

Riemann 해법을 이용한 1차원 유한체적모형 개발

Development of One Dimensional Finite Volume Model Using Riemann Approximate Solver

김지성*, 한건연**, 안기홍***

Ji Sung Kim, Kun Yeun Han, Ki Hong Ahn

요 지

댐·제방 등의 붕괴로 인하여 발생하는 급격한 유량의 변화와 흐름영역의 변화로 인한 천이류 및 도수의 발생, 불규칙한 하천단면에서 갈수기·저수기의 흐름해석은 기존의 수치해법의 한계로 인하여 수리모형실험 및 경험식 또는 단면의 단순화 등에 의존하고 있는 실정이다. 본 연구에서는 자연하천에서 비선형 흐름율 계산에 불연속초기조건의 해석해인 Riemann 근사해법을 사용하여 수치적으로 안정되고 정확한 1차원 모형을 개발하고자 한다. 이를 위하여 유한체적법을 사용하였고, 수위와 유량의 계산을 위하여 요구되는 유한체적을 유출입하는 흐름율의 계산에 HLL Riemann 해법을 사용하였으며, MUSCL 기법으로 2차 정확도기법으로 확장하였다. Riemann 해법을 통하여 계산된 비선형의 흐름율과 보존 특성을 만족시켜줄 수 있는 하상 및 하폭 변화로 인한 생성항을 처리하는 기법을 제안함으로서 새로운 1차원 수치해석모형을 개발하였다. 개발된 모형의 실제하천의 적용성을 확인하기 위하여 하상과 하폭이 변화하는 부정류 흐름에 적용하여 모형의 적용성 및 정확성을 검증하였다.

핵심용어 : Riemann 해법, 1차원, 유한체적기법, 생성항, 모형검증

1. 서 론

자연상태에서 대부분의 1차원 개수로 흐름은 비선형 편미분방정식인 Saint-Venant 방정식을 사용하여 표현된다. 지금까지 Saint-Venant 식을 수치적으로 해석하기 위하여 많은 양해법과 음해법의 유한차분기법이 개발되었으나 실무 적용을 위한 계산의 효율성과 안정성 때문에 Preissmann 기법과 같은 음해적 유한차분기법의 사용이 일반화되었다. 그러나 Preissmann 기법을 사용하여 하천 천이류를 해석하기 위해서는 사류 발생지점에서 경험적인 공식을 사용하거나, 수치 진동을 완화시키기 위한 인공 점성항의 추가가 불가피하다. 비물리적인 인공점성의 추가는 유속의 구배가 큰 지점에서 해의 정확성을 크게 떨어뜨리게 되며, 때로는 무조건 안정한 음해기법이라 하더라도 특정상황에서 불안정한 해법이 된다(Jin과 Fread, 1997). 댐·제방 등의 붕괴로 인하여 발생하는 급격한 유량의 변화와 흐름영역의 변화로 인한 천이류 및 도수의 발생, 불규칙한 하천단면에서 갈수기·저수기의 흐름해석은 기존의 수치해법의 한계로 인하여 수리모형실험 및 경험식 또는 단면의 단순화 등에 의존하고 있는 실정이다.

많은 비용과 시간이 필요한 수리모형실험 및 실측을 통한 대안마련에 비하여 최근 전산유체동역학 분야의 발전은 기존 수치해법의 한계를 해결할 수 있는 새로운 해법을 제공하며, 관심지역의 흐름특성에 관한 정밀한 계산을 가능하게 한다. 본 연구의 목적은 자연하천에서 흐름율과 생성항의 균형을 만족시킬 수 있는 수치적으로 안정되고 정확한 수치모형을 개발하고, 개발된 모형을 해석해가 있는 불규칙 하도에 대해서 적용함으로서 모형의 적용성을 입증하는데 있다.

