

표면파에 대한 웨이블릿 변환을 이용한 모형 암반의 위상속도 결정

이종섭 (고려대학교 공과대학 건축사회환경공학과 조교수)
엄현석 (고려대학교 공과대학 건축사회환경공학과 석사과정)
김동현 (GS건설 지하공간팀 과장)
이인모 (고려대학교 공과대학 건축사회환경공학과 교수)

1. 서론

전단계수와 전단변형률에 대한 전단계수의 변화는 지반의 진동으로 인한 흙의 거동 특성을 규명하는데 중요한 변수이다. 현장에서 전단계수를 알아내는 중요한 요소 중 하나는 0.001% 미만의 전단변형률에서 지반의 전단파 속도이다. 전단파 속도를 측정하는 방법에는 시추공을 이용한 전단파 속도 측정 방법(crosshole test, downhole test)이 있지만 시추공을 굴착해야한다는 점에서 상당한 시간과 비용이 요구된다는 단점이 있다. 경제적인 전단파 속도 측정을 위해 비파괴시험법이 도입 되었는데 주로 표면파 시험법이 사용되었다. 대표적인 표면파 시험법에는 두 감지기에서 측정된 신호에 대한 스펙트럼의 상호상관관계를 통하여 위상각 정보를 얻고 이를 누적위상각 그래프를 통해 위상각차를 구하여 전단파 속도를 구하는 SASW(Spectral Analysis of Surface Waves)가 있다.

비파괴시험법을 통한 전단파 속도는 터널의 측벽부, 어깨부에서의 콘크리트 라이닝의 두께와 강도 측정, 터널의 어깨부에서 그라우팅의 두께와 강도 측정, 콘크리트 라이닝 뒤편의 암반의 강도 측정에 사용될 수 있다. 그러나 기존의 표면파 시험법의 경우 신호의 잡음으로 인하여 타당한 누적위상 그래프를 얻기 어려우며 측정할 수 있는 깊이를 증가시키기 위하여 두 감지기의 간격을 늘려가며 측정해야한다는 단점이 있다. 본 연구에서는 이러한 기존 표면파 시험법의 단점을 보완하기 위하여 표면파에 대하여 주파수의 시간 변화를 알 수 있는 웨이블릿 변환을 이용한 암반의 위상속도 결정 방법을 제시하였고 실내 모형 암반에 대하여 연구를 수행하였다.

2. 표면파의 특성

표면파(surface wave)는 주로 수직방향의 전단파 수평방향의 압축이 혼합된 입자 운동 형태를 가지는 레일리파(Rayleigh wave)를 일컫는다. 표면파는 매질 안에서 전파해 나가는 체적파, 즉 압축파(P-wave)나 전단파(S-wave)와 달리 매질의 표면을 따라 전파해 나간다. 균일한 매질에서 표면파의 영향범위는 약 한 파

장의 깊이로 알려져 있다. 균일한 매질에서의 탄성파(P-wave, S-wave, Rayleigh wave) 속도는 주파수와 독립적인 비분산성(non-dispersive)의 성질을 가지고 있다. 탄성파의 전파 영역은 가진원과의 거리에 따라 가진원 근처에서 혼합된 형태를 가지는 근거리장영역(near field)과 가진원에서 파장의 일정 배수의 거리만큼 떨어진 곳에서 각각 분리된 형태를 가지는 원거리장영역(far field)으로 나눌 수 있다. 표면파 시험에서는 원거리장영역만을 고려하는데 이때 균일한 매질에서의 탄성파 속도는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (1)$$

$$V_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2)$$

$$V_P = V_S \sqrt{\frac{1-\nu}{0.5-\nu}} \quad (3)$$

여기서, V_P 는 압축파 속도, V_S 는 전단파 속도, λ 는 Lamé 정수, G 는 전단계수, ρ 는 밀도, E 는 탄성계수, ν 는 포아송비(Poisson's ratio)를 나타낸다. 균일한 매질에서 원거리장영역의 표면파 속도(V_R)은 압축파 속도, 전단파 속도와 관련하여 다음의 레일리파 식(Rayleigh wave equation)으로 나타낼 수 있다.

