

대공간 구조 시스템의 동적 해석을 위한 스펙트럴 요소법의 적용성 평가

The evaluation of applicability of spectral element method for the dynamic analysis of the spatial structures

한 상 을* · 이 상 주** · 조 준 영***

Han, Sang-Eul · Lee, Sang-Ju · Cho, Jun-Yeong

ABSTRACT

Recently, the necessity of efficient and exact method to analyze structures is increasing with the importance of the seismic analysis. But the finite element method used in many field do not give the exact solution unless the length of the element is very short enough to represent the deformation of the element. Because the amount of computer calculation increase with the increasing of the number of degree of freedoms, the finite element method for the exact dynamic analysis of structures would not be efficient. To solve these problems, spectral element method combined spectral method using the principle of wave mechanics and finite element method for the analysis of discrete models is applied to evaluate the behavior of the spatial structures. As a result of analysis, it becomes clear that the spectral element method is faster and more exact than the finite element method.

Keywords: *spatial structures, time history analysis, spectral element method*

1. 서 론

1.1 연구의 목적

최근 건축구조물의 내진설계에 대한 중요성과 함께 정확한 동적해석에 대한 필요성이 증대되고 있으며, 이에 필수적인 시간이력해석을 빠르고 정확하게 수행할 수 있는 해석기법의 개발은 매우 중요할 것으로 사료된다. 특히 가장 널리 쓰이는 해석법인 유한요소법은 구조물의 실제거동을 정확히 파악하기 위해서 일반적으로 많은 수의 요소분할이 요구되어 계산량이 늘어나는 문제점을 가지고 있으므로 이러한 문제를 해결하기 위해 본 연구에서는 과동역학의 원리를 이용한 스펙트럴해석법(spectral analysis method)과 이산화된 구조물의 해석에 적합한 유한요소법의 원리를 동시에 반영한 스펙트럴요소법(spectral element method)을 대공간 구조물의 해석에 적용하였다.

* 정회원 · 인하대학교 건축학부 교수 Email: hsang@inha.ac.kr

** 정회원 · 한양대학교 건축공학과 BK21 계약교수 Email: kyotolsj@empal.com

*** 정회원 · 대한주택공사 Email: flare@jugong.co.kr

1.2 연구의 방법

본 연구에서는 힉과 변위의 관계를 이용하여 스펙트럴요소를 정식화하고, 정식화 된 스펙트럴요소법을 적용하여 대공간 구조물의 동적해석을 수행하며, 얻어진 변위응답 및 해석시간(CPU time)을 유한요소법 결과와 비교하여 스펙트럴요소법의 적용성을 평가한다.

스펙트럴요소법 및 유한요소법의 동적해석은 직접적분법에 의한 시간이력해석을 수행한다.

2. 스펙트럴요소법

구조물의 진동현상은 수많은 탄성 이동파(traveling wave)가 모여서 형성된 정상파(standing wave)의 한 형태로 볼 수 있으므로 구조물의 동적응답은 기존의 모드해석법이나 유한요소법과 달리 구조물내의 탄성과 동적 분산관계(dispersive relation)를 이용하여 파의 개수(number of wave)와 진동수의 함수로 유도된 파동해를 모두 진동수의 함수로 표현한 후 푸리에변환(Fourier transform)과 역 푸리에변환(inverse Fourier transform)을 해석과정에서 적용시켜 진동수영역 혹은 시간영역에서 정확하게 얻어질 수 있다. 이와 같이 파동방정식으로부터 구해진 파동해를 이용하여 구조물의 동적거동을 해석하는 과정에서 푸리에변환과 역 푸리에변환을 적용하는 해석기법을 스펙트럴해석법이라고 하며 진동수를 변수로 하는 형상함수를 사용하여 저차 모드에서부터 고차모드까지의 영향을 모두 반영할 수 있으므로 진동수와 독립된 일정한 형상함수를 사용하는 유한요소법에 비해 구조물의 동적응답을 정확하게 구할 수 있다. 이러한 스펙트럴해석법과 유한요소법의 장점을 결합한 해석기법을 스펙트럴요소법이라 하며 동적강성행렬은 운동방정식의 해로부터 직접 유도되므로 구조체의 동적거동을 정확하게 반영할 수 있다. 또한 특별한 경우를 제외하고는 탄성범위의 정밀한 동적 해석시에도 부재의 길이에 상관없이 요소분할이 필요치 않으므로 유한요소법에 비해 행렬식의 크기 및 계산시간을 크게 줄일 수 있다.