* 정회원·한국건설기술연구원 수자원연구부 Post-Doctor-E-mail : jisungk@kict.re.kr
** 정회원·경북대학교 공과대학 토목공학과 교수 E-mail : kshanj@knu.ac.kr
*** 정회원·경북대학교 공과대학 토목공학과 박사과정 E-mail : khahnew@empal.com

2. 지배방정식

1차원 개수로의 지배 방정식은 질량 보존과 운동량 보존의 두 방정식으로 구성된 Saint-Venant 방정식이다. 유한체적기법을 이용하여 i 격자 $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t, t+\Delta t]$ 에서 적분형의 Saint-Venant 방정식은 Eq. (1a), (1b)와 같다.

$$\text{continuity} \quad A^{t+\Delta t} = A^t - \frac{\Delta t}{\Delta X} [Q_{x_{i+1/2}}^{t+\Delta t/2} - Q_{x_{i-1/2}}^{t+\Delta t/2}] \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \text{momentum} \quad Q^{t+\Delta t} &= Q^t - \frac{\Delta t}{\Delta X} \left[\left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right)^{t+\Delta t/2} - \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right)^{t+\Delta t/2} \right] \\ &\quad + \frac{g\Delta t}{\Delta X} \left[\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} I_2 dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A(S_0 - S_f) dx \right] \end{aligned} \quad (1b)$$

여기서 A 는 흐름단면적, Q 는 유량, g 는 중력가속도이고, I_1 , I_2 는 각각 단면에서의 정수압력과 단면변화로 인하여 생성된 측면 정수압력을 나타낸다. S_0 , S_f 는 중력을 고려하기 위한 하상경사와 마찰력을 설명하기 위한 마찰경사로 경험공식인 Manning 식으로부터 계산될 수 있으며, 다음 Eq. (2a) ~ (2d)에 보인 바와 같다.

$$I_1 = \int_0^{h(x)} [h(x) - \zeta] \sigma(x, \zeta) d\zeta \quad (2a)$$

$$I_2 = \int_0^{h(x)} (h - \zeta) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right]_{h=h_0} d\zeta \quad (2b)$$

$$S_0 = -\frac{\partial z}{\partial x} \quad (2c)$$

$$S_f = \frac{n^2 Q |Q|}{R^{1/3} A} \quad (2d)$$

여기서, h 는 수심이고, σ 는 수심 ζ 일 때의 수면폭이며, z 는 하상표고를 의미한다.

3. Riemann 해법을 이용한 유한체적모형의 개발

유한체적법에서는 Fig. 1과 같이 중심에 흐름 변수값이 지정되는 N 개의 격자가 사용된다. 각 격자의 사이에 $N-1$ 개의 경계면이 있으며, 단일하도의 경우 2개의 경계조건이 필요하다. 실측된 하천횡단면을 사용하기 위해서 각 단면은 격자의 중심에 지정되며, 두 단면간의 거리는 격자중심의 거리가 된다. 본 연구에서는 HLL Riemann 근사해법을 이용하여 시간공간의 2차 정확도로 확장한 MUSCL(Monotone Upstream-centred Schemes for Conservation Laws) 기법을 사용하여 경계면에서 흐름율을 계산하였다.

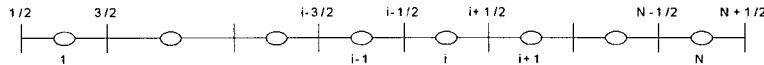


Fig. 1. Definition of Cell-centered grid

MUSCL 기법은 2차 정확도를 위하여 수치적인 계산 이전에 자료를 재구성하는 기법이다. 자료의 재구성에 인접자료의 값을 사용함으로서 공간에서 2차 정확도를 가지게 된다. 본 연구에서는 흐름율과 생성항의 균형을 맞추어주기 위하여 Zhou 등(2001)이 제안한 수면경사법을 사용하였으며, Eq. (3)과 같다.

$$\Delta_i = \frac{1}{2} (\bar{U}_{i^n} - \bar{U}_{i-1^n}) + \frac{1}{2} (\bar{U}_{i+1^n} - \bar{U}_{i^n}) \quad (3)$$

여기서 \bar{U} 는 인접 격자의 수위차에 의해 재구성된 수위로 계산된 단면적과 인접 격자의 유량으로 Δ_i 는 선형

적으로 계산된다.