$$\left(2 - \frac{V_R^2}{V_S^2}\right)^2 - 4\sqrt{1 - \frac{V_R^2}{V_P^2}}\sqrt{1 - \frac{V_R^2}{V_S^2}} = 0 \quad (4)$$

또한 표면파 속도는 다음과 같이 전단파 속도와 포아송비의 관계식으로 추정할 수 있다.

$$V_R = \frac{0.874 + 1.117\nu}{1 + \nu} V_S \quad (5)$$

위의 식들을 이용하여 포아송비에 대한 탄성파 속도의 상대적인 관계를 알아낼 수 있는데 표면파 속도는 전단파 속도의 0.874배~0.955배로 현장에서 전단파 속도의 측정을 위해서 표면파 속도의 값을 대신 사용할 수 있다. 탄성파를 파면의 면적이 거리에 따라 증가하면서 파의 에너지가 감소하는 기하학적 감쇠(geometric spreading) 측면에서 보면 체적파의 경우 반구형의 파면(hemispherical wavefront)으로 가진원에서의 거리를 r 이라고 할 경우 기하학적 감쇠가 매질 안에서는 $1/r$, 표면에서는 $1/r^2$ 인 반면에 표면파의 경우 원통형의 파면(cylindrical wavefront)으로 기하학적 감쇠가 $1/\sqrt{r}$ 이다. 또한 가진원에서 발생하는 대부분의 에너지가 표면파의 형태로 전파해 나가는 것으로 알려져 있다. 그러므로 가진원에서 일정 파장의 배수 거리만큼 떨어진 곳에서는 표면파의 성분이 지배한다고 볼 수 있다.

표면파의 중요한 특성 중 하나는 다층의 매질에서 주파수에 따라 표면파의 속도가 변하는 분산성(dispersive)을 가지고 있다는 것이다. 표면파의 파장이 짧은 높은 주파수에서는 얇은 부분의 매질의 속도를 나타내고 표면파의 파장이 긴 낮은 주파수에서는 깊은 부분의 매질의 속도를 나타낸다. 이러한 표면파의 특성을 이용하여 주파수에 대한 표면파 속도의 그래프인 분산곡선(dispersion curve)을 만들 수 있으며 이는 다층 매질에서의 깊이에 따른 전단파 속도를 알아내기 위한 역산(inversion)과정에 사용이 된다.

3. 웨이블릿 변환

시간-주파수 해석은 매질을 통과하는 분산성을 가지고 있는 파의 해석에 있어서 중요한 역할을 한다. 기존의 대표적인 시간-주파수 해석법에는 고정된 창의 크기를 가지고 신호를 해석하는 STFT(Short Time Fourier Transform) 방법이 있다. 그러나 STFT 방법은 저주파 성분에서 해석이 가능하도록 창의 크기가 고정되어 있다면 고주파 성분에서는 적당하지 못한 단점이 있다. 이러한 단점을 해결하기 위해 웨이블릿 변환(wavelet transform)이 도입되었다. 웨이블릿 변환은 STFT 방법과 같이 시간-주파수 해석이 가능하지만 STFT 방법에서는 창의 크기가 고정되어있는 반면에 웨이블릿 변환에서는 창의 크기가 주파수에 따라 변화하여 높은 주파수에서는 작은 크기의 창을 가지고 낮은 주파수에서는 큰 창의 크기를 가진다는 차이점이 있다. 연속 웨이블릿 변환은 다음의 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$Wf(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi_{a,b}^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1}{\sqrt{a}}\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt \quad (6)$$

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (7)$$

여기서 $f(t)$ 는 원신호(original signal), $\psi(t)$ 는 모 웨이블릿(mother wavelet), $\psi(t)^*$ 는 모 웨이블릿의 복소공액(complex conjugate), a 는 스케일상수(scaling parameter), b 는 이동상수(translation parameter)를 나타낸다.

