

< 논문 >

적응적 내부 경계를 갖는 레벨셋 방법을 이용한 셸 구조물의 위상최적설계

박강수[†] · 윤성기^{*}

Topology Optimization of Shell Structures Using Adaptive Inner-Front Level Set Method (AIFLSM)

Kang-Soo Park and Sung-Kie Youn

Key Words : Topology Optimization(위상최적화), Level Set Method(레벨셋 방법), Least-Squares Finite Element Method(최소제곱 유한요소법)

Abstract

A new level set based topology optimization employing inner-front creation algorithm is presented. In the conventional level set based topology optimization, the optimum topology strongly depends on the initial level set distribution due to the incapability of inner-front creation during optimization process. In the present work, an inner-front creation algorithm is proposed, in which the sizes, positions, and number of new inner-fronts during the optimization process can be globally and consistently identified. To update the level set function during the optimization process, the least-squares finite element method is employed. As demonstrative examples for the flexibility and usefulness of the proposed method, the level set based topology optimization considering lightweight design of 3D shell structure is carried out.

기호설명

$\phi(x,t)$: 레벨셋 함수

V : 속도 벡터

Ω_{DES} : 전체 설계영역

Γ_{TRAC} : 트랙션 경계

Ω_{MAT} : 재료 존재영역

Ω_{VOID} : 공극 영역

H : 헤비사이드함수

δ : 델타함수

Δt : 시간 차분 간격

$H(\Omega)$: 힐버트 공간

H_{MAP} : 내부 경계 생성 맵

SE_n : 정규화된 탄성 에너지 밀도

ξ_V : 설계영역 재료 제한비율

V_{TOT} : 설계영역 재료 전체 부피(면적)

ε : 변형율

E : 탄성계수

F_{OBJ} : 목적함수

H_{VOL} : 부피제한 조건

L_{LAG} : 라그랑지안

λ : 라그랑지 승수

ψ : 형상변경에 따른 설계변수의 민감도 방향

\dot{u} : 형상변경에 따른 변위의 민감도 방향

κ : 곡률

Ω_0 : 형상 변경 전 설계영역

Ω_τ : 형상 변경 후 설계영역

[†] 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과

E-mail : pgsoo@kaist.ac.kr

TEL : (032)869-5031 FAX : (042)869-3095

* 한국과학기술원 기계공학과

2. 레벨셋 방법

1. 서론

균질화법과 밀도법에 근거한 기존의 위상최적화 방법에서 벗어나 설계 영역 내에 존재하는 재료의 경계를 다루거나 추출하는데 레벨셋 방법을 이용하여 구조물의 최적형상을 찾는, 레벨셋 위상최적화가 Sethian과 Wiegmann¹에 의해 처음 제안되었다. 이 논문에서 저자들은 구조물의 변형에 관한 평형 방정식과 경계의 개선을 위한 레벨셋 방정식을 모두 유한차분법을 이용하여 계산하였다. 이 후로 구조문제를 유한요소법을 이용하여 레벨셋 방정식은 유한차분법을 적용하는 예제들이 Allaire²와 Wang³에 의해 각각 제시되었으며 이차원과 삼차원 구조물의 최적설계에 적용되었다. 하지만 이러한 기존의 레벨셋을 이용하는 위상최적화 방법들은 현재 상태에서 구조물 경계에서의 형상민감도를 이용하였기 때문에 균질화법이나 밀도법을 이용하는 위상최적화와 같이 설계 과정 중에 새로운 내부 경계가 생기는 위상의 변화가 이루어지지 않았다. 즉, 형상민감도를 이용하는 레벨셋 위상최적화는 초기에 사용자가 초기에 내부 경계를 적절히 생성시키지 않으면 원하는 위상의 변화를 동반할 수 없게 된다. 이는 또한 초기에 생성시킨 내부 경계의 개수에 따라 최적의 형상이 바뀌는 문제점을 안고 있다. 이와 같은 문제점을 해결하기 위한 시도로서 설계영역 내에 새로운 내부 경계의 생성여부를 판단하기 위해 추가적으로 위상민감도 (topological sensitivity or topological derivative)를 도입하는 연구가 진행되다 있다.^{4,5} 이 방법에서는 일정 축차수마다 현재 상태의 구조물의 형상에 대해 위상민감도 해석을 수행하여 내부 경계가 생성될 부분을 찾고 유한한 크기의 내부 경계를 생성시키도록 하였다. 형상민감도만을 이용하는 기존의 레벨셋 위상최적화 방법에 비해 축차의 중간 과정에서 내부 경계가 생성될 수 있어 엄밀한 의미에서의 위상의 변경을 가져올 수 있으나 임의성의 강한 내부 경계 크기와 횃수 등의 사용자가 지정해 주어야 하는 값에 따라 전혀 다른 형상으로 수렴해 가는 문제점을 안고 있다. 따라서 본 연구에서는 앞서 언급한 레벨셋 위상최적화 방법과 달리 구조물이 가지고 있는 에너지 값을 기준으로 상대적으로 낮은 값을 갖는 영역을 주어진 하중에 대해 비효율적인 부분으로 간주하여 이 영역에 새로운 내부 경계를 생성시키는 알고리즘을 제안한다. 검증예제를 통하여 제안된 알고리즘의 위상변화에 대한 유연성 등을 확인하고자 한다.

