

# 직교배열표를 이용한 다단계 최적설계 방법

## Multilevel Optimization Method Using Orthogonal Arrays

\*김강민<sup>1</sup>, 김종규<sup>1</sup>, 백석흠<sup>1</sup>, 이경영<sup>2</sup>, 전형용<sup>2</sup>, 조석수<sup>2</sup>, #주원식<sup>3</sup>

\*K. M. Kim(ascade79@nate.com)<sup>1</sup>, J. K. Kim<sup>1</sup>, S. H. Baek<sup>1</sup>, K. Y. Lee<sup>2</sup>, H. Y. Jeon<sup>2</sup>, S. S. Cho<sup>2</sup>, #W. S. Joo(wsjoo@dau.ac.kr)<sup>3</sup>  
<sup>1</sup> 동아대학교 대학원 기계공학과, <sup>2</sup> 강원대학교 자동차공학과, <sup>3</sup> 동아대학교 기계공학과

Key words : Multilevel Analysis, Orthogonal Array, Shape Optimization, Subproblem Approximation Method

### 1. 서론

Newton과 Leibnitz 이래로 고전적인 최적화 이론은 미분과 깊은 관련이 있다. 그러나 실제적인 공학설계 응용에서는 미분이 가능하지 않는 최적화 문제를 쉽게 만나게 된다. 미분이 가능하지 않는 함수의 최적화는 일반적으로 반응표면방법론(response surface methodology)을 이용한 근사 최적화 기법(approximate optimization technique)을 이용한다.<sup>1</sup>

반응표면방법론은 n개 (n>1)의 설계변수에서 예측된 응답 y의 관계를 근사한 것으로 낮은 차수의 다항식 형태인 유연한 함수의 근사모델이다. 근사 최적해는 근사모델의 정확도에 영향을 받고 근사모델의 차수의 선택은 강건성(또는 효율성)과 정확도 사이의 절충(trade-off)이 필요하다.

근사화된 함수를 최적화하기 위해서는 반복적인 작업과 적절한 최적화 알고리즘과의 효과적인 연계가 필요하다. 본 연구는 설계변수 범위 재설정에 의한 근사모델과 최적해 등의 정밀도를 향상시키기 위한 방법으로 다단계 해석(multilevel analysis)을 이용한 최적설계 방법을 제안한다. 다단계 해석은 적정한 수준 범위가 불명확한 경우 최초로 큰 수준 범위를 설정하고 근사모델과 최적화 계산을 수행한 후 그 결과를 기초로 수준 범위를 수정하여 재해석을 수행한다. 이러한 과정을 반복하는 것에 의해 최적해가 있다고 생각되어지는 값의 근방까지 수준범위를 이동시켜 가는 방법이다.

적용 예제로 끝단에 집중하중을 받는 외팔보(cantilever beam)의 최소질량을 갖는 형상최적설계(shape optimization) 문제에 대해 제안된 방법을 적용하여 유효성을 설명한다.

### 2. 다단계 해석

근사 최적설계에 대한 최적해의 정밀도는 근사모델의 정밀도에 영향을 받는다. 또한 근사모델은 설계영역의 수준범위 내에서의 회귀식이기 때문에 수준범위 구간을 좁게 하는 경우가 근사모델의 정확도를 향상시킨다. 본 논문의 다단계 해석은 직교배열표(orthogonal array)를 이용한 각 반복진행마다 수준범위의 비율과 근사모델의 정확도를 계산하여 근사모델을 관리하는 전략이다.

### 3. 적용 예제

#### 3.1 문제 정의

외팔보의 형상최적설계 문제에 대해 다단계 해석을 수행한다. 외팔보는 보의 끝단에 하중을 받고 전체 단면의 최대굽힘응력(maximum bending stress)이 일정한 완전응력보(fully stress beam) 또는 일정강도보(beam of constant strength)<sup>2</sup>로 가정한다. 이러한 완전응력보는 응력 제약조건에 최소질량 설계해와 질량 제약조건에 최대강성 설계해의 형상을 나타낸다.

