

이산 MJLS(Markov Jump Linear System)를 이용한 네트워크 제어시스템 해석

정준홍*, 이재호**, 박태동**, 박기현**

한전KDN(주) 전력IT연구원*, 성균관대학교 정보통신공학부**

Analysis of a Networked Control System using the Discrete-Time MJLS(Markov Jump Linear System)

Joon-Hong Jung*, Jae-Ho Lee**, Tae-Dong Park**, Ki-Heon Park**
R&D Department, Korea Electric Power Data Network Co., Ltd.*
Information and Communication Eng., Sungkyunkwan Univ.**

Abstract - This paper deals with the stability analysis method of a networked control system using the discrete-time MJLS(Markov Jump Linear System). The necessary and sufficient conditions for the mean stability and mean square stability of a networked control system having data uncertainties are proposed. The numerical example is presented to illustrate the usefulness of proposed stability conditions.

1. 서 론

네트워크 제어시스템은 피드백 경로가 네트워크를 통해 구성된 제어 시스템으로 정의할 수 있으며, 제어시스템 구축에 필요한 다수의 배선을 공유 매체로 통합함으로써 시스템의 물리적 크기나 무게를 감소시키고 유지·보수에 필요한 시간 및 비용을 절감할 뿐만 아니라 유연한 확장성을 제공하는 등의 장점을 지닌다[1],[2]. 반면, 네트워크의 고유 성질인 데이터 전송의 불확실성은 네트워크 제어시스템의 설계 및 분석을 어렵게 하는 가장 큰 문제이며, 최근 이 같은 문제점의 해결 방안으로 MJLS(Markov jump linear system)를 적용하는 연구가 활발히 진행되고 있다.

본 논문에서는 데이터의 전송 불확실성에 의해 변하는 네트워크 제어 시스템의 안정성을 분석하기 위해 이산 MJLS 해석 방법을 적용하고자 한다. 본문에서는 이산 MJLS의 정의 및 안정성에 대하여 살펴보고, 데이터 전송 불확실성을 포함하는 네트워크 제어시스템을 이산 MJLS 형태의 등가 모델로 변환한다. 이후, 이산 MJLS의 안정성 정의를 유도된 모델에 적용함으로써 네트워크 제어시스템의 안정성을 판별할 수 있는 필요충분조건을 제시하고, 시뮬레이션을 통해 그 효용을 입증한다.

2. 본 론

2.1 이산 MJLS

JLS(jump linear system)는 Krasovskii 와 Lidskii에 의해 1960년대부터 연구되기 시작했으며, 확률공간에서 이산 JLS는 식(1)과 같이 나타낼 수 있다[3],[4].

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) \\ y(k) &= C_{\theta(k)}x(k) + D_{\theta(k)}u(k) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $A_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $D_{\theta(k)} \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $k = 0, 1, \dots, \infty$, $x_0 := x(0) \in \mathbb{R}^n$

식(1)에서 $A_{\theta(k)}$, $B_{\theta(k)}$, $C_{\theta(k)}$, $D_{\theta(k)}$ 는 이산 확률프로세스 $\{\theta(k)\} = \{\theta(0), \theta(1), \dots, \theta(\infty)\}$ 의 함수이고 $\{\theta(k)\}$ 가 유한 모드 $N = \{1, 2, \dots, N\}$ 를 갖는 Markov 체인일 때, 이를 이산 MJLS라 한다[3]~[8].

전이확률(transition probability) p_{ij} 는 $\{\theta(k)\}$ 의 모드가 i 에서 j 로 변할 확률로 정의된다.

$$p_{ij} := Pr\{\theta(k+1) = j \mid \theta(k) = i\} \geq 0 \quad (2)$$

여기서, $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$, $\forall i, j \in N$

$\{\theta(k)\}$ 의 확률 분포(state probability distribution) $v(k)$ 는 $\{\theta(k)\}$ 가 $\{1, 2, \dots, N\}$ 중에서 어떤 모드가 될 것인가에 대한 확률을 의미하며, (i, j) 번째 행렬 요소가 식(2)의 p_{ij} 로 주어진 $N \times N$ 크기의 전이확률행렬 $P(k)$ (transition probability matrix)로 표현할 수 있다.

$$v(k+1) = v(k)P(k) \quad (3)$$

여기서, $v(k) = \{v_1(k), v_2(k), \dots, v_N(k)\}$, $\forall k = 1, 2, \dots, \infty$, $\theta(k)$ 의 초기 분포확률 $v_0 := v(0) = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, $0 \leq v_i(k) \leq 1$: k 번째 시각에서 i 번째 상태가 될 확률