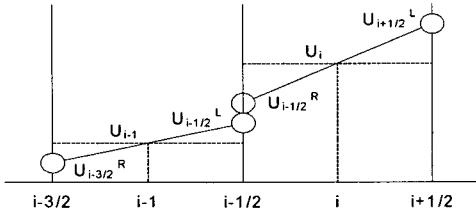


Fig. 2. Data reconstruction

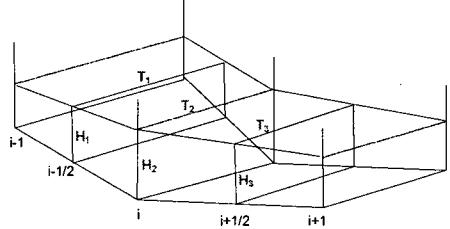


Fig. 3. Geometry of Control volume

재구성된 자료는 시간에 대하여 2차 정확도를 가지기 위하여 $0.5\Delta t$ 시점의 값을 예측되는 과정이 필요하다. 이 과정은 Eq. (4a), (4b)와 같다.

$$U_{i-1/2}^{R*} = U_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(U_{i-1/2}^R) - F(U_{i+1/2}^L)] \quad (4a)$$

$$U_{i+1/2}^{L*} = U_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(U_{i-1/2}^R) - F(U_{i+1/2}^L)] \quad (4b)$$

자료의 재구성과 $0.5\Delta t$ 시점의 예측을 마치면, 경계면에서는 $U_{i-1/2}^{L*}$ 과 $U_{i-1/2}^{R*}$ 의 새로운 Riemann 문제가 성립되며, HLL Riemann의 근사해법을 사용하여 경계면에서의 흐름율이 Eq. (5)로 계산된다.

$$F^{MUSCL} = \frac{S^{R*}F^{L*} - S^{L*}F^{R*} + S^{L*}S^{R*}(U^{R*} - U^{L*})}{S^{R*} - S^{L*}} \quad (5)$$

하상경사에 의한 생성항은 유한체적의 하상경사와 흐름단면적의 시간/공간 적분과의 곱으로 계산된다. 흐름단면적의 시간/공간 적분을 위하여 시간에 있어서는 중간점 공식이 사용되면 Eq. (6)과 같다.

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A(S_0)dx = \frac{Z_{i-1/2} - Z_i}{6} \{2T_1H_1 + T_1H_2 + T_2H_1 + 2T_2H_2\} \\ + \frac{Z_i - Z_{i+1/2}}{6} \{2T_2H_2 + T_2H_3 + T_3H_2 + 2T_3H_3\} \quad (6)$$

두 직사각형 단면의 수면폭의 변화는 축면 정수압의 차이를 유발한다. 하상경사 항을 고려할 때와 마찬가지로 두 단면 사이가 선형인 것으로 가정하면, 수면폭 변화에 의한 정수압력의 증가를 계산할 수 있다. 수면폭의 변화로 생성된 정수압력은 Eq. (7)과 같다.

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} I_2 dx = \frac{1}{6} (H_2^2 + H_2H_1 + H_1^2)(T_2 - T_1) + \frac{1}{6} (H_3^2 + H_3H_2 + H_2^2)(T_3 - T_2) \quad (7)$$

유한체적 내의 마찰경사로 인한 생성항은 격자내부 절점에서 계산된 마찰경사를 평균값으로 가정하여 Eq. (8)과 같이 계산하였다.