2.1 기본 개념

레벨셋 방법은 과량, 화염 그리고 변형하는 재료의 진진부와 같이 시간에 따라 변화하는 경계를 기술하고 찾아내기 위해 Osher와 Sethian⁶이 제안한 방법이다. 기본적인 개념은 고차원 상에 정의되는 내연적인 함수의 등위선 (삼차원의 경우 등위면)을 이용하여 경계선 (경계면)으로 설정하고 시간에 따른 변화를 표현하게 된다. 등위선 혹은 등위면의 집합을 구성된 고차원의 함수를 레벨셋 함수라 하고 다음의 해밀턴-자코비 방정식의 일종인 레벨셋 방정식을 계산함으로써 진진 시키게 된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V \cdot \nabla \phi = 0 \quad (1)$$

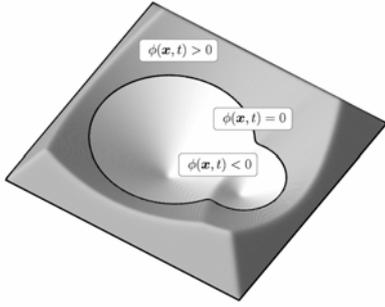
with $\phi(x, t = 0) = \phi_0(x)$

식(1)에서 보는 바와 같이 레벨셋 방정식은 레벨셋 함수를 이미 정의된 속도의 방향으로 그 크기만큼 시간에 따라 이동시켜 경계를 진진하게 한다. 수치해석의 측면에서는 초기에 주어진 레벨셋 함수에 대하여 시간의존 문제를 계산함으로써 매 시간마다 경계의 진화를 얻게 된다. 위상최적화에 있어서 이러한 레벨셋 함수가 설계 구조물의 경계를 표현하며, 따라서 최적화 과정의 설계변수가 된다. 또한 다음의 조건식을 이용하여 위상최적화를 수행할 때 임의의 시간에서의 재료 존재영역과 공극영역, 그리고 경계를 구분지어 표현할 수 있다.

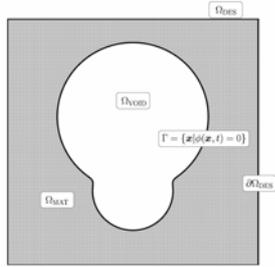
$$\begin{aligned} \phi(x) &> 0 \quad \text{for } x \in \Omega_{\text{MAT}} \\ \phi(x) &= 0 \quad \text{for } x \in \partial\Omega_{\text{MAT}} \\ \phi(x) &< 0 \quad \text{for } x \in \Omega_{\text{VOID}} \end{aligned} \quad (2)$$

Fig. 1 은 레벨셋 함수값에 의한 부호값의 분포를 나타내며 각 레벨셋 함수값의 분포에 따라 나타나는 재료 존재영역, 공극 영역 그리고 경계를 표현하고 있다. 수학적 편의를 위해 레벨셋 함수값에 의해 표현되는 재료 존재영역과 공극영역을 다음의 헤비사이드 함수를 이용하여 나타낼 수 있다.