기존의 유한요소법은 구조체의 강성을 나타내는 강성행렬과 관성효과를 나타내는 질량행렬에 의해 표현되며, 차분법 등의 수치해석법을 통해 두 행렬을 합한 후 해를 구한다. 그러나 스펙트럴요소법은 구조물의 운동방정식으로부터 구해진 파동해에서 직접 유도되므로 구조체의 관성효과와 강성효과를 동시에 정확히 반영할 수 있고, 처음부터 동적강성행렬이 질량행렬과 강성행렬이 조합된 형태로 유도되어 차분법 등의 수치해석법이 필요치 않으므로 유한요소법에서처럼 수치해석법의 선택에 따라 수렴성 및 해가 변화하는 현상은 발생하지 않는다. 그림 3은 스펙트럴요소법의 해석과정을 보여주는 흐름도이며 스펙트럴 해석법(그림 2)과 비교했을 때 스펙트럴요소의 유도과정과 각 요소의 결합과정(점선으로 표시된 부분)이 추가적으로 필요하다.

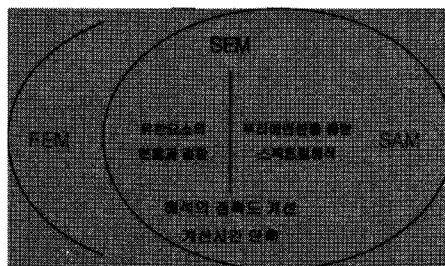


그림 1. 스펙트럴요소법의 개념

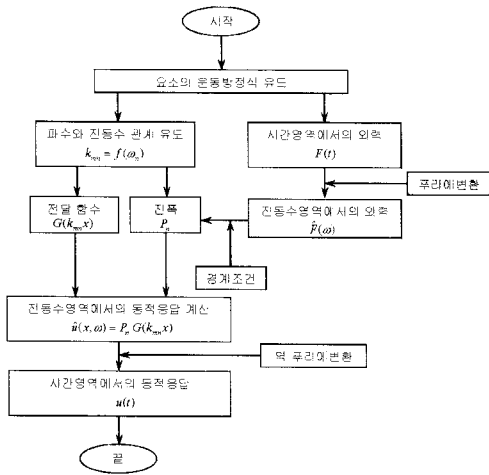


그림 2. 스펙트럴해석법의 흐름도

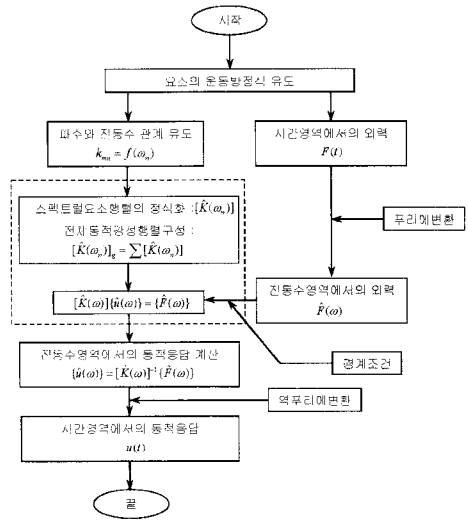


그림 3. 스펙트럴요소법의 흐름도

3. 스펙트럴요소의 정식화

본 장에서는 베르누이-오일러 보요소, 트러스요소 및 비틀림요소로부터 그림 3과 같은 진동수영역의 3차원 골조요소를 정식화 하며, 행렬의 조합 및 좌표변환 방법은 유한요소법과 동일하므로 정식화 결과만을 표현한다. (각 요소의 정식화 과정은 생략함.)