본 연구에서는 모 웨이블릿으로 불확정성원리에 근거하여 시간-주파수 해상도가 가장 뛰어나다는 가버 웨이블릿(Gabor wavelet)을 사용하였다. 가버 웨이블릿은 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\psi_g(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \frac{\sqrt{\omega_0}}{\gamma} \exp\left[-\frac{(\omega_0/\gamma)^2}{2}t^2\right] \exp(i\omega_0 t) \quad (8)$$

가버 웨이블릿의 푸리에 변환(Fourier transform)은 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\hat{\psi}_g(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt[4]{\pi}} \sqrt{\frac{\gamma}{\omega_0}} \exp\left[-\frac{(\gamma/\omega_0)^2}{2}(\omega - \omega_0)^2\right] \quad (9)$$

다음은 γ 가 $\pi\sqrt{2\ln 2}$ 의 값을 가지며 ω_0 는 2π 의 값을 가질 때의 가버 웨이블릿과 가버 웨이블릿의 푸리에 변환을 그림 1에 나타내었다.

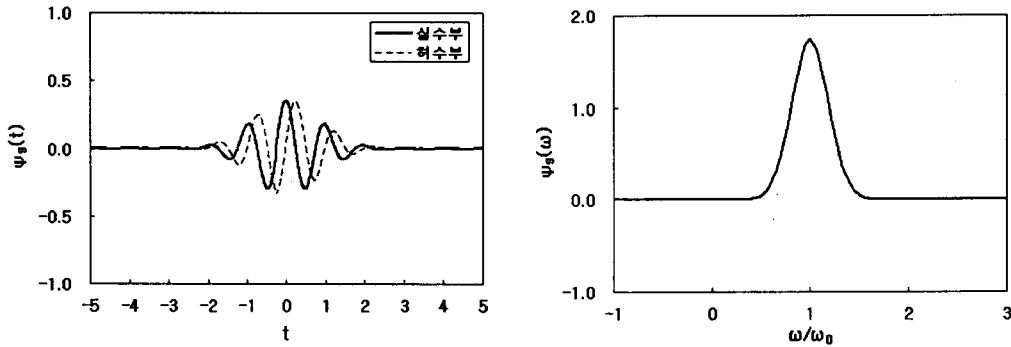


그림 1. (a) 가버 웨이블릿 (b) 가버 웨이블릿의 푸리에 변환

원신호 $f(t)$ 를 가버 웨이블릿 변환을 한 $Wf(a,b)$ 의 크기는 시간 $t=b$ 와 주파수 $\omega=\omega_0/a$ 에서의 원신호 $f(t)$ 의 분포정도를 의미한다.

4. 위상속도 결정

x 축 방향으로 전파해 나가는 같은 크기를 가지며 다른 주파수를 가지는 조화운동을 하는 두 개의 파를 합성시키면 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$u(x,t) = A\cos(k_1x - \omega_1t) + A\cos(k_2x - \omega_2t) \quad (10)$$

여기서 A 는 진폭(amplitude), k_1 과 k_2 는 파수(wave number), ω_1 과 ω_2 는 각주파수(angular frequency)를 나타낸다. 이 식은 삼각함수의 항등식을 이용하여 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$u(x,t) = 2A\cos(\Delta kx - \Delta\omega t)\cos(kx - \omega t) \quad (11)$$

여기서 Δk 는 $(k_1 - k_2)/2$, $\Delta\omega$ 는 $(\omega_1 - \omega_2)/2$, k 는 $(k_1 + k_2)/2$, ω 는 $(\omega_1 + \omega_2)/2$ 를 나타낸다. 이 식에서 앞부분의 삼각함수는 저주파로 신호의 윤곽선이 이동하는 군속도와 관련이 있으며 뒷부분의 삼각함수는 고주파로 신호의 한 입자가 이동하는 위상속도와 관련이 있다. 군속도와 위상속도는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$V_{group} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (12)$$

$$V_{phase} = \frac{\omega}{k} \quad (13)$$

모 웨이블릿으로 가버 웨이블릿이 사용이 되었을 때 신호 $u(x,t)$ 를 웨이블릿 변환 한 크기는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$|(Wu)(x,a,b)| \approx \sqrt{2a} \hat{\psi}_g(a\omega) [1 + \cos(2\Delta kx - 2\Delta\omega b)]^{1/2} \quad (14)$$

