 대한 분산 퍼지 출력 제한 제어기의 성능을 살펴 볼 수 있다.



<그림 1> 첫 번째 하위 시스템의 상태 변수



<그림 2> 두 번째 하위 시스템의 상태 변수



<그림 3> 세 번째 하위 시스템의 상태 변수

### 3. 결 론

본 논문에서는 시간 지연을 가지는 이산 시간 비선형 상호 결합 시스템의 분산 퍼지 출력 제한 제어를 설계하였다. 상호 결합 시스템에 분산 제어를 통해 제어가 가능함을 보였고, 제어기의 설계 문제는 제약 조건이 있는 선형 행렬 부등식을 통하여 해결하였다. 또한, 선형 행렬 부등식의 해가 존재할 경우, 비선형 상호 결합 시스템이 안정화됨을 증명하였다. 결국, 분산 퍼지 출력 제한 제어를 이용하여 시간 지연이 있는 이산 시간 비선형 상호 결합 시스템이 제어가 가능함을 보였고, 모의실험을 통하여 그 우수성을 증명하였다.

감사의 글 : 이 논문은 2008년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음.

본 연구는 산업자원부 전력기반조성사업 센터의 고급인력양성사업을 통한 연세 대학교 계통적용 신전력기기 연구센터의 지원으로 수행되었습니다.

### [참 고 문 헌]

- [1] C. S. Tseng, "H<sub>∞</sub> Decentralized Fuzzy Model Reference Tracking Control Design for Nonlinear Interconnected Systems", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 9, No. 6, pp. 795-809, 2001.
- [2] C. W. Chen, "Stability analysis of T-S fuzzy model for nonlinear multiple time-delay interconnected systems", Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 66, pp. 523-537, 2004.
- [3] F. H. Hsiao, "T-S fuzzy controllers for nonlinear interconnected systems with multiple time delays", IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 52, No. 9, pp. 1883-1893, 2005.
- [4] S. W. Kau, "Robust H<sub>∞</sub> fuzzy static output feedback control of T-S fuzzy systems with parametric uncertainties", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 158, No. 2, pp. 135-146, 2007.
- [5] R. J. Wang, "Nonlinear decentralized state feedback controller for uncertain fuzzy time-delay interconnected systems", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 151, pp. 194-204, 2005.
- [6] L. Xie, "Output feedback control of systems with parameter uncertainties", International Journal of Control, Vol. 63, No. 4, pp. 741-750, 1996.