

## 다 개체 동종 시스템의 분산 편대 추종 제어

김상훈, 심형보  
서울대학교 전기컴퓨터공학부

### Decentralized Formation Tracking Control of Multiple Homogeneous Agents

Sanghoon Kim, Hyungbo Shim

ASRI, School of Electrical Engineering and Computer Science, Seoul National University

**Abstract** - 다 개체 동종 시스템의 분산 편대 추종 제어는 최근 몇 년 간 많은 연구가 이루어져 왔다. 이러한 관심은 군사 분야, 모발 센서 네트워크, 지능형 교통 시스템과 같은 흥미롭고 새로운 응용 사례가 대두됨에 따라 집중되었다. 분산 편대 제어는 여러 가지 이론과 방법으로 연구되어 왔는데 대부분의 경우 여러 동종 시스템의 상호 연결성을 토대로 라플라스 인접 행렬의 성질로 설명하고 있다. 이러한 접근법은 합의 문제와 동기화 문제와도 관계가 있는데 이 경우 편대 제어의 경우와 유사한 방식으로 안정도를 설명하며 설계 고려 사항을 도출한다. 본 논문에서, 우리는 분산된 방법으로 여러 대의 동종 비선형 시스템을 다루며 이 시스템들은 시간에 대해 부드럽게 변하는 상대 기준 위치에 따라 편대를 이룰 수 있고 또한 전체 그룹은 모든 방향으로 자유롭게 움직이는 것이 가능하다. 우리의 주요 목표는 위와 같은 편대 추종 제어의 안정도를 해석하고 제어기를 설계하는 것이다.

#### 1. 서 론

다 개체 동종 시스템의 편대 제어는 최근 많은 연구가 이루어지고 있으며 군사 분야, 모발 센서 네트워크, 지능형 교통 시스템과 같은 다양한 응용 사례에 적용되고 있다[7]. 이러한 편대 제어 문제의 해법은 여러 가지 방법으로 제안되었는데, [6]에서 그래프 이론과 LMI를 이용한 다 비행체의 편대 제어를 연구하였고 [1]에서 인접 개체만을 사용한 분산된 협력을 제안하였으며 [5]에서 슬라이딩모드 제어를 이용한 추종을, [9]에서 각 개체의 연결성을 토대로 한 편대 안정화 문제를 논하였다. 이러한 연구는 많은 부분 라플라시안(Laplacian) 행렬을 기반으로 설명되는데 이것은 다 개체 입력력 사이의 상호 연결성을 표현하는데 유용한 도구로 사용된다[3, 4]. 이렇게 라플라시안 행렬을 이용한 다 개체의 표현은 합의문제, 동기화문제와도 관련이 깊으며 편대제어와 유사한 접근법을 사용한다[8, 2]. 본 논문에서 우리는 동일한 동역학을 가지는 다 개체에 대한 분산된 편대 추종 제어를 다룬다. 편대를 표현하는 시간에 따라 부드럽게 변하는 참조 입력에 대해 개별 개체는 그룹 내 리더의 존재 유무와 관계없이 주어진 대형을 추종하고 이때 전체 그룹은 어느 방향으로나 자유롭게 움직일 수 있다. 우리의 목표는 이러한 편대 추종 제어를 이루기 위한 안정도 해석과 제어기를 설계하는 것이다.

#### 2. 본 론

일반적으로 편대(Formation)는 어떠한 공통된 목적을 이루기 위한 여러 시스템 간의 물리적 배치를 가리킨다. 이번 장에서는 편대와 편대 추종 문제를 수학적으로 정의하고 분산된 형태의 제어기를 설계한다.

##### 2.1 편대 추종 제어 문제

**정의1** (편대행렬  $F$ ).  $N$ 개의 시스템에 대하여, 각각의 시스템은  $m$ 개의 출력을 가진다고 가정할 때 편대행렬  $F$ 는 다음과 같이 시간에 대해 부드러운  $mN \times N$  행렬이다.

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & \cdots & f_{1N}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N1}(t) & \cdots & f_{NN}(t) \end{bmatrix}, \quad f_{ij}(\cdot) \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

$$f_{ij}(t) = f_{ik}(t) - f_{jk}(t), \quad f_{ii}(t) = [0, \dots, 0]^T, \quad 1 \leq \forall i, j, k \leq N, \quad i \neq j$$

**정의2** (편대).  $N$ 개의 시스템에 대하여,  $i$ 번째 시스템이  $m$ 개의 출력  $y_m$ 을 가진다고 가정할 때 만약  $1 \leq \forall i, j \leq N$ 이고  $f_{ij}(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ 가  $mN \times N$  편대행렬  $F$ 의 부분행렬일 때  $y_i - y_j = f_{ij}(t)$ 을 만족하면  $N$ 개의 시스템은 편대  $F$ 에 있다고 정의 한다.