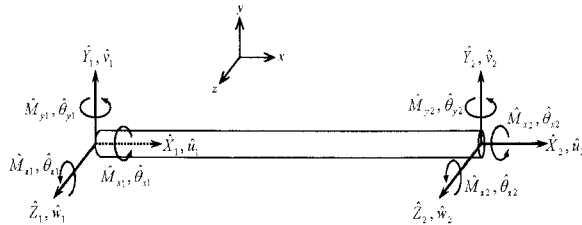


그림 4. 진동수 영역에서의 3차원 골조요소

$$\begin{Bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{Y}_1 \\ \hat{Z}_1 \\ \hat{M}_{x1} \\ \hat{M}_{y1} \\ \hat{M}_{z1} \\ \hat{X}_2 \\ \hat{Y}_2 \\ \hat{Z}_2 \\ \hat{M}_{x2} \\ \hat{M}_{y2} \\ \hat{M}_{z2} \end{Bmatrix} = [\hat{K}_{dyn.}] \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{\theta}_{x1} \\ \hat{\theta}_{y1} \\ \hat{\theta}_{z1} \\ \hat{u}_2 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{\theta}_{x2} \\ \hat{\theta}_{y2} \\ \hat{\theta}_{z2} \end{Bmatrix} \quad [\hat{K}_{dyn.}] = \begin{bmatrix} \hat{k}_{711} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{712} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{k}_{812} & 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{812} & 0 & \hat{k}_{812} & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{812} \\ \hat{k}_{911} & 0 & -\hat{k}_{912} & 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{912} & 0 & -\hat{k}_{912} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{k}_{201} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{212} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{k}_{222} & 0 & 0 & 0 & -\hat{k}_{222} & 0 & \hat{k}_{222} & 0 & \hat{k}_{222} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{k}_{322} & 0 & \hat{k}_{322} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{312} \\ \hat{k}_{722} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{722} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{k}_{832} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{832} & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{832} \\ \hat{k}_{932} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{932} \\ \hat{k}_{232} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{k}_{332} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{332} \\ \hat{k}_{222} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{k}_{832} & 0 & -\hat{k}_{832} & 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{832} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{k}_{222} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{k}_{842} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{842} \\ \hat{k}_{942} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{942} \\ \hat{k}_{342} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{342} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
\hat{k}_{T11} = \hat{k}_{T22} &= \frac{EA}{L}(k_L L)\cot(k_L L) & \hat{k}_{B11y} = \hat{k}_{B33y} &= \Delta_y L^2 k_F^2 [\cos(k_F L)\sinh(k_F L) + \sin(k_F L)\cosh(k_F L)] \\
\hat{k}_{T12} = \hat{k}_{T21} &= -\frac{EA}{L}(k_L L)\csc(k_L L) & \hat{k}_{B22y} = \hat{k}_{B44y} &= \Delta_y L^2 [-\cos(k_F L)\sinh(k_F L) + \sin(k_F L)\cosh(k_F L)] \\
\hat{k}_{s11} = \hat{k}_{s22} &= \frac{GJ}{L}(k_R L)\cot(k_R L) & \hat{k}_{B12y} = -\hat{k}_{B34y} &= \Delta_y L^2 k_F \sin(k_F L)\sinh(k_F L) \\
\hat{k}_{s12} = \hat{k}_{s21} &= -\frac{GJ}{L}(k_R L)\csc(k_R L) & \hat{k}_{B13y} &= \Delta_y L^2 k_F^2 [-\sin(k_F L) - \sinh(k_F L)] \\
& & \hat{k}_{B14y} &= -\hat{k}_{B23y} = \Delta_y L^2 k_F [-\cos(k_F L) + \cosh(k_F L)] \\
& & \hat{k}_{B24y} &= \Delta_y L^2 [-\sin(k_F L) + \sinh(k_F L)] \\
\hat{k}_{B11z} = \hat{k}_{B33z} &= \Delta_z L^2 k_F^2 [\cos(k_F L)\sinh(k_F L) + \sin(k_F L)\cosh(k_F L)] \\
\hat{k}_{B22z} = \hat{k}_{B44z} &= \Delta_z L^2 [-\cos(k_F L)\sinh(k_F L) + \sin(k_F L)\cosh(k_F L)] \\
\hat{k}_{B12z} = -\hat{k}_{B34z} &= \Delta_z L^2 k_F \sin(k_F L)\sinh(k_F L) \\
\hat{k}_{B13z} &= \Delta_z L^2 k_F^2 [-\sin(k_F L) - \sinh(k_F L)] \\
\hat{k}_{B14z} = -\hat{k}_{B23z} &= \Delta_z L^2 k_F [-\cos(k_F L) + \cosh(k_F L)] \\
\hat{k}_{B24z} &= \Delta_z L^2 [-\sin(k_F L) + \sinh(k_F L)] \\
\Delta_y &= \frac{EI_y}{L^3} \left(\frac{k_F L}{1 - \cos(k_F L)\cosh(k_F L)} \right) & k_L &= \omega \sqrt{\frac{\rho A}{EA}}, \quad k_F = \sqrt{\omega} \sqrt{\frac{\rho A}{EF}}, \quad k_R = \omega \sqrt{\frac{\rho J}{GJ}} \\
\Delta_z &= \frac{EI_z}{L^3} \left(\frac{k_F L}{1 - \cos(k_F L)\cosh(k_F L)} \right)
\end{aligned}$$