위 식으로부터 $a=\omega_0/\omega$ 이고 $b=(\Delta k/\Delta\omega)x=x/V_{group}$ 일 때 신호 $u(x,t)$ 를 웨이블릿 변환 한 크기가 최대가 된다는 것을 알 수 있다. 즉 (a,b) 평면상에서 최대점의 위치는 각 주파수 $\omega=\omega_0/a$ 인 파의 도달 시간 $b=x/V_{group}$ 임을 의미한다. 만약 두 개의 감지기를 사용한다면 임의의 각 주파수 ω 에서의 신호의 군속도와 위상속도는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$V_{group} = \frac{d}{t_{gr2} - t_{gr1}} \quad (15)$$

$$V_{phase} = \frac{d}{t_{ph2} - t_{ph1}} \quad (16)$$

여기서 t_{gr1} 과 t_{gr2} 는 첫 번째, 두 번째 감지기에서 측정된 신호의 파군 지체시간, t_{ph1} 과 t_{ph2} 는 첫 번째, 두 번째 감지기에서 측정된 신호의 위상 지체시간, d 는 두 감지기의 거리를 나타낸다. 위상속도의 식은 기하학적인 관계를 이용하여 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$V_{phase} = \frac{d}{(t_{gr2} - t_{gr1}) - \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{\omega}\right)} \quad (17)$$

여기서 θ_1 과 θ_2 는 t_{gr1} 과 t_{gr2} 에서의 위상각을 나타낸다. 위 식을 이용하여 표면파에 대한 웨이블릿 변환을 이용한 위상속도를 결정할 수 있다.

5. 실내실험

5.1 석고모형 제작

석고모형은 3차원 모델과 비교할 때 외부에서 오는 반사파와 수학적인 복잡성

을 줄일 수 있는 장점이 있는 2차원 모델로 제작하였다. 석고모형의 치수는 그림 2와 같이 길이 120cm, 높이 20cm, 두께 5cm 이며 아래층에는 높이 15cm의 강한 강도의 석고와 위층에는 높이 5cm의 약한 강도의 석고로 이루어졌다. 석고의 재료 특성은 표 1과 같다.