**정의3** (편대벡터  $\zeta$ ).  $mN \times N$  편대행렬  $F$ 에 대하여 편대벡터  $\zeta$ 는 다음과 같은  $mN$ 차원 시간에 대한 부드러운 벡터  $\zeta$ 이다.

$$F = \zeta \otimes \mathbf{1}_N^T - \mathbf{1}_N \otimes \zeta^T$$

$$\zeta = [-\zeta_1^T, \dots, -\zeta_N^T]^T \in \mathbb{R}^{mN},$$

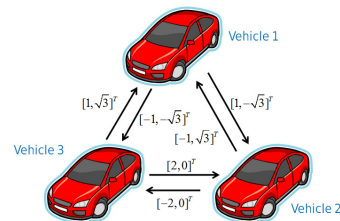
$$\zeta^\dagger = \begin{bmatrix} | & & | \\ \zeta_1 & \cdots & \zeta_N \\ | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times N},$$

$$\zeta_i(\cdot) = [\zeta_{i1}(\cdot), \dots, \zeta_{im}(\cdot)]^T \in \mathbb{R}^m$$

**예제4.** 그림 1에서 편대벡터  $F$ 와 편대벡터  $\zeta$ 는 다음과 같다.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \zeta \otimes \mathbf{I}_3^T - \mathbf{I}_3 \otimes \zeta^\dagger,$$

$$\zeta = [0, 0, 1, -\sqrt{3}, -1, -\sqrt{3}]^T, \quad \zeta^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$



**<그림1> 2개 출력을 가진 자동차의 삼각편대**

다음과 같은 다 개체 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)u_1, & y_1 &= h_1(x_1), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2) + g_2(x_2)u_2, & y_2 &= h_2(x_2), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_N = f_N(x_N) + g_N(x_N)u_N, \quad y_N = h_N(x_N),$$

이 때,

$$u_i = [u_{i1}, \dots, u_{im}]^T, \quad u_i \in \mathbb{R}^m$$

$$g_i(x_i) = \begin{bmatrix} | & & | \\ g_{i1}(x_i) & \cdots & g_{im}(x_i) \\ | & & | \end{bmatrix}, \quad g_i(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$h_i(x_i) = [h_{i1}(x_i), \dots, h_{im}(x_i)]^T, \quad h_i(\cdot) \in \mathbb{R}^m$$

이고 또한  $x_i \in \mathbb{R}^n$  ( $1 \leq \forall i \leq N$ ), smooth  $f_i$  and  $g_{i1}, \dots, g_{im}$  vector fields over  $\mathbb{R}^n$   $h_{ij}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a smooth function s.t.  $h_{ij}(0) = 0$  ( $0 \leq \forall j \leq m$ ) 이다.

**정의5** (편대추종제어). 식(2)과 같은 다 개체 시스템에서, 편대추종제어 문제는 식(1)과 같은 편대행렬  $F$ 가 주어졌을 때 임의의 초기 값에 대하여 다음과 같은 성질을 가지는 제어기를 설계하는 것이다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|(y_i(t) - y_j(t)) - f_{ij}(t)\| = 0, \quad 1 \leq \forall i, j \leq N \quad (3)$$

**주목6.** 식(3)은 다음과 같이 편대벡터  $\zeta$ 로 표현할 수 있다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|(y_i(t) - y_j(t)) - (\zeta_i(t) - \zeta_j(t))\| = 0, \quad 1 \leq \forall i, j \leq N \quad (4)$$

##### 2.2 분산 편대 추종 제어

**정리7** (편대추종제어). 식(2)과 같은  $N$ 개의 다 개체 시스템이 주어졌을 때  $f_i, g_i, h_i$ 가 모두 같은 동종의 경우를 고려하자.  $i$ 번째 시스템이 입력으로 참조하는 이웃시스템의 집합을  $N_i$ 로 하고 이것을 그래프  $G$ 로 나타내어 이를 표현한 라플라시안 행렬을  $L$ 이라고 하자. 이 때, 우리는 편대벡터  $\zeta$ 에 대하여 다음의 조건을 만족하면 편대추종제어문제를 풀 수 있다.

- 각 시스템은 전역 상태 궤환 입력력 선형화가 가능하다.
- 각 시스템의 출력은 해당 개체 스스로 측정 가능하다.

- 각 개체의 추종동역학이 입력과 출력에 대하여 유계이다.
- 그래프  $\mathcal{G}$ 는 강한 결합(Strongly Connected)이거나 또는 단 하나의 리더 컴포넌트를 갖는다.
- $\lambda_i$ 가 행렬  $L$ 의 0이 아닌 고유값일 때 이러한 모든 고유값에 대해  $1 \leq \forall j \leq m$  범위에서  $s^{\rho_j} + \lambda_i k_{ij} s^{\rho_j-1} + \dots + \lambda_i k_{j1}$ 가 Hurwitz다항식이다.