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} AS_j dx = \frac{S_{f_i}}{6} \{(H_2^2 + H_2H_1 + H_1^2)(x_i - x_{i-1/2}) + (H_3^2 + H_3H_2 + H_2^2)(x_{i+1/2} - x_i)\} \quad (8)$$

4. 실제하천에서 모형의 검증

4.1 보존특성(C-property)의 검증

흐름을 계산과 생성항 계산의 균형으로부터 보존 특성을 만족하는지를 검증하기 위하여 일반적으로 많이 사용되는 실험은 댐붕괴 모의 웍샵(Goutal과 Maurel, 1997)에서 제시된 바 있는 정수 중의 하폭과 하상고가 변하는 불규칙 하도이다. 하도길이는 1500 m이고, 직사각형 단면으로 구성되었다. 하상은 약 10%의 역경사 부를 가지고 있으며, 800 m지점에서 급 축소부가 있어, 흐름이 가속될 수 있다. 불규칙한 하도의 하상변화 및 하폭변화는 Fig. 4와 같다. 초기조건은 정수 중의 수위 12 m이며, 경계조건은 상류단에서 유량의 유입이 없으며, 하류단에서 12 m의 수위를 유지하는 조건이다. 모의 종료 시각은 200초이며, 해석해는 정수 중이며, 경계의 유입, 유출이 전혀 없는 상황이므로 유량 또는 유속이 0이며, 수위는 초기의 12 m를 유지하여야 한다. 모의 결과는 Fig. 5와 같다.

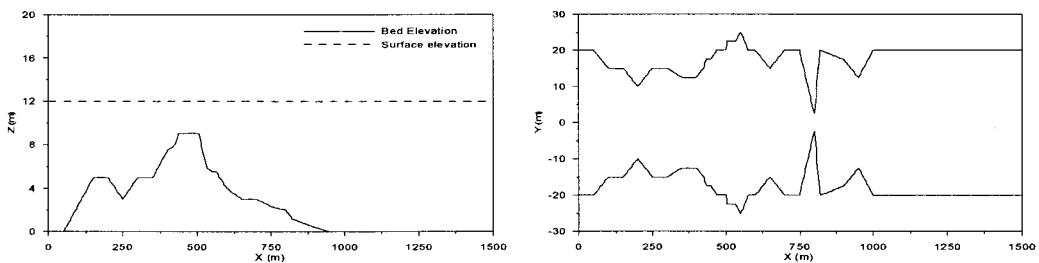


Fig. 4. Breadth and bed slope channel variations

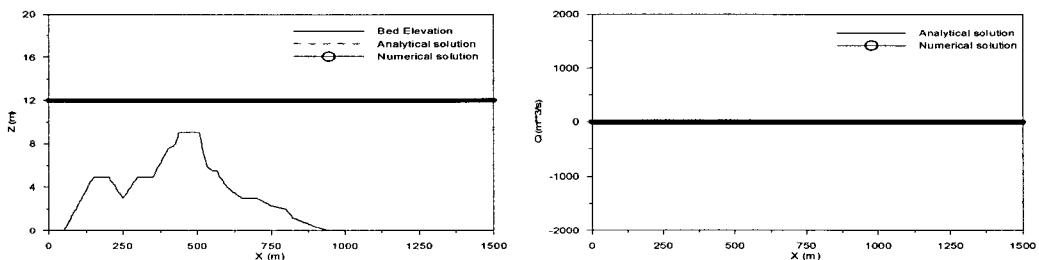


Fig. 5. Water stage and discharge for quiescent flow

보존 특성의 검증을 위하여 Froude 수가 작은 부정류 흐름에 적용하였다. 이 예제의 해석해는 Vazquez-Cendon(1999)이 제시하였다. 실험을 위한 초기조건은 12 m 수위의 정지된 상태이며 경계조건은 Eq. (9)와 같이 4 m의 진폭을 가지는 sin파의 조위이다.

$$h(0, t) = h(0, 0) + \phi(t) \quad Q(L, t) = 0 \text{ m}^3/\text{s} \quad \phi(t) = 4 + 4 \sin\left(\pi\left(\frac{4t}{86400} - \frac{1}{2}\right)\right) \quad (9)$$

수심과 단위폭당 유량의 해석해는 Eq. (10)과 같다.

$$h(x, t) = h(x, 0) + \phi(t) \quad q(x, t) = \frac{\phi'(t)}{B(x)} \int_x^L B(s) ds \quad (10)$$

수치해석을 위하여 600개의 격자와 courant 수를 0.9로 지정하고, 하상조도 계수는 0.1로 하였다. 하류방향

으로 최대 유속이 발생되는 시각인 10,800초에서의 수위와 단위 폭당 유량을 해석해와 비교하여 Fig. 6에 나타내었다.