$$H(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{if } \zeta \leq 0 \\ 1 & \text{if } \zeta > 0 \end{cases} \quad (3)$$



(a) Sign of level set function values



(b) Material domain, void domain and boundary

Fig. 1 Domains and boundary depicted by level set function values

2.2 최소제곱 유한요소 수식화

기존의 레벨셋 방법과 관련한 연구에서는 식 (1)의 레벨셋 방정식을 풀기 위한 수치해석 방법으로서 ENO (essentially non-oscillatory)⁷ 혹은 WENO (weighted ENO)⁷ 등의 유한차분법에 근거한 알고리즘이 적용되었다. 하지만 이러한 방법들은 해석영역의 형상이나 경계조건이 복잡하게 되는 경우 적용에 한계가 있기 때문에 본 연구에서는 유한요소법에 근거한 최소제곱 유한요소법⁸을 적용하였다. 식(1)의 최소제곱 유한요소 수식화 과정은 다음과 같다. 우선 식(1)을 시간과 공간 미분항으로 각각 분리한 후 후방차분법을 적용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi^{k+1} - \phi^k + \Delta t \left(u^k \frac{\partial \phi^{k+1}}{\partial x} + v^k \frac{\partial \phi^{k+1}}{\partial x} + w^k \frac{\partial \phi^{k+1}}{\partial x} \right) = 0 \quad (5)$$

식 (5)를 행렬식 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$A^{k+1} \phi^{k+1} = r^{k+1} \quad (6)$$

여기서

$$A^{k+1} = \left[1 + \Delta t \left(u^k \frac{\partial}{\partial x} + v^k \frac{\partial}{\partial x} + w^k \frac{\partial}{\partial x} \right) \right]$$

$$\phi^{k+1} = [\phi^{k+1}]$$

$$r^{k+1} = [\phi^k]$$

시험함수 $\phi \in H^1(\Omega)$ 을 이용하여 식(6)에 최소제

곱 유한요소 수식화를 수행하면 다음의 최종적인 행렬식을 얻을 수 있다.

$$B(\phi, \phi) = R(\phi) \quad \text{for all } \phi \in H^1(\Omega) \quad (7)$$

여기서

$$B(\phi, \phi) = (A^{k+1} \phi^{k+1}, A^{k+1} \phi)$$

$$R(\phi) = (r^{k+1}, A^{k+1} \phi)$$

3. 내부 경계 생성 알고리즘 및 최적화 문제 수식화

기존의 레벨셋 위상최적화의 경우 초기의 레벨셋 함수의 분포에 따라 수렴된 최적해가 상당히 의존하는 경향을 가지고 있다. 예로서 Fig. 2는 초기에 설계영역 전체에서 레벨셋이 존재하는 경우 기존의 레벨셋 위상최적화의 수렴과정을 보여준다. Fig. 2에서 보는 바와 같이 초기에 내부 경계가 존재하지 않는 경우 기존의 형상최적설계와 같이 경계만 변할 뿐 설계영역 가운데에 새롭게 내부 경계가 생성되지 않는 경향을 보인다. 본 연구에서는 기존의 레벨셋 위상최적화의 이러한 단점을 보완하고 개선하기 위해 새로운 개념으로서 내부 경계 생성 맵을 도입하여 이러한 한계점을 극복하고자 한다.

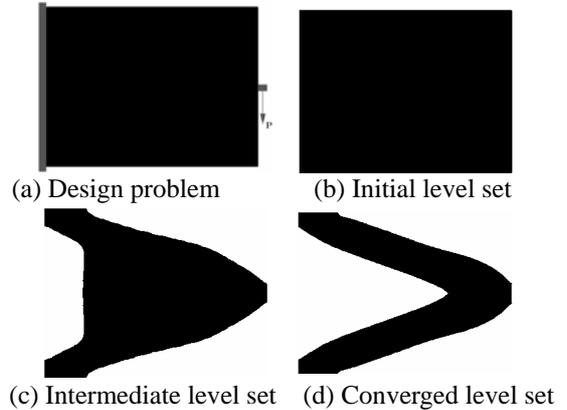


Fig. 2 Motivating example – results of conventional level set based topology optimization