4. 대공간 구조시스템에 대한 스펙트럴요소법의 적용성 평가

4.1 스펙트럴요소의 신뢰성 검증

스펙트럴요소의 신뢰성을 검증하기 위해 캔틸레버보를 해석하여 변위응답을 유한요소법과 비교한 결과, 단일 스펙트럴요소는 100분할 유한요소의 응답과 거의 같은 값을 나타내며 해석시간은 약 20배가 빠른 것으로 나타나 스펙트럴요소의 신뢰성이 검증되었다.

4.2 스펙트럴요소의 적용성 평가

검증된 보요소로 구성된 13절점 24부재 스타돔을 하중조건 및 강성을 변화시키며 해석한 결과, 단일 스펙트럴요소에 의한 결과는 조건에 관계없이 30개로 분할된 유한요소해에 의한 해석결과와 유사한 진동양상을 보여 요소가 조합된 구조물에서 부재의 강성 변화 시에도 유한요소법보다 신뢰성 있는 결과를 제시하였다.

보다 실제적인 대공간 구조물에 대한 적용성 평가를 위해 보요소로 조합된 그림 5의 스펠 40m 단층 패러렐 라멜라 돔에 그림 6의 하중을 지지점을 제외한 전 절점에 X방향으로 가하여 변위응답을 각각 1분할, 2분할, 8분할된 유한요소해석과 비교하였다. 각 부재는 SS400재질의 원형강관 $E=2.06 \times 10^6 \text{ MPa}$, $A=9.89 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $I=1.2 \times 10^{-6}$, $J=2.40 \times 10^{-6}$ 이다.