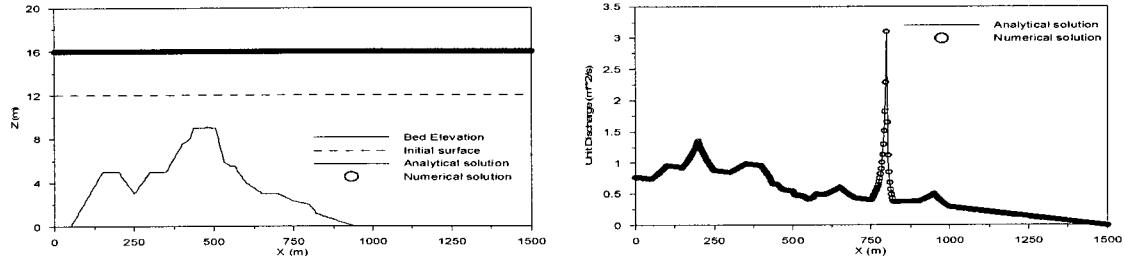


Fig. 6. Water stage and unit discharge for tidal wave propagation flow

Hubbard와 Garcia-Navarro(2000)는 이 예제의 수치해석이 매우 어려운 문제라고 밝혔다. 그 이유는 매우 많은 계산시간에 기인한다. 양해적 기법에서 아주 작은 수치 오차도 계산 시간이 진행될수록 그 크기가 증폭되고 왜곡될 수밖에 없기 때문이다. 본 연구 모형은 수치해석과 해석해가 잘 일치하고 있음을 보여준다.

5. 결 론

본 연구에서는 다양한 형태의 천이류를 안정적으로 해석할 수 있으며, 수치해석에서 어려움이 있는 마른 하도록의 전파를 해석할 수 있는 장점이 있는 Riemann 해법을 이용하여 1차원 유한체적모형을 개발하였다. 개발된 생성항 처리기법이 기존 흐름을 계산과 균형을 만족시킬 수 있음을 확인하기 위하여 해석해가 있는 불규칙한 하도에 적용하여 정확도와 안정성을 검증하고 그 적용성을 평가하였다. 본 연구결과는 향후 다양한 조건의 실제하천 수리해석에 적용될 수 있을 것으로 판단된다.

감 사 의 글

이 연구는 소방방재청 자연재해저감기술개발사업(과제명:내배수 침수재해 저감기술개발) 연구비 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. Goutal, N. and Maurel, F. (Eds.) (1997). *Proceedings of the 2nd Workshop on Dam Break Wave Simulation*, HE 43/97/016/B
2. Hubbard, M.E. and Garcia-Navarro, P. (2000). "Flux Difference Splitting and the Balancing of Source Terms and Flux Gradients." *Journal of Computational Physics*, pp. 89-125.
3. Jin, M. and Fread, D.L. (1977). "Dynamic Flood Routing with Explicit and Implicit Numerical Solution Schemes." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 123, No. 3, pp. 166-173.
4. Vazquez-Cendon, M.E. (1999). "Improved Treatment of Source Terms in Upwind Schemes for the Shallow Water Equations in Channels with Irregular Geometry." *Journal of Computational Physics*, pp. 497-526.
5. Zhou, J.G., Causon, D.M., Mingham, C.G. and Ingram, D.M. (2001). "The Surface Gradient Method for the Treatment of Source Terms in the Shallow-Water Equations." *Journal of Computational Physics*, pp. 1-25.