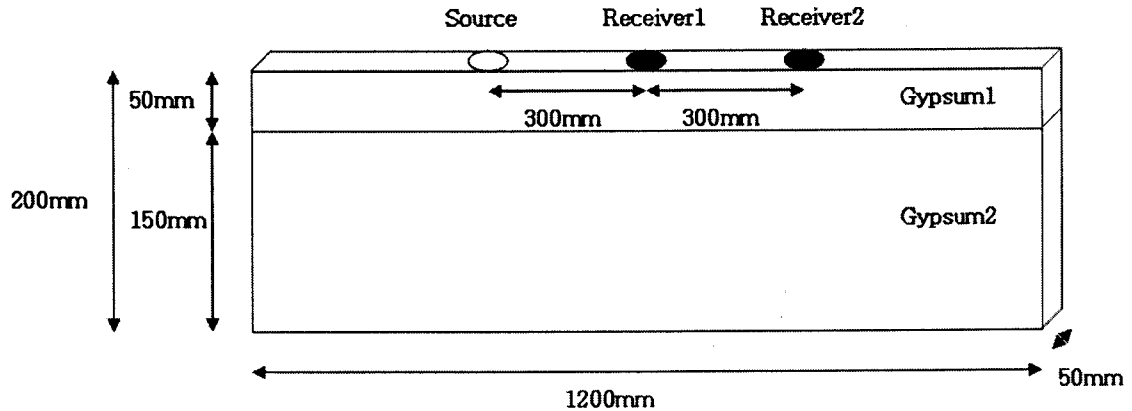


그림 2. 첫 번째 실험구성

표 1. 석고의 재료 특성

	압축강도(MPa)	V_P (m/sec)	V_S (m/sec)
석고1	30	2700	1600
석고2	70	3400	2000

5.2 실험장비 구성

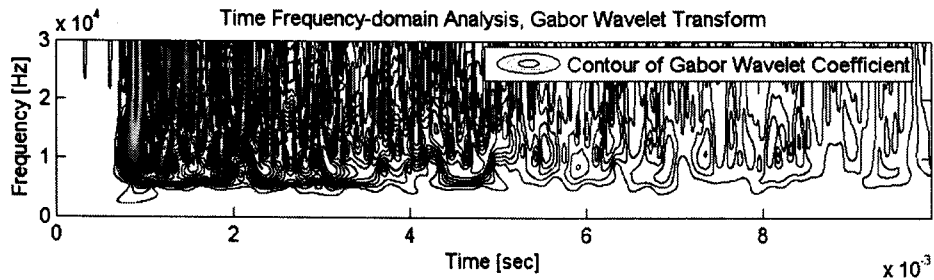
실험장비는 가진원, 감지기, 신호증폭기, 신호분석기로 나눌 수 있다. 가진원은 직경 5mm의 강철구를 사용하였다. 감지기는 압전성 물질(piezoelectric)로 이루어져 0~30kHz의 측정 주파수 범위를 가지며 공진주파수(resonant frequency)가 70kHz 이상인 PCB사의 353B15 가속도계(accelerometer)를 사용하였다. 신호증폭기(signal conditioner)는 1배~100배로 증폭을 할 수 있는 PCB사의 482A16을 사용하였다. 신호분석기는 최대 100MS/s의 속도로 신호를 수집할 수 있는 National Instruments사의 PXI-5112를 사용하였다.

5.3 실험 방법

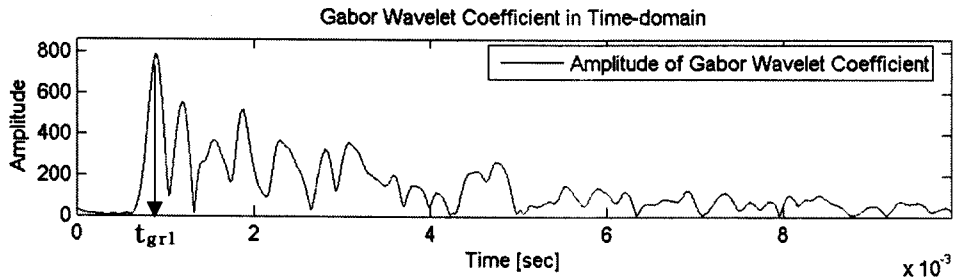
가진원과 첫 번째 감지기와의 거리는 첫 번째 감지기와 두 번째 감지기와의 거리인 30cm와 같게 두어 근접장 효과(near-field effect)와 두 감지기 사이에 발생하는 위신호(aliasing)을 제거하였다. 5mm의 강철구를 높이 11cm에서 자유낙하시켜 석고표면에 진동을 발생시켰다. 가진원을 석고의 좌측 모서리에서 10cm 떨어진 지점부터 우측으로 10cm씩 이동하며 5회 실험, 석고의 우측 모서리에서 10cm

떨어진 지점부터 좌측으로 10cm씩 이동하며 5회 실험, 총 10회의 실험을 수행하여 평균의 위상속도를 결정하였다. 첫 번째 실험구성(Case 1)은 아래층이 강한 석고이며 위층이 약한 석고로 이루어진 석고 모형에 실험을 수행하였고 두 번째 실험구성(Case 2)은 첫 번째 실험의 석고모형을 뒤집어서 아래층이 약한 석고이며 위층이 강한 석고로 이루어진 석고 모형에 실험을 수행하였다.