$p_{ij}(k)$ 와 $p_{ij}(k-1)$ 이 같을 때, 이를 동차 Markov 체인(homogeneous Markov chain)이라 하며, 이 경우 전이확률행렬은 상수행렬이 된다.

$$\begin{aligned} P &= \{p_{ij}\} = Pr\{\theta(k+1) = j \mid \theta(k) = i\} \\ &= Pr\{\theta(k) = j \mid \theta(k-1) = i\} \end{aligned} \quad (4)$$

이산 MJLS에서의 Markov 체인은 일반적으로 식(4)와 같은 동차 Markov 체인을 의미한다[3]~[7]. 이와 같은 이산 MJLS는 네트워크 제어시스템의 데이터 손실, 확률적으로 변하는 시간지연 등을 다룰 수 있는 적합한 모델이라 알려져 있다[1],[3].

2.2 이산 MJLS의 안정성

식(1)로 나타낸 이산 JLS의 확률프로세스 $\theta(k)$ 가 $N = \{1, 2, \dots, N\}$ 의 유한 모드를 갖는 동차 Markov 체인이고 이의 전이확률행렬이 식(4)와 같이 주어졌다고 하자. 시스템이 $\theta(k) = i$, $i = \{1, 2, \dots, N\}$ 인 모드에 있을 때, 식(1)을 아래와 같은 MJLS로 나타낸다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_i x(k) + B_i u(k) \\ y(k) &= C_i x(k) + D_i u(k) \end{aligned} \quad (5)$$

정의 1 [3]~[5],[7] 외부입력 $u(k) \equiv 0$ 이고 모든 주어진 초기값 x_0, v_0 에 대하여 식(5)의 MJLS는

- $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{\|x(k)\| \mid x_0, v_0\} = 0$ 이면, 평균안정(MS, mean stable) 하다.
- $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{\|x(k)\|^2 \mid x_0, v_0\} = 0$ 이면, 평균제곱안정(MSS, mean square stable) 하다.
- $\sum_{k=0}^{\infty} E\{\|x(k)\|^2 \mid x_0, v_0\} < \infty$ 이면(즉, $\|x(k)\|_2 < \infty$), 확률안정(SS, stochastically stable) 하다.
- 모든 $k \geq 0$ 에 대하여, $E\{\|x(k)\|^2 \mid x_0, v_0\} < \beta \alpha^k \|x_0\|^2$ 를 만족하는 상수 $0 < \alpha < 1$ 및 $\beta > 0$ 가 존재하면, 지수적 평균제곱안정(EMSS, exponentially mean square stable) 하다.
- $Pr\{\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k)\| = 0\} = 1$ 이면, AS안정(almost surely stable) 하다.
(단, $\|x(k)\|_2^2 := \sum_{k=0}^{\infty} E\{x(k)^T x(k)\}$)

정의 1.1)은 참고문헌 [4]에서 $(\theta, 1)$ 안정으로 표현하고 있으며, 정의 1.2), 1.3), 1.4)는 참고문헌 [4]에서 $(\theta, 2)$ 안정 또는 참고문헌 [3],[7]에서 SM(second moment) 안정으로 통칭하고 있다. 여기서, 모든 시스템 행렬 $\{A_i\}$ 가 안정할 조건은 SM안정하기 위한 조건과 연관이 없으며, 식(5)의 MJLS가 SM안정하면 항상 AS안정이 보장된다[3],[7].

2.3 안정성 분석

네트워크 제어시스템의 일반적인 모델은 참고문헌 [1],[2]에서 찾아볼 수 있으며, 본 논문에서는 센서 경로 및 구동기 경로가 단일화된 모델을

고려한다. 이는 네트워크 제어시스템의 대역폭, 시간지연, 데이터 손실 등에 의한 성능변화를 분석하는데 적합한 모델로 알려져 있다[1].

각 경로의 데이터 전송 및 손실을 각각 스위치의 닫힘과 열림으로 표현하면, 네트워크 제어시스템과 등가인 시스템을 식(6)과 같이 유도할 수 있다[2]. 여기서, 플랜트 상태방정식은 $\{A_1, B_1, C_1, D_1 \equiv 0\}$, 제어기 상태방정식은 $\{A_2, B_2, C_2, D_2\}$, 구동기 경로의 최대 시간지연은 τ_1 , 센서 경로의 최대 시간지연은 τ_2 이다.