3.1 내부 경계 생성 맵

레벨셋 위상최적화를 수행하는 과정에서 임의의 축차과정에서 응력이나 변형률 혹은 탄성 에너지 밀도의 분포는 레벨셋의 분포와 밀접한 관계를 가지고 있다. 즉, 레벨셋이 양의 값을 가지는 영역 내에서 재료가 존재하게 되므로 최적화 과정에 필요한 선행 해석은 이러한 재료 존재영역 내에서의 정적 평형방정식을 고려하게 된다. 본

연구에서는 경계를 표현하는 레벨셋값의 분포와 탄성 에너지 밀도의 분포를 비교하여 내부 경계가 생성될 수 있는 영역을 조사하고 이를 이용하여 새로운 내부 경계를 생성시킬 수 있는 내부 경계 생성 맵을 구성하였다. 내부 경계 생성 맵을 생성하기 위해 레벨셋의 분포를 개선하는 레벨셋 방정식을 풀기 전, 선형 탄성문제의 평형방정식을 계산하여 탄성 에너지의 분포를 구한다. 계산된 탄성 에너지 밀도 분포를 +1 과 -1 의 값을 갖는, 일정 영역에서 균일한 값을 갖도록 재생성 시킨다. 이 과정을 수식으로 정리하면 다음과 같이 표현할 수 있다. 임의의 점 $x \in \Omega_{DES}$ 에 대해 다음의 부피적분을 정의한다.

$$V_{SE_n}(x) = \int_{\Omega_{DES}} \chi(x) d \quad (8)$$

여기서

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } SE_n(x) \geq SE_n^*, x \in \Omega_{DES} \\ 0 & \text{if } SE_n(x) < SE_n^*, x \in \Omega_{DES} \end{cases}$$

식(8)을 이용하여 V_{SE_n} 와 현재의 레벨셋 함수의 분포로부터 계산되는 재료존재영역의 면적 (혹은 부피)이 동일하게 되는 위치에 대해 다음의 내부 경계 생성 맵을 구성할 수 있다.

$$H_{MAP}(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } V_{SE_n}(x) \geq V_{SE_n^*} \\ +1 & \text{for } V_{SE_n}(x) < V_{SE_n^*} \end{cases} \quad (9)$$

새로운 레벨셋 함수를 얻기 위한 과정은 다음의 식으로 표현 가능하다.

$$\phi^{NEW}(x) = Sgn(x) \circ H_{MAP}(x) \circ \phi^{OLD}(x), x \in \Omega_{DES} \quad (10)$$

여기서

$$Sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } \phi^{OLD}(x) < 0 \text{ and } H_{MAP} = 1 \\ +1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

따라서 상기의 방법으로 레벨셋 함수는 재구성된 새로운 위상 (내부 경계)의 분포에 대하여 최적화 축차과정 중에 개선된다. 이 때 재구성된 레벨셋 함수는 경계부근에서 급격하게 증가 혹은 감소하는 값의 분포를 가질 수 있게 된다. 본 연구에서는 이를 개선하기 위해 레벨셋 함수의 분포에 있어서 형상을 보다 부드럽게 하기 위해 경계완화 (boundary smoothing)를 위한 필터링 과정을 수행하였다. 경계완화를 위한 필터링 과정에서는 주로 영상처리분야에서 많이 사용되고 있는 경계완화 편미분 방정식⁹을 적용하였다. 본

연구에서 사용된 경계완화 편미분 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi(x, \eta)}{\partial t} - \Delta \phi(x, \eta) = 0 \quad (11)$$

with $\phi(x, \eta = 0) = \phi_0(x)$

3.2 컴플라이언스 최소화 수식화

레벨셋 함수의 분포를 고려한 선형 탄성문제는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$a_\phi(u, v) = l_\phi(v) \text{ for all } v \in H_0^1(\Omega) \quad (12)$$

여기서

$$a_\phi(u, v) = \int_{\Omega_{DES}} H(\phi) \varepsilon_u^T E \varepsilon_v d\Omega \quad (13)$$

$$l_\phi(v) = \int_{\Gamma_{TRAC}} H(\phi) h^T v d\Gamma + \int_{\Omega_{DES}} H(\phi) f^T v d\Omega$$

