

# 수치해석을 통한 충격 시 벨빌 스프링의 비선형 특성 고찰 Non-linearity characteristics consideration of the Bellevilles Spring under Shock using Numerical Analysis

\*#오재응<sup>1</sup>, 방승우<sup>2</sup>, 이해진<sup>2</sup>, 이정윤<sup>3</sup>

\*# J. E. Oh(jeoh@hanyang.ac.kr)<sup>1</sup>, S. W. Bang<sup>2</sup>, H. J. Lee<sup>2</sup>, J. Y. Lee<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 한양대학교 기계공학부, <sup>2</sup>한양대학교 대학원 기계공학과, <sup>3</sup>경기대학교 기계시스템 디자인 공학부

Key words : Bellevilles spring, non-linearity, Analysis of stiffness effect

## 1. 서론

Spring 이라 하면 일반적으로 선형성이 보장되는 coil spring 을 말한다. 여기서 선형성이 보장된다는 것은 입력값이 system(spring)을 통과하여도 그 출력을 예상할 수 있다는 것을 뜻한다. 비선형을 지닌 벨빌 스프링은 2 차, 3 차의 강성계수를 가지고 있으며 진동방정식에 적용하여 수치적인 접근을 통해 그 응답을 구할 수가 있다.

벨빌 스프링은 선형성을 지닌 일반 Coil spring 달리 비선형성을 지니고 있으며 이런 비선형 특성을 이용하면 충격에 대한 완충효과를 요구사항에 맞게 변화시킬 수 있다.

즉, 충격에 대한 응답 또한 비선형 특성을 가지게 되는 것으로 벨빌 스프링의 형상 및 적층 개수를 변화시킴으로써 응답 변위, 가속도, 속도를 요구 수준으로 맞출 수 있을 것이다.

본 연구에서는 충격에 대한 벨빌 스프링에 대한 비선형 응답을 수치 simulation 에 의해 구하고 더 나아가 강성항의 영향도 분석 수행을 통하여 벨빌 스프링의 강성항과 설계 인자의 관계를 살펴볼 것이다.

## 2. 이론

바닥가진에 대한 1 자유도 진동 방정식은 다음과 같다.

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (1)$$

$$m(\ddot{z} + \ddot{y}) + c(\dot{z}) + k(z) = 0 \quad (2)$$

$$x = z + y \quad (3)$$

$$\therefore m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \quad (4)$$

벨빌 스프링에 대한 식은 다음과 같다.

$$F = \frac{4E}{1 - \mu^2} \frac{zt^3}{K_1 D_e^2} \left[ \left( \frac{h_0}{t} - \frac{z}{t} \right) \left( \frac{h_0}{t} - 0.5 \frac{z}{t} \right) + 1 \right] \quad (5)$$

$$K_1 = \frac{1}{\pi} \frac{\left( \frac{\delta - 1}{\delta} \right)^2}{\delta + 1 - \frac{2}{\delta - 1} \ln \delta} \quad \delta = \frac{D_e}{D_i} \quad (6)$$

$$F_c = \frac{4E}{1 - \mu^2} \frac{zt^3}{K_1 D_e^2}, (z = h_0) \quad (7)$$

(4)식과 (8)식을 적용하여 벨빌 스프링이 적용된 1 자유도 진동방정식을 표현하면 다음과 같다.

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \left[ F_c \cdot \left( \frac{h_0}{t^2} + \frac{1}{h_0} \right) \cdot z - \left( \frac{1.5}{t^2} \right) \cdot z^2 + \left( \frac{1}{2h_0 t^2} \right) \cdot z^3 \right] = m\ddot{y} \quad (8)$$

선형성을 지닐 경우 정적 처짐이 선형적이므로 고려를 하지 않지만 비선형일 경우 정적 처짐 또한 비선형성을

지니게 되므로 정적처짐을 고려한 1 자유도 진동방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \left[ F_c \cdot \left( \frac{h_0}{t^2} + \frac{1}{h_0} - \frac{1.5}{t^2} \times 2\delta_s + 3\delta_s^2 \right) \cdot z - \left( \frac{1.5}{t^2} - 3\delta_s \right) \cdot z^2 + \left( \frac{1}{2h_0 t^2} \right) \cdot z^3 \right] = m\ddot{y} \quad (9)$$