$$\begin{aligned} x_t(k+1) &= \Phi_s x_t(k) + \Gamma_s w(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{C}_p & 0 \end{bmatrix} x_t(k) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, $s=1,2,3,4$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & 0 & -\bar{B}_2 \bar{C}_1 & 0 \\ \bar{C}_2 & 0 & -\bar{D}_2 \bar{C}_1 & 0 \\ \bar{B}_1 \bar{C}_2 & 0 & \bar{A}_1 - \bar{B}_1 \bar{D}_2 \bar{C}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_1 & 0 \end{bmatrix}, \Phi_2 = \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & 0 & 0 & -\bar{B}_2 \\ \bar{C}_2 & 0 & 0 & -\bar{D}_2 \\ \bar{B}_1 \bar{C}_2 & 0 & \bar{A}_1 & -\bar{B}_1 \bar{D}_2 \\ 0 & 0 & \bar{C}_1 & I_m \end{bmatrix}$$

$$\Phi_3 = \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & 0 & -\bar{B}_2 \bar{C}_1 & 0 \\ 0 & I_k & 0 & 0 \\ 0 & \bar{B}_1 & \bar{A}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_1 & 0 \end{bmatrix}, \Phi_4 = \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & 0 & 0 & -\bar{B}_2 \\ 0 & I_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \begin{bmatrix} \bar{B}_2 \\ \bar{D}_2 \\ \bar{B}_1 \bar{D}_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \Gamma_3 = \Gamma_4 = \begin{bmatrix} \bar{B}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{A}_j = \begin{bmatrix} e^{A_j h} \int_{h-\tau_j}^h e^{A_j s} B_j ds \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_j = \begin{bmatrix} \int_0^{h-\tau_j} e^{A_j s} B_j ds \\ I \end{bmatrix}, \bar{C}_j = [C_j \quad 0], \bar{D}_2 = D_2, j=1,2$$

식(6)에서 $s=1$ 은 모든 경로에서 데이터가 전송되었을 때, $s=2$ 은 센서 경로에서 데이터가 손실되었을 때, $s=3$ 은 구동기 경로에서 데이터가 손실되었을 때, $s=4$ 은 모든 경로에서 데이터가 손실되었을 때를 나타낸다.

정리 1 센서 경로의 데이터 전송 성공률을 r_s , 구동기 경로의 데이터 전송 성공률을 r_a 라 하면, 식(6)으로 표현된 네트워크 제어시스템이,

1) 평균안정하기 위한 필요충분조건은 식(7)이 성립하는 것이다.

$$\rho \left\{ \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & 0 & -r_s \bar{B}_2 \bar{C}_1 & -\bar{r}_s \bar{B}_2 \\ r_a \bar{C}_2 & \bar{r}_a I & -r_s r_a \bar{D}_2 \bar{C}_1 & -\bar{r}_s r_a \bar{D}_2 \\ r_a \bar{B}_1 \bar{C}_2 & r_s \bar{r}_a \bar{B}_1 & \bar{A}_1 - r_s r_a \bar{B}_1 \bar{D}_2 \bar{C}_1 & -\bar{r}_s r_a \bar{B}_1 \bar{D}_2 \\ 0 & 0 & (r_s + r_a - r_s r_a) \bar{C}_1 & \bar{r}_s I \end{bmatrix} \right\} < 1 \quad (7)$$

여기서, $\rho\{\cdot\}$: spectral radius, $\bar{r}_s := 1 - r_s$, $\bar{r}_a := 1 - r_a$

2) 평균제곱안정하기 위한 필요충분조건은 식(8)이 성립하는 것이다.

$$\rho \left\{ \sum_{j=1}^4 p_j \cdot (\Phi_j \otimes \Phi_j) \right\} < 1 \quad (8)$$

여기서, $(A \otimes B)$: 행렬 A 와 B 의 크로네커 곱

$$p_1 := r_s r_a, p_2 := \bar{r}_s r_a, p_3 := r_s \bar{r}_a, p_4 := \bar{r}_s \bar{r}_a$$

증명: 식(6)은 각 경로의 데이터 전송 및 실패에 의해 확률적으로 변하는 시스템으로, $\{\theta(k)\} = \{1, 2, 3, 4\} (k=0,1,\dots,\infty)$ 의 4가지 유한 모드를 갖는 이산 확률프로세스라 할 수 있으며, 이때의 천이확률행렬 P 는 모든 행백터가 $p = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ 로 이루어진 IID(independent and identically distributed)[3],[5],[7] 형태의 MJLS이다. 이제, 식(6)의 각 모드에 대한 시스템 행렬과 참고문헌 [3]~[5],[7],[8]의 안정성 정리를 적용하면 정리 1의 증명이 가능하다. ■