최적화 과정에 사용되는 재료제한조건을 고려한 컴플라이언스 최소화 문제는 다음과 같다.

$$\text{Minimize } F_{OBJ} = \int_{\Omega_{DES}} H(\phi) \varepsilon_u^T E \varepsilon_u d\Omega \quad (14)$$

$$\text{Subject to } H_{VOL} = \int_{\Omega_{DES}} H(\phi) d\Omega \leq \xi_V \cdot V_{TOT}$$

위의 수식과 같이 제한조건이 있는 문제의 경우 라그랑지 승수를 이용하여 다음 식(13)과 같이 쓸 수 있다.

$$L_{LAG} = \int_{\Omega_{DES}} [H(\phi) \varepsilon_u^T E \varepsilon_u + \lambda (H(\phi) - \xi_V)] d\Omega \quad (15)$$

3.3 설계 민감도 및 레벨셋 방정식의 구성

3.2 절에서 언급한 바와 같이 재료제한조건을 포함하는 컴플라이언스 최소화 문제에 있어서 설계변수인 레벨셋 함수값의 미소변화량에 대한 형상민감도는 다음의 식으로 표현된다.

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} \Big|_{\psi} = \frac{\partial F_{OBJ}}{\partial u} \Big|_{ii} + \frac{\partial F_{OBJ}}{\partial \phi} \Big|_{\psi} + \lambda \frac{\partial H_{VOL}}{\partial \phi} \Big|_{\psi} \quad (16)$$

특별히 본 연구에서 이용되는 형상민감도에 관한 식은 Haug et al.¹⁰에 근거하여 기술한다. 식(14)의 첫번째 항은 다음의 수반방정식을 이용하여 표현 가능하다.

$$\frac{\partial F_{OBJ}}{\partial u} \Big|_{ii} = \int_{\Omega_{DES}} \delta(\phi) [f^T u + \kappa \{h^T u\} - \varepsilon_u^T E \varepsilon_u] \psi d\Omega + \int_{\Gamma_{TRAC}} \frac{\delta(\phi)}{|\nabla \phi|} \frac{\partial \phi}{\partial n} \psi d\Gamma \quad (17)$$

식 (14)의 두번째, 그리고 세번째 항은 다음과

같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial F_{\text{OBJ}}}{\partial \phi} \Big|_{\psi} = \int_{\Omega_{\text{DES}}} \delta(\phi) \varepsilon_u^T E \varepsilon_u \psi d\Omega \quad (18)$$

$$\frac{\partial H_{\text{VOL}}}{\partial \phi} \Big|_{\psi} = \int_{\Omega_{\text{DES}}} \delta(\phi) \psi d\Omega \quad (19)$$

여기서 최적해에 관한 KT(Kuhn-Tucker) 조건을 식(15)에 적용할 경우 경계적분항은 사라지게 된다. 따라서 식(15)와 식(16), 그리고 식(17)로부터 최종적인 라그랑지 범함수에 관한 형상민감도는 다음과 같다.

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} \Big|_{\psi} = \int_{\Omega_{\text{DES}}} \delta(\phi) [M_{\phi} + \lambda] \psi d\Omega \quad (20)$$

$$\text{여기서 } M_{\phi} = f^T u + \kappa h^T u$$

형상민감도와 레벨셋 방정식과의 연결에 관해 살펴보기 위해 다음과 같이 정의된 형상변형 과정에 관한 테일러 전개를 고려하자.

$$\Omega_{\tau} = \Omega_0 - [\tau V_{\text{SV}}] \Omega_0 \quad (21)$$

이 때 형상변형에 관한 속도장에 해당하는 V_{SD} 를 다음과 같이 정의한다.

$$V_{\text{SV}} = [M_{\phi} + \lambda] \psi \quad (22)$$

형상변형에 관한 속도장을 식(19)와 같이 정의할 때, 다음과 같이 최적화 과정 중 라그랑지 범함수의 감소가 보장된다. 즉,

$$L_{\text{LAG}} \Big|_{\Omega_{\tau}} = L_{\text{LAG}} \Big|_{\Omega_0} - \tau \int_{\Omega_0} [M_{\phi} + \lambda]^2 \psi^2 d\Omega \quad (23)$$

따라서 본 연구에서 식(20)에서 정의된 속도장 레벨셋 방정식의 속도항으로 고려하여 매 시간 축차 과정에서 최적의 위상과 형상을 찾는 위상최적화를 수행할 수 있게 된다.