( $\delta_s$ : 정적 처짐)

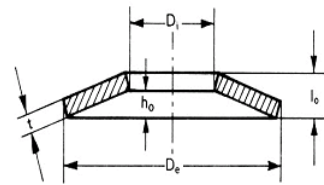


Fig. 1 Conventional shape of a Bellevilles spring

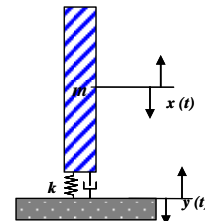


Fig. 2 Free body diagram of 1-DOF model of Base excitation

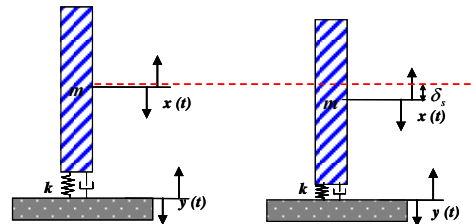


Fig. 3 Free body diagram of consideration of static deflection

## 3. Simulation 및 고찰

simulation 에 적용한 외부 입력은 Double half sine 을 사용하였으며 바닥 가진이다. 입력에 대한 결과로써 상대변위와 충격가속도를 구하였으며 벨빌 스프링의 적층 개수와 형상에 대한 상대변위와 충격가속도의 변화를 살펴보았다.

Table 1.에 시뮬레이션에 적용된 벨빌 스프링의 제원을 Table 2. 에 mass, stiffness, damping factor 를 나타내었으며 Table 3.에 외부 입력에 대한 조건을 명시하였다.

벨빌 스프링은 허용변위가 ho 에 의해서 결정되며 벨빌 스프링 단품이 mass 에 의한 정적 처짐을 견딜 수 있는가가 가장 큰 설계 변수이다. 따라서 이 모든 조건에 만족하는 조건을 기준으로 벨빌 스프링의 특성을 살펴보았다. 그 다음으로 설계 인자의 변화를 통하여 설계변수의 영향도

분석을 수행하였다.