이 경우 각 시스템에 대한 분산제어기  $u_i$ 는 다음과 같다.

$$u_i = -A^{-1}(x_i) \left( L_f^{\rho} h(x_i) - \left( \frac{1}{|N_i|} \sum_{l \in M} K_l \sum_{j \in N_i} (y_i - y_j - \zeta_i + \zeta_j)^{(l-1)} + \zeta_i^{(\rho)}(t) \right) \right)$$

위에서  $\rho = [\rho_1, \dots, \rho_m]^T \in \mathbb{N}^m$ 는 시스템의 벡터상대차수(vector relative degree)이며 그리고

$$M = \{1, 2, \dots, \max(\rho_1, \dots, \rho_m)\},$$

$$K_l = \begin{bmatrix} k_{1l}^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{2l}^* & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{ml}^* \end{bmatrix}, \quad k_{jl}^* = \begin{cases} k_{jl} & \text{if } l \leq \rho_j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$L_f^{\rho} h(x_i) = \begin{bmatrix} L_f^{\rho_1} h_1(x_i) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h_m(x_i) \end{bmatrix}, \quad \zeta_i^{(\rho)}(t) = \begin{bmatrix} \zeta_{i1}^{(\rho_1)}(t) \\ \vdots \\ \zeta_{im}^{(\rho_m)}(t) \end{bmatrix},$$

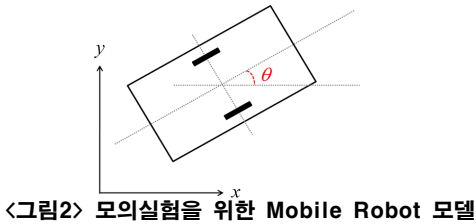
$$A(x_i) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1(x_i) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1(x_i) \\ L_{g_1} L_f^{\rho_2-1} h_2(x_i) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_2-1} h_2(x_i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m(x_i) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m(x_i) \end{bmatrix}$$

이다.

**증명:** 식(4)과 같은 예리 동역학을 정의하고 이것이 0으로 수렴함을 보인다. 이 때 주어진 가정에 따라 그래프  $\mathcal{G}$ 가 강한결합이거나 한 개의 리더 컴포넌트를 가질 경우 최대 분별 점의 집합이 원점 밖에 존재하지 않음을 밝히고 LaSalle정리를 이용한다. 자세한 증명은 지면 관계상 생략한다. ■

### 2.3 모의실험

그림2와 같은 6대의 Mobile Robot에 대해 정리2에 따라 제어기를 설계하고 모의 실험하였다. 주어진 모델의 상태방정식은 식(5)과 같으며 이 때 편대벡터는 식(6)과 같다.



<그림2> 모의실험을 위한 Mobile Robot 모델

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (5)$$

이 경우,

$$x = [x, y, \theta, u_1]^T, \quad u = [u_2, u_3]^T$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} u_1 \cos \theta \\ u_1 \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} | & | \\ g_1(x) & g_2(x) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

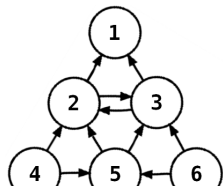
$$h(x) = [h_1(x), h_2(x)]^T = [x, y]^T$$

이다. 한편 편대벡터는 다음과 같다.

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \\ \zeta_3(t) \\ \zeta_4(t) \\ \zeta_5(t) \\ \zeta_6(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \zeta_1(t) &= [0, 0]^T, \\ \zeta_2(t) &= [-100 - 50 \sin(t), -200 - 100 \sin(t)]^T, \\ \zeta_3(t) &= [100 + 50 \sin(t), -200 - 100 \sin(t)]^T, \\ \zeta_4(t) &= [-200 - 100 \sin(t), -400 - 200 \sin(t)]^T, \\ \zeta_5(t) &= [0, -400 - 200 \sin(t)]^T, \\ \zeta_6(t) &= [200 + 100 \sin(t), -400 - 200 \sin(t)]^T \end{aligned} \quad (6)$$

그림3은 6대의 로봇 간 출력 측정 그래프이며 이를 행렬로 표현하면 다음과 같은 라플라시안 행렬  $L$ 을 얻는다.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$



<그림3> 6대의 로봇 간 출력 측정 그래프  $\mathcal{G}$

그래프  $\mathcal{G}$ 의 연결성을 토대로 1번 로봇이

리더 역할을 하고 있음을 알 수 있으며 편대벡터는 크기가 변하는 삼각대형을 이루도록 설계하였다. 다음은 편대추종을 위한 각 로봇의 분산제어기  $u_i$ 이다.