4. 적용예제

4.1 강철 텍 경량화 설계

최적화 과정에 관한 흐름도를 Fig. 3 에 나타내었다. 흐름도로부터 알 수 있듯이 가장 먼저 선형 탄성문제에 관한 문제를 먼저 정의한 후 레벨셋 개선과 최적화에 필요한 목적함수 및 민감도의 해석을 차례로 수행한다. 내부 경계 생성 맵은 레벨셋 값을 개선하는 과정에서 적용된다. 제안된 내부 경계 생성 알고리즘을 이용한 레벨셋 위상최적화의 예제로서 강철 텍의 경량화 설계를 고려하였다. 적용예제에 사용된 모델의 기하학적 형상은 Fig. 4 와 같다. 2500 개의 이차원 선형 쉘 요소를

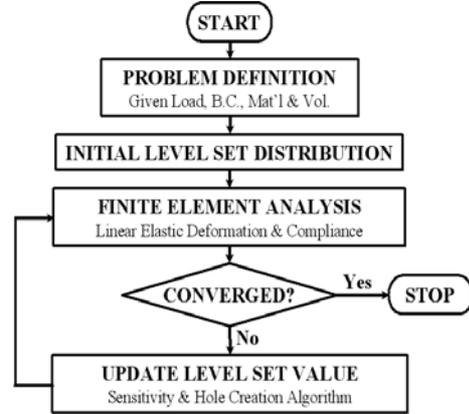


Fig. 3 Flowchart of optimization procedure

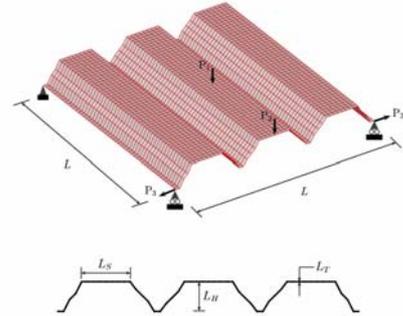


Fig. 4 Geometry of steel deck

사용하여 설계영역을 분할하였으며 변형해석은 평면응력상태를 가정하였다. 해석 및 설계에 적용된 변수 및 조건을 Table 1 에 나타내었다. Fig. 5 는 최적화 중간과정에서 얻어진 형상과 수렴된 최적해를 나타낸다. Fig. 5 에서 보는 바와 같이 최적화 과정 중 새로운 내부 경계가 생성되는 것을 확인할 수 있다. Fig. 6 은 단조함수의 특징을 갖는 목적함수의 변화를 보여준다.

Table 1 Design parameters

Design condition	Specified data
Geometry	L=1.2m, LS=20cm, LH=11cm, LT=1mm
Mesh	2500 Linear Quadrilateral Shell Element
Material	Steel ($E=200\text{GPa}$, $\nu=0.3$)
Applied load	P1=10kN, P2=20kN, P3=1kN
Volume ratio	30%