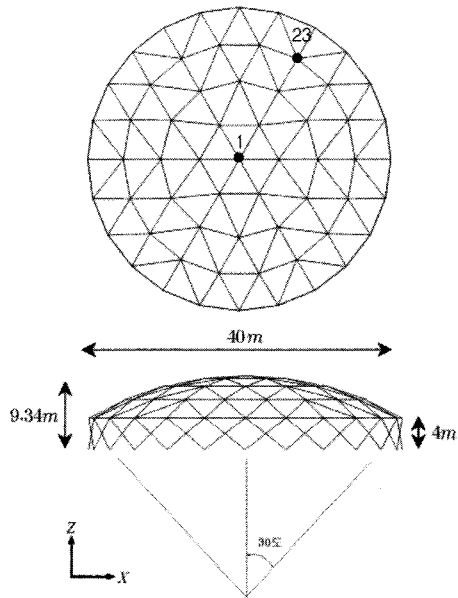


그림 5. 85절점 204부재 해석모델

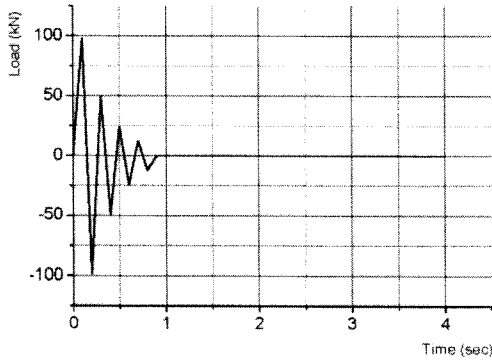


그림 6. 하중조건

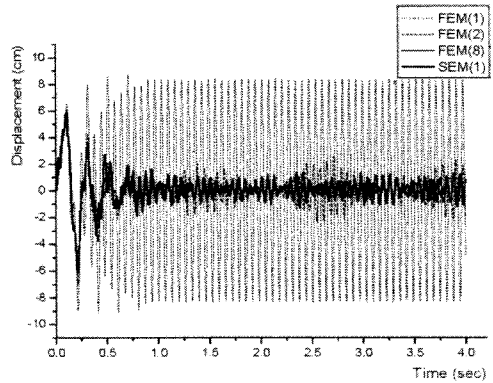


그림 7. 23번 절점 X방향 변위

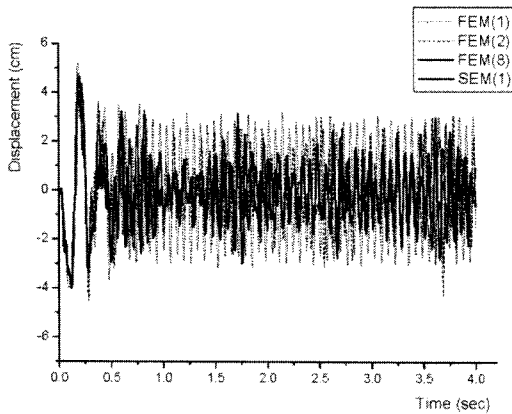


그림 8. 23번 절점 Z방향 변위

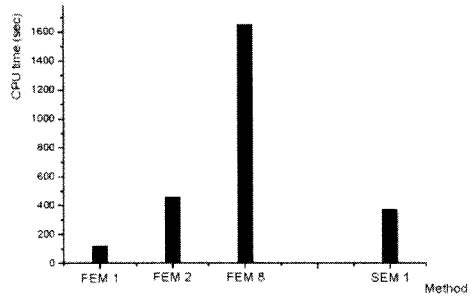


그림 9. 해석시간 비교

표 1. 23번 절점의 X방향 최대변위 상대오차

유한요소 분할개수	1	2	8
가진구간 오차율	52.45%	16.51%	2.53%
자유진동구간 오차율	518.27%	87.06%	14.35%

표 2. 23번 절점의 Z방향 최대변위 상대오차

유한요소 분할개수	1	2	8
가진구간 오차율	12.79%	10.53%	2.79%
자유진동구간 오차율	4.52%	35.37%	1.14%

그림 7 - 9는 해석결과를 나타낸 것이다. 단일 유한요소해석의 변위는 단일 스펙트럴요소해석의 변위와 최대 518퍼센트의 오차를 보이며 전체적인 진동양상을 잘 표현하지 못하나 8분할 유한요소해석의 변위는 최대 14퍼센트의 오차를 보이고 진동양상도 유사하여, 타 구조물에 비해 상대적으로 자유도가 많고 일반적으로 고차모드가 지배적인 대공간 구조물에 대한 스펙트럴요소법 적용의 타당성을 보여준다.