$$u_i = -A^{-1}(x_i) \left( L_f^{\rho} h(x_i) - \left( \frac{1}{|N_i|} \sum_{l \in M} K_l \sum_{j \in N_i} (y_i - y_j - \zeta_i + \zeta_j)^{(l-1)} + \zeta_i^{(\rho)}(t) \right) \right)$$

이 때, 각 변수는

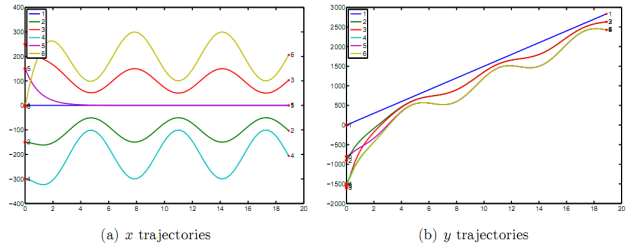
$$A^{-1}(x_i) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{u_{e1}} \sin \theta_i & \frac{1}{u_{e1}} \cos \theta_i \\ \cos \theta_i & \sin \theta_i \end{bmatrix},$$

$$L_f^{\rho} h(x_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \zeta_i^{(\rho)}(t) = \begin{bmatrix} \zeta_{i1}^{(2)}(t) \\ \zeta_{i2}^{(2)}(t) \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 300 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$$

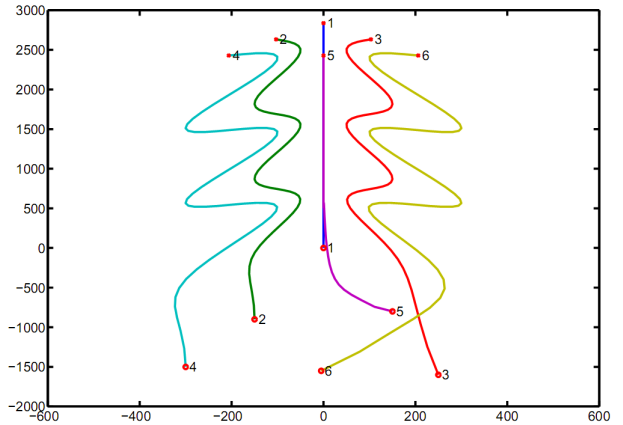
$$M = \{1, 2\}$$

이다. 모의실험 결과는 그림4와 같으며 다 개체 로봇들이 시간에 따라 크기가 변화하는 주어진 삼각대형을 잘 추종하고 있음을 보여준다.



(a) x trajectories

(b) y trajectories



<그림4> 모의실험 결과

### 3. 결론

본 논문에서 우리는 다 개체의 편대 추종 문제에 대하여 안정도를 해석하고 이를 기반으로 분산된 제어기를 설계하였다. 대형의 추종 안정성은 출력 측정 그래프의 연결성과 관련이 깊으며 이 그래프가 강한 결합을 가지거나 또는 최대 한 개의 리더 컴포넌트를 가질 경우 제어기를 설계할 수 있다. 우리는 제안한 정리를 6대의 이동 로봇으로 모의실험을 하였으며 실험 결과 주어진 편대 참조입력에 따라 각 로봇이 대형을 잘 추종함을 보았다.

### [참고 문헌]

- [1] Jie Lin, Ali Jadbabaie and A. Stephen Morse, Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules, IEEE Automatic Control (2003).
- [2] Leon O. Chua, Chai Wah Wu, Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems, IEEE Trans. on Circuit and Systems (1995).
- [3] J. Alexander Fax and Richard M. Murray, Information flow and cooperative control of vehicle formations, IEEE Automatic Control (2004).
- [4] J. Caughman, G. Lafferriere, A. Williams and J.J.P. Veerman, Decentralized control of vehicle formations, System and Control Letters (2005).
- [5] Eric Nelson, Hsi-Han Yeh and Andrew Sparks, Nonlinear tracking control for satellite formations, Proceedings of IEEE Conf. on Decision and Control (2000).
- [6] M. Mesbahi and F. Y. Hadaegh, Formation Flying control of multiple spacecraft via graphs, matrix inequalities, and switching, IEEE Control Applications (1999).
- [7] Richard M. Murray, Recent research in cooperative control of multi-vehicle systems, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control (2006).
- [8] Wei Ren and Randal W. Beard, Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies, IEEE Automatic Control (2006).
- [9] Rodolphe Sepulchre, Derek Paley, and Naomi Ehrich Leonard, Group coordination and cooperative control of steered particles in the plane, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, London, 2006, pp. 217-232.