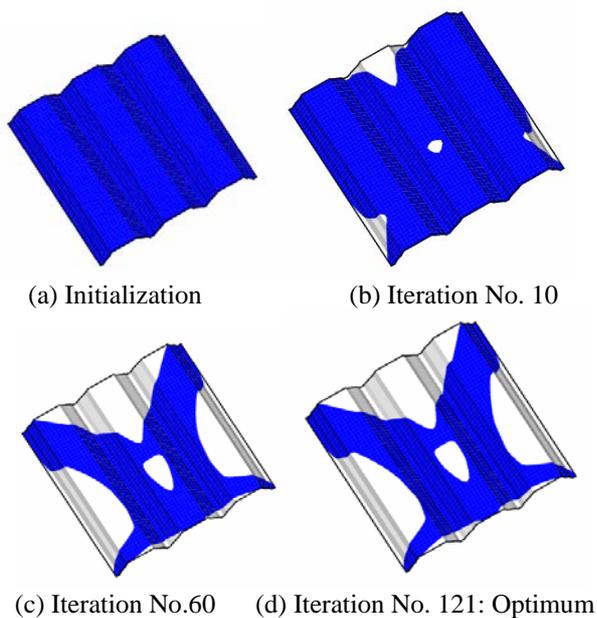


Fig. 5 Optimization history

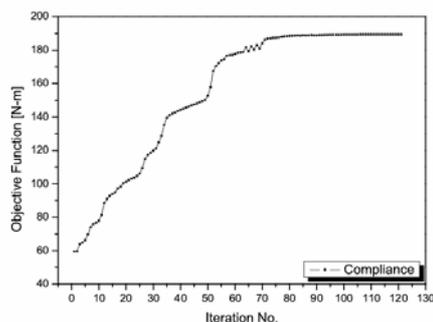


Fig. 6 Optimization history of objective function

5. 결론

기존의 레벨셋 위상최적화 방법에서는 최적화의 중간과정에서 형상민감도를 사용하여 레벨셋 함수값을 개선하기 때문에 균질화법과 밀도법에 근거한 기존의 위상최적화와 같은 내부 경계의 생성을 동반한 위상 변화가 이루어질 수 없었다. 따라서 본 연구에서는 최적화 축차과정에서 선행 해석에서 얻어진 탄성 에너지 밀도값을 바탕으로 내부 경계가 생성될 수 있는 부분에 내부 경계 생성 맵을 구성하고 이를 현재 상태의 레벨셋 함수와 함께 고려하여 새로운 내부 경계영역을 생성시켜 엄밀한 의미에서의 레벨셋 위상최적화를 수행하였다. 예제에서는 삼차원 쉘 구조물의 위상최적설계에 제안된 방법을 적용하여 최적형상을 도출할 수 있었다. 적용과정 및

최종적인 결과로부터 제안된 알고리즘이 적절히 작동하고 있으며 동시에 내부 경계가 초기에 전혀 주어지지 않은 경우에 있어서도 수렴된 최적해에서는 새로운 내부 경계가 생성됨을 확인할 수 있었다. 따라서 본 연구에서 제안한 내부 경계 생성 알고리즘을 이용한 레벨셋 위상최적화가 초기의 내부 경계에 둔감하게 최적해의 수렴성을 가져올 수 있음을 확인하였다. 향후 추가적으로 다양한 분야에 있어서 제안된 레벨셋 위상최적화 방법을 적용함으로써 그 유용성을 확인하고자 한다.

참고문헌

- (1) Setiyan, J. A. and Wiegmann, A., 2000, "Structural boundary design via level set and immersed interface method," *Journal of Computational Physics*, Vol. 163, No. 2, pp. 489~528.
- (2) Allaire, G., Jouve, F. and Toader A.M., 2004, "Structural optimization using sensitivity analysis and a level set method," *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, No. 1, pp. 363~393.
- (3) Wang, M. Y., Wang, X. M. and Guo D.M., 2003, "A level set method for structural topology optimization," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No.1-2, pp. 227~246.
- (4) Allaire, G., Jouve, F. and Toader A.M., 2004, "Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method," *Internal report*, n. 555, CMAP, Ecole Polytechnique.
- (5) Wang, X. M., Mei, Y. and Wang, M.Y., 2004, "Incorporating topology derivatives into level set methods for structural topology optimization," *Proceeding of 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, Albany, New York.
- (6) Osher, S. and Sethian, J.A., 1988, "Front propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations," *Journal of Computational Physics*, Vol. 79, pp.12~49.
- (7) Osher, S. and Fedkiw, R., 2003, "Level set methods and dynamic implicit surfaces," *Springer-Verlag*, Berlin.
- (8) Jiang, B.N., 1998, "The least-squares finite element method," *Springer-Verlag*, Berlin.
- (9) Aubert, G. and Kornprobst, P., 2001, "Mathematical problems in image processing: partial differential equations and the calculus of variations," *Springer-Verlag*, Berlin.
- (10) Haug, E.H., Choi, K.K., and Komkov V., 1986, "Design sensitivity analysis of structural systems," Academic press, Orlando.