본 논문의 외팔보의 장방향 단면에 대한 완전응력보의 이론적인 최적 형상(전단응력에 대한 이론적인 형상은 무시됨)은 식 (1)~(3)과 Fig. 1로 나타낸다.

$$\text{보의 높이} : y = \sqrt{\frac{6W(L-x)}{b\sigma_b}} \quad (1)$$

$$\text{보의 끝단 높이} : h_0 = \sqrt{\frac{6WL}{b\sigma_b}} \quad (2)$$

$$\text{최대 처짐량} : \delta_{\max} = \frac{8W}{bE} \left(\frac{L}{h_0}\right)^3 \quad (3)$$

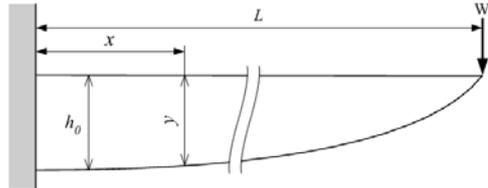


Fig. 1 Optimal shape of fully stress beam

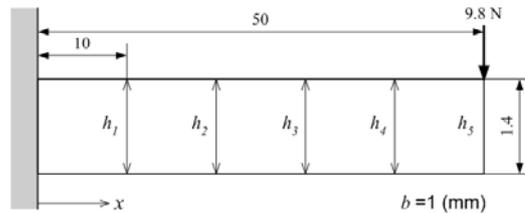


Fig. 2 Design domain with five design variable



Fig. 3 Finite element model of cantilever beam

Table 1 Design variables and their levels

Design variable	Level 1	Level 2	Level 3	Level 4	Level 5
$h_1$ (mm)	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$h_2$ (mm)	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$h_3$ (mm)	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$h_4$ (mm)	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$h_5$ (mm)	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4

여기서,  $\sigma_b$ 는 허용응력, b는 판폭으로서 일정하다. 외팔보의 설계에 대해 완전응력보의 식 (1)~(3)을 적용하면 각 단면의 높이는 식 (4)가 된다. 이러한 형상을 이론적인 최적해로서 다단계 최적설계 결과와 비교 및 검토하기 위해 사용한다.

$$y = \sqrt{0.0392(50-x)} \quad (4)$$

또한, 완전응력보의 최대굽힘응력(전 단면이 동일)은 150 MPa 이고 이 값을 최적화 계산에 대한 제약조건으로 사용한다.

#### 3.2 다단계 최적설계

최적설계 문제는 보의 전체길이가 50 mm이고 구속부분의 높이가 1.4 mm, 보의 끝단에 9.8 N의 집중하중이 가해지고 있는 외팔보의 최소질량 설계이다. 설계변수는 보의 구속부분으로부터 10mm 간격으로 분할한 각 분할 부분의 보 높이  $h_i$ 로 정의하고 보의 폭은 1 mm로 일정하다. Fig 2는 보의 형상과 설계변수를 나타낸 것이다.

외팔보의 유한요소해석은 범용 구조해석프로그램인 ANSYS를 이용하였다. 각 설계변수 사이의 스플라인 곡선은 ANSYS 매개변수 기능인 APDL(ansys parametric design language)을 이용하여 형상이 매끄럽게 되도록 하였다.

Fig. 3은 유한요소모델을 나타낸다. 모델의 유한요소 분할은 길이 방향으로 169등분, 높이 방향으로 5등분 하였다. 사용된 요소는 4절점 평면응력요소이다.