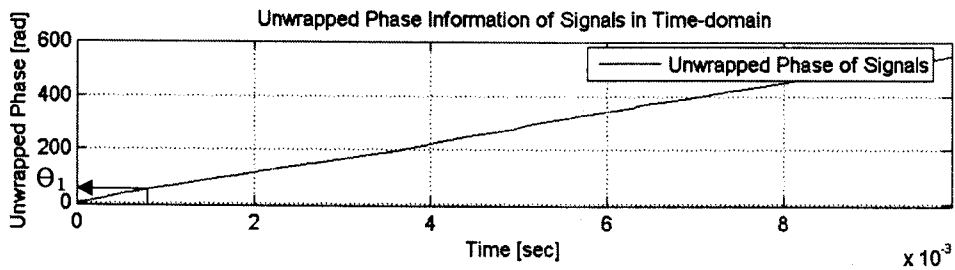
두 감지기에서 측정된 신호는 웨이블릿 변환을 하여 그 크기가 최대가 되는 시간인 t_{gr1} , t_{gr2} 를 알아내며 두 신호의 위상각정보로부터 θ_1 과 θ_2 를 알아내어 위상속도를 구하게 된다. Case 1에 대하여 감지기 1과 감지기 2에서 측정된 신호를 그림 3과 그림 4에 나타내었다.



(a) 웨이블릿 변환

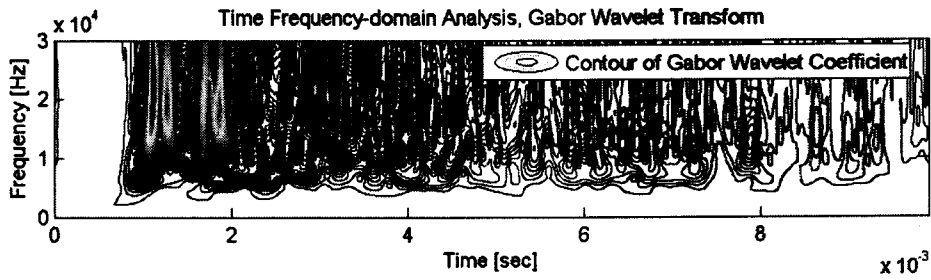


(b) 웨이블릿 변환 단면 (9kHz)

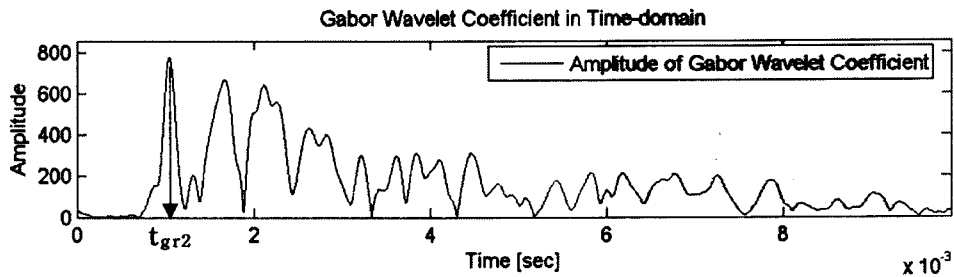


(c) 위상각 정보 (9kHz)

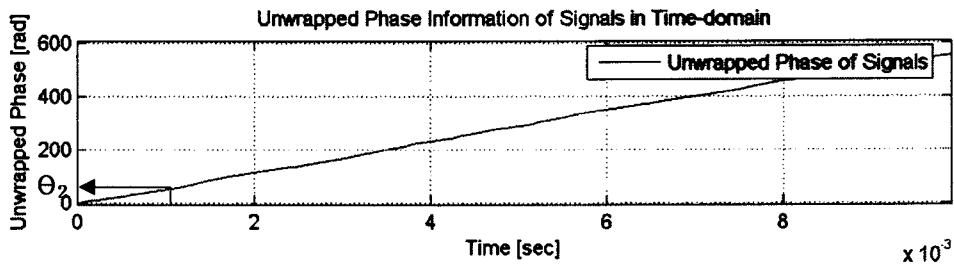
그림 3. 감지기 1에서 측정된 신호



(a) 웨이블릿 변환



(b) 웨이블릿 변환 단면 (9kHz)