Table 1 Specification of Bellevilles spring

Specification	ho	Fc	t	Di	De
value	1.75mm	8904N	2.50mm	31mm	63mm

Table 2 Parameters of 1-DOF system

	M(mass)	C(Damping factor)
value	660kg	0.03

Table 3 Parameters of Shock Input

	a1	a2	t1	t2
value	700	-464.2	8.97	13.53

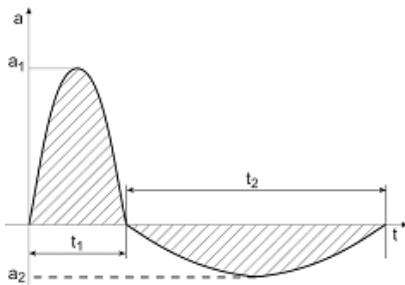


Fig. 4 Shock Input : Double half sine

### 3.1 벨빌 스프링 49개 적층 시 시뮬레이션

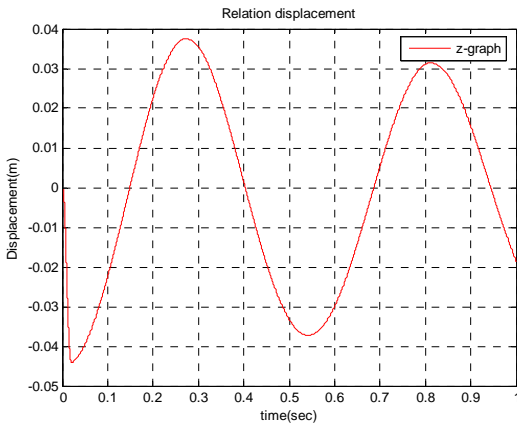


Fig. 5 Response of Relation-Displacement

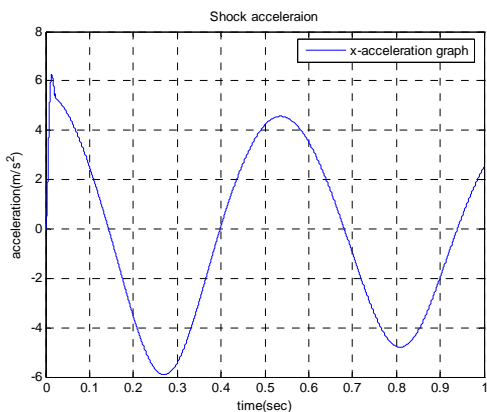


Fig. 5 Response of Shock-Acceleration

### 3.2 설계 인자 변화에 따른 영향도 분석

벨빌 스프링의 강성항은 1 차, 2 차 그리고 3 차항이 존재하게 된다. 각 강성항에 영향을 주는 설계 인자로는 ho

와  $\delta_s$  그리고 t 가 존재하며 강성항의 영향도를 분석함으로써 충격에 대한 벨빌 스프링의 비선형 특성을 알아보았다.

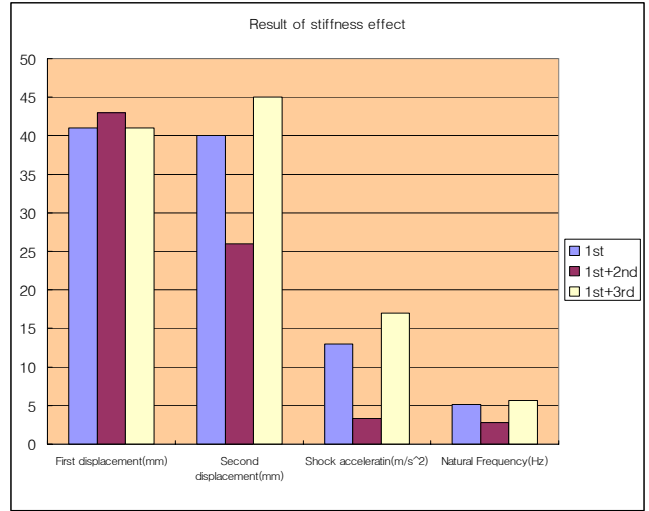


Fig. 7 Result of stiffness effect

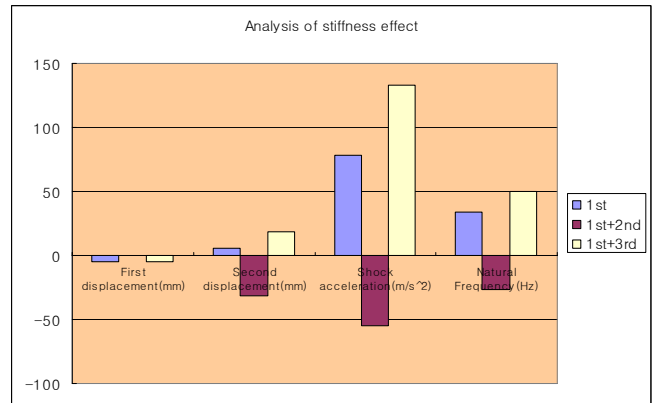


Fig 8. Analysis of stiffness effect

## 4. 결론

본 연구를 통해 충격에 대한 벨빌 스프링의 응답과 각 1 차, 2 차, 3 차 강성항의 응답에 미치는 영향을 분석하였다. 이를 통해 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 충격에 대한 벨빌 스프링의 응답 역시 비선형 특성을 가진다.

(2) 1 차만 존재하는 선형과 비교했을 경우 변위의 영향보다는 가속도와 고유진동수가 증가함을 볼 수 있으며 이를 통해 2 차, 3 차 강성항은 등가 강성을 감소시킨다는 것을 알 수 있다.

(3) 변위 및 충격 가속도 응답을 줄이기 위해서는 설계 인자인 ho 를 크게 함으로써 3 차 강성항을 감소시키고  $\delta_s$  를 작게하여 2 차 강성항을 증가시키는 설계가 이루어져야 한다. 단 Fc 값이 mass 를 견딜 수 있는 범위가 되어야 한다.

## 참고문헌

1. Daniel J. Inman, "Engineering Vibration", Prentice Hall .
2. KEY BELLEVILLES. INC, "Engineering Handbook", KEY BELLEVILLES. INC
3. Robert L. Norton, "Machine Design", Prentice Hall.