Table 3 Theoretical solution for fully stress beam

Area (mm <sup>2</sup> )	h <sub>1</sub> (mm)	h <sub>2</sub> (mm)	h <sub>3</sub> (mm)	h <sub>4</sub> (mm)	h <sub>5</sub> (mm)
45.47	1.252	1.084	0.885	0.626	0

Table 4 Optimal solution of the first level

Area (mm <sup>2</sup> )	h <sub>1</sub> (mm)	h <sub>2</sub> (mm)	h <sub>3</sub> (mm)	h <sub>4</sub> (mm)	h <sub>5</sub> (mm)
52.380	1.269	1.134	1.086	0.649	0.953

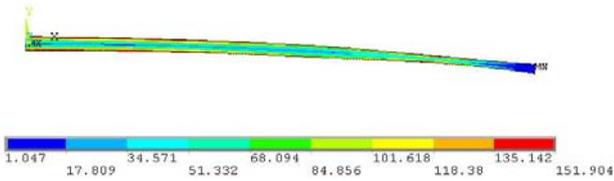


Fig. 4 Stress distribution for optimal shape of the first level

Table 5 Design variables and their levels

Design variable	Level 1	Level 2	Level 3	Level 4	Level 5
h <sub>1</sub> (mm)	0.8	0.9	1.1	1.2	1.3
h <sub>2</sub> (mm)	0.8	0.86	0.98	1.04	1.1
h <sub>3</sub> (mm)	0.8	0.84	0.92	0.96	1.0
h <sub>4</sub> (mm)	0.6	0.64	0.72	0.76	0.8
h <sub>5</sub> (mm)	0.1	0.2	0.4	0.5	0.6

Table 6 Optimal solution of the second level

Area (mm <sup>2</sup> )	h <sub>1</sub> (mm)	h <sub>2</sub> (mm)	h <sub>3</sub> (mm)	h <sub>4</sub> (mm)	h <sub>5</sub> (mm)
48.177	1.247	1.083	0.959	0.622	0.431

3.2.1 제 1단계

1단계로서 최적형상을 완전히 예상할 수 없어서 모든 설계변수의 설계영역(design domain)은 동일 수준범위로 설정한다.

Table 1은 초기 설계변수의 5수준값을 나타낸다. L25 직교배열표 결과에 의해 근사모형을 생성하고 구성된 근사최적화 문제를 계산하여 근사 최적해를 구한다. 참고문헌<sup>1)</sup>에 근사모형 작성과정이 설명되어 있다. 본 논문에서 근사최적화 문제의 목적함수와 구속조건은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize : } & f(x) = \sum_e A_e \\ \text{Subject to : } & \sigma_{\max} \leq 150 \text{ MPa} \\ & h_i^{\text{Lower level}} \leq h_i \leq h_i^{\text{Upper level}} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, 목적함수  $f(x)$ 는 질량을 최소화시키는 것이며, 최대굽힘응력  $\sigma_{\max}$ 는 150 MPa를 넘지 않고, 설계변수 상한 및 하한 범위를 만족하는 것이다. 각 단계의 최적화 계산은 부문제근사법(subproblem approximation method)을 이용하였다.

Table 3은 식 (4)를 이용하여 계산된 완전응력보의 이론적 최적해이다. Table 4는 1단계 최적화 계산 결과를 나타내고 Fig. 4는 최적형상에 대한 응력해석 결과이다. 최적화 계산에 의해 구해진 질량과 이론적인 완전응력보의 질량과의 오차는 13.2%이다. 1단계 최적화 계산에 의해 얻어진 설계변수 중  $h_4$ 와  $h_5$ 는 설정한 수준범위내의 하한값이 되므로 설정된 수준범위 외부에 최적해가 존재할 가능성이 있다. (본 예제의 경우 미리 완전응력보의 이론적 결과값으로 판단할 수 있다.) 이러한 설계변수의 수준범위를 하한 방향으로 이동시켜 다시 해석함으로써 최적해인 완전응력보의 형상에 접근한다.