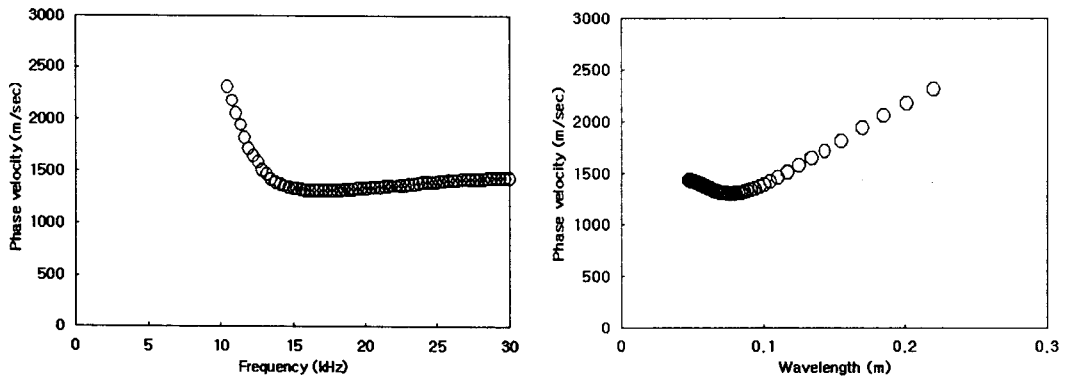


(c) 위상각 정보 (9kHz)

그림 4. 감지기 2에서 측정된 신호

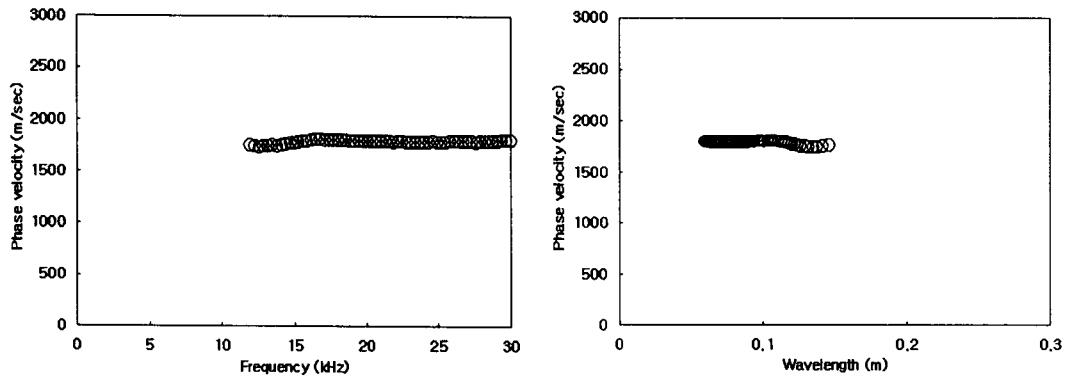
6. 실험 결과 및 해석

첫 번째 실험구성(Case 1)에 대하여 표면파에 대한 웨이블릿 변환을 이용한 위상속도를 결정하는 실험을 수행한 결과를 그림 5에 나타내었다. 그림 5에서와 같이 주파수 13.5kHz 이상에서는 평균 1360m/sec의 일정한 위상속도가 나타나고 13.5kHz 미만에서는 위상속도가 증가하는 것으로 나타났다. 두 번째 실험구성(Case 2)에 대하여 표면파에 대한 웨이블릿 변환을 이용한 위상속도를 결정하는 실험을 수행한 결과를 그림 6에 나타내었다. 그림 6에서와 같이 주파수 12kHz 이상에서 평균 1780m/sec의 일정한 위상속도가 나타났다.