8분할 유한요소해석과 단일 스펙트럴요소해석의 계산시간은 스펙트럴요소법이 유한요소법에 비해 약 4.5 배 빠른 것으로 나타나 부재수가 많아진 경우 획기적으로 시간을 단축하지는 못하였다. 이는 유한요소해석의 경우는 전체적인 행렬이 커지더라도 역행렬 계산 시 매우 빠른 해석법으로 알려진 Multi Frontal Sparse

Gaussian법을 이용하여 그 크기를 단축하여 해석할 수 있으나, 스펙트럴요소해석 시에는 안정된 계산 결과를 얻기 위해 역행렬 계산법 중 비경제적인 것으로 알려진 가우스 조단법을 사용하기 때문이며 개선된 수치 해석법을 도입하면 보다 효율적인 해석이 가능할 것으로 사료된다.

5. 결 론

본 연구에서는 단성범위에서 대공간 구조물의 시간이력해석을 보다 빠르고 정확하게 수행하기 위하여 스펙트럴요소법을 적용하였으며 그 결과는 다음과 같다.

(1) 단위 캔틸레버 보를 해석한 결과, 스펙트럴요소법은 해석의 정확도 및 시간에서 유한요소법보다 개선된 결과를 나타내었다. 유한요소법은 요소의 분할에 따라 동적응답의 변위뿐만 아니라 주기에서도 차이를 보이며, 특히 단일 유한요소는 자유진동상태에서 변위 및 진동주기도 적절히 표현하지 못하는 등 결과의 차이를 나타내었으나, 스펙트럴요소법은 별도의 요소분할 없이도 부재의 전체적인 진동양상을 표현하는데 신뢰성 있는 결과를 제시하는 것으로 나타났다.

(2) 검증된 보 요소로 구성된 13절점 24부재 스타둠을 부재 강성을 변화시키며 해석한 결과, 유한요소법은 요소의 분할 없이는 구조체의 강성변화에 따라 신뢰성 있는 결과를 제시하지 못하는 경우가 있을 뿐만 아니라 강성이 작은 구조물의 해석 시 최소 3개 이상의 요소분할이 필요하다고 판단되며, 보다 정밀한 동적해석을 수행하는 경우 단계적으로 요소분할을 증가시킬 필요가 있으나, 스펙트럴요소법은 단일 요소로도 신뢰성 있는 결과를 얻을 수 있었다.

(3) 스펠 40m의 단층 패러렐 라멜라 돔을 대상으로 단일 스펙트럴요소법을 이용한 해석결과와 비교하여, 단일 유한요소해석의 결과는 자유진동구간에서 500퍼센트 이상의 큰 오차를 보이며 진동양상을 잘 표현하지 못하고, 8부재 유한요소해석의 결과는 15퍼센트 이내의 오차를 보였다. 즉 스펙트럴요소해석법은 자유도가 큰 대공간 구조물 해석의 경우에도 전체적인 구조적 거동을 비교적 잘 나타내고 있어 적용의 타당성을 확인하였다. 단 자유도가 많아지는 경우 역행렬 계산법(가우스 조단법)의 한계로 인해 해석시간을 크게 단축시키지 못하여 향후 좀 더 효율적인 수치해석법의 적용이 필요할 것으로 사료된다.

감사의 글

본 연구는 2005년 건설교통기술평가원(과제번호:2005-33305) 및 과학기술부 우수연구센터육성사업인 한양대학교 친환경건축 연구센터(과제번호:R11-2005-056-01004-0)의 연구비 지원으로 이루어진 것으로, 이에 감사의 의를 표합니다.

참고문헌

- 이후근 (1997) 스펙트럴요소법을 이용한 구조 동역학 해석, 인하대학교 대학원 박사학위논문.
- 최창근 (2002) 유한요소법, 테크노 프레스
- Doyle, James F. (1997) Wave Propagation in Structures, Springer.
- Tedesco, Joseph W. (1998) McDougal, William G. and Allen Ross, C., Structural Dynamics : Theory and Applications, Prentice Hall.
- Usik Lee (2004) Spectral Element Method in Structural Dynamics, Inha Univ. Press.