

동적 해석의 효율적 축소 기법에 관한 연구

Study on the efficient dynamic system condensation

백 승 민* · 조 맹 효**

Baek, Sungmin · Cho, Meanghyo

ABSTRACT

Eigenvalue reduction schemes approximate the lower eigenmodes that represent the global behavior of the structures. In the previous study, we proposed a two-level condensation scheme(TLCS) for the construction of a reduced system. In first step, the selection of candidate elements by energy estimation, Rayleigh quotient, through Ritz vector calculation, and next, the primary degrees of freedom is selected by sequential elimination from the degrees of freedom connected to the candidate elements in the first step. In the present study, we propose TLCS combined with iterative improved reduced system(IIRS) to increase accuracy of the higher modes intermediate range. Also, it is possible to control the accuracy of the eigenvalues and eigenmodes fo the reduced system. Finally, Numerical examples demonstrate performance of proposed method.

Keywords: System condensation, Two-level condensation scheme(TLCS), Iterative improved reduced system.

1. 서 론

1960년대 이후로 발전한 유한요소법은 전산기술과 효율적인 수치 알고리즘과 결합하여, 보다 정교한 문제에 대한 해답을 제시해오고 있다. 그렇지만 기술의 발전과 더불어 해석 대상 또한 더욱 복잡화, 대형화 되고 있는 추세이다. 대형 구조물의 동적 해석의 경우 이러한 경향성은 심화가 된다. 날로 커져가는 해석의 규모에 대응하기 위한 연구들이 진행 중이고, 병렬 컴퓨팅, 부구조화 기법(Sub-structuring scheme) 그리고 시스템 축소(System condensation) 등이 여기에 해당된다.

이 중 시스템 축소는 모드 기반과 자유도 기반으로 나누어진다. 시스템 축소는 축소하는 과정에서 일정 정도의 변환 오차를 가지게 되는데, 모드 기반 축소의 경우 고차 모드가 절삭되기 때문에 큰 오차를 가지는 반면, 자유도 기반 축소는 고차 모드의 영향력도 근사화되어 포함되기 때문에 보다 정확하다. 자유도 기반의 축소는 축소시스템 기법(Reduced System Method)이라고도 하며, Guyan(1965)에 의해 제안된 이래 지난 40여 년간 많은 연구자들에 의해 발전되어 왔다. Improved reduced system(O'callahan, 1989), Iterative

* 학생회원 · 서울대학교 기계항공공학부 박사과정 Email: thomas81@snu.ac.kr

** 정회원 · 서울대학교 기계항공공학부 교수 Email: mhcho@snu.ac.kr

improved reduced system(Friswell 등, 1998), Accelerated improved reduced system(Kim 등, 2001), Succession-level approximate reduction(Zhang 등, 1995) 등 여러 가지 형태로 발전을 거듭하였으며, IRS를 부구조화기법과 연동하는 방법(Kim 등, 2006)까지 제안되었다.

자유도 기반 시스템 축소에는 자유도 선정의 문제가 있다. 일반적으로 모드기반의 축소와 달리, 저차모드에 