(a) 주파수-위상속도 그래프 (b) 파장-위상속도 그래프

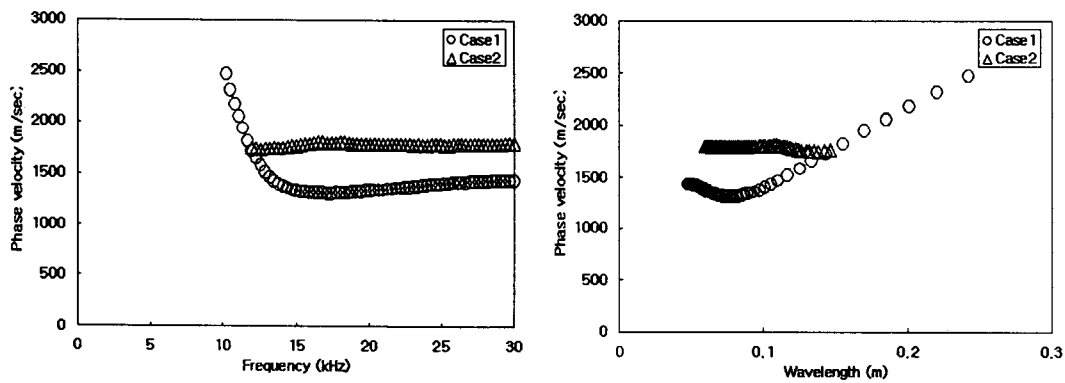
그림 5. Case 1에 대한 위상속도



(a) 주파수-위상속도 그래프 (b) 파장-위상속도 그래프

그림 6. Case 2에 대한 위상속도

그림 7에서 첫 번째 실험구성(Case 1)과 두 번째 실험구성(Case 2)에 대하여 표면파에 대한 웨이블릿 변환을 이용한 위상속도를 결정 한 결과를 동시에 나타내었다.



(a) 주파수-위상속도 그래프 (b) 파장-위상속도 그래프

그림 7. Case 1과 Case 2의 위상속도 비교

첫 번째 실험구성에서 파장이 0.105m 까지 평균 1360m/sec으로 속도가 일정한 것으로 보아 약한 강도의 석고의 위상속도를 나타내었으며 두 번째 실험구성에서 파장이 0.146m 까지 평균 1780m/sec으로 속도가 일정한 것으로 보아 강한 강도의 석고의 위상속도를 나타내었다. 약한 석고의 실제 깊이가 0.05m 이므로 표면파의 위상속도는 파장의 약 1/2배 만큼의 깊이만큼을 나타내었다. 두 번째 실험구성에서 파장이 0.146m 까지 속도가 일정한 것으로 보아 실험에서 사용한 가진원으로 발생 가능한 표면파의 깊이는 약 0.073m이다. 첫 번째 실험구성에서 파장의 0.146m에 해당하는 위상속도까지가 신뢰성이 있으며 그 값은 강한 강도의 석고의 위상속도와 거의 일치하였다.

7. 결론

본 연구에서는 표면파에 대한 웨이블릿 변환을 이용한 암반의 위상속도 결정 방법을 제시하였다. 이 방법을 적용한 실내실험에서는 강도가 다른 석고의 위상속도를 나타내는 분산곡선을 얻을 수 있었다. 표면파에 대한 웨이블릿 변환을 이용한 위상속도의 결정 방법은 신호의 잡음과는 상관없이 타당한 위상속도를 얻을 수 있으며 감지기의 간격을 늘릴 필요가 없이 가진원이 발생 가능한 주파수 대역에 대하여 위상속도를 얻으므로 기존의 표면파 시험법에 비해 암반의 위상속도 결정 방법으로서 효율적인 적용이 가능할 것으로 판단된다.

참고문헌

1. Stokoe, K. H. and Santamarina, J. C., 2000, Seismic-Wave-Based Testing in Geotechnical Engineering, International Conference on Geotechnical and Geological engineering, pp. 1490-1536.
2. Inoue, H., Kishimoto, K. and Shibuya, T., 1996, Experimental Wavelet Analysis of Flexural Waves in Beams, Experimental Mechanics, Vol. 36, No.3.
3. Zerwer, A., Polak, M. A. and Santamarina, J. C., 2000, Wave Propagation in Thin Plexiglas Plates: Implications for Rayleigh Waves, NDT&E International, Vol. 33, pp. 33-41.
4. Park, H. C. and Kim, D. S., 2001, Evaluation of the Dispersive Phase and Group Velocities using Harmonic Wavelet Transform, NDT&E International, Vol. 34, pp. 457-467.