3.2.2 제 2단계

2단계는 1단계에서의 최적해를 기초로 설계영역의 수준범위를 재설정 한다. 하한을 나타내는  $h_4$  및  $h_5$ 와 근접한  $h_2$  및  $h_3$

Table 7 Design variables and their levels

Design variable	Level 1	Level 2	Level 3	Level 4	Level 5
h <sub>1</sub> (mm)	1.0	1.06	1.18	1.24	1.3
h <sub>2</sub> (mm)	1.0	1.02	1.06	1.08	1.1
h <sub>3</sub> (mm)	0.85	0.86	0.88	0.89	0.9
h <sub>4</sub> (mm)	0.62	0.626	0.638	0.644	0.65
h <sub>5</sub> (mm)	0.0	0.04	0.12	0.16	0.2

Table 8 Optimal solution of the third level

Area (mm <sup>2</sup> )	h <sub>1</sub> (mm)	h <sub>2</sub> (mm)	h <sub>3</sub> (mm)	h <sub>4</sub> (mm)	h <sub>5</sub> (mm)
47.355	1.259	1.099	0.899	0.648	0

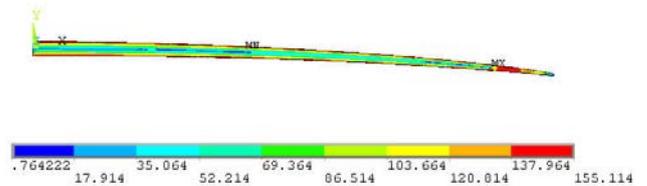


Fig. 5 Stress distribution for optimal shape of the third level

에 대하여 재설정하고 각 설계변수의 수준범위를 좁게 한다. Table 5는 1단계 최적화 결과를 기초로 설계영역의 수준을 재설정 한 것이다.

Table 6은 2단계 최적화 계산에 의해 얻어진 결과이다. 완전응력보의 이론적인 최적해(목적함수)와 비교하면 2단계 최적화 계산의 오차는 5.6%이다. 이러한 결과는 양호한 정밀도라고 말할 수 있지만 보의 끝단 높이를  $h_5$ 는 최적화 결과가 수준범위의 하한값이다. 따라서 다시 설계변수의 수준범위를 재설정하고 해석을 수행하여 보다 좋은 결과값을 얻고자 한다.

3.2.3 제 3단계

3단계는 2단계에서의 최적해를 기초로 수준범위의 하한값을 나타내는  $h_5$ 에 대한 수준범위를 재설정한다.

Table 7은 재설정 한 수준범위를 나타낸다. Table 8의 최적화 계산결과는 모든 설계변수가 설정한 수준범위내로 수렴하고 있다. 또한, 최적화 계산 결과 모든 설계변수 위치에 대한 보의 높이는 Table 3에 나타낸 이론적인 완전응력보의 높이와 매우 근접한 값으로 일치한다. 따라서 다단계 해석 방법에 의해 정밀도가 좋은 최적형상이 얻어질 수 있음을 알 수 있다

Fig 5는 3단계 최적형상에 대한 응력해석 결과이다. 목적함수(질량)에 대한 완전응력보의 이론해와 3단계 최적화 계산의 오차는 4%이다. 이러한 오차 원인은 해석모델에서 보의 끝단 부근인 40 mm와 50 mm사이에 설계변수를 설정하지 않았기 때문이다. 완전응력보의 끝단 형상과 비교해서 설계변수는 이 사이에서 크게 변화하고 있어 끝단 형상에 설계변수를 추가시키는 방법의 의해 오차를 줄일 수 있을 것으로 여겨진다.

4. 결론

적용된 예제의 결론을 요약하면, 최적설계 결과를 예상할 수 없고 설계변수의 범위 설정이 어려운 경우 다단계 해석을 이용해서 최적해의 결과를 재 반영하며 설계영역의 수준범위를 이동시키는 것으로 정밀도가 좋은 최적해를 얻을 수 있다.

참고문헌

- Baek, S. H., Cho, S. S., Kim, H. S., and Joo, W. S., "Trade-off Analysis in Multi-objective Optimization using Chebyshev Orthogonal Polynomials," Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 20, No. 3, pp. 366~375, 2006.
- Gere, J. M., Mechanics of Materials, 6th Edition, Thomson-Engineering, 2003.