3. 시뮬레이션

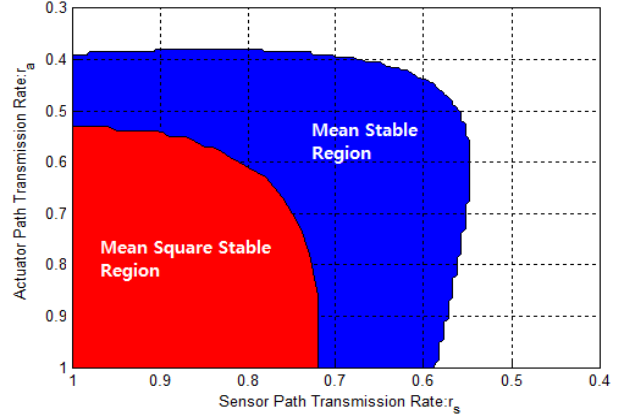
참고문헌 [2], 식(29)의 Batch-Rector 모델과 이를 안정화하는 식(30)의 제어기를 고려하자. 샘플링 주기 $h=125[msec]$, 구동기 경로 및 센서 경로의 최대 시간지연이 각각 $\tau_1=5[msec]$, $\tau_2=10[msec]$ 일 때, 표 1은 네트워크 제어시스템의 안정을 보장하는 데이터 전송 성공률의 하한값 r_{min} 을 정리 1.1), 1.2)를 이용하여 계산한 결과이다. 여기서, 참고문헌 [1],[2]의 안정성 정리를 이용한 결과와 비교를 위해 각 경로의 데이터 전송 성공률은 같다고 가정하였다(즉, $r_{min} = r_{s,min} = r_{a,min}$).

〈표 1〉 데이터 전송 성공률 비교

〈Table 1〉 Comparison of data transmission rates

구분	비동기 시스템 점근안정[1],[2]	MJLS 평균안정 (정리 1.1)	MJLS 평균제곱안정 (정리 1.2)
r_{min}	60.77%	55.04%	73.78%

각 경로의 데이터 전송 성공률이 서로 다를 때, 네트워크 제어시스템이 안정하기 위한 해당 범위도 제한된 정리 1을 이용하여 구할 수 있으며, 그 결과는 그림 1과 같다.



〈그림 1〉 네트워크 제어시스템의 안정범위

〈Fig. 1〉 Stability region of networked control system

이상의 시뮬레이션 결과로부터, 본 논문에서 제안한 정리를 이용하여 네트워크 제어시스템의 안정성을 효과적으로 분석할 수 있음을 입증할 수 있다.

4. 결 론

네트워크 제어시스템은 데이터 전송의 불확실성으로 인해 시스템의 성능, 특히 안정성이 변화할 수 있으며 본 논문에서는 이를 분석하기 위해 이산 MJLS의 안정성 해석 방법을 적용하였다. 그 결과, 네트워크 제어시스템의 평균안정 및 평균제곱안정을 판별할 수 있는 필요충분조건을 정리 1.1), 1.2)와 같이 제안하였으며, 시뮬레이션을 통해 그 효용을 입증하였다. 본 논문의 결과는 향후, 네트워크 제어시스템의 안정화 제어기 설계 등에 적용할 수 있을 것이다.

[참 고 문 헌]

- [1] J.P. Hespanha, P. Naghshtabrizi, and Y. Xu, "A Survey of Recent Results in Networked Control Systems," Proceedings of the IEEE, vol. 95, no. 1, pp. 138-162, 2007.
- [2] 정준홍, 박기현, 이재호, "다중 패킷을 전송하는 네트워크 제어시스템의 안정성 분석," 전자공학회논문지, 제 44권 SC편 제 5호, pp. 18-29, 2007.
- [3] P. Seiler and R. Sengupta, "An H_∞ Approach to Networked Control," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 50, no. 3, pp. 356-364, 2005.
- [4] J.W. Lee and G.E. Dullerud, "A Stability and Contractiveness Analysis of Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems," Automatica, vol. 43, Issue 1, pp. 168-173, 2007.
- [5] Y. Fang and K.A. Loparo, "Stochastic Stability of Jump Linear Systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, no. 7, pp. 1204-1208, 2002.
- [6] C.E. de Souza, "Robust Stability and Stabilization of Uncertain Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 51, no. 5, pp. 836-841, 2006.
- [7] Y. Fang, K.A. Loparo, and X. Feng, "Almost Sure and δ-Moment Stability of Jump Linear System," International Journal of Control, vol. 59, no. 5, pp. 1281-1307, 1994.
- [8] O.L.V. Costa and M.D. Fragoso, "Stability Results for Discrete-Time Linear Systems with Markovian Jumping Parameters," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 179, no. 1, pp. 154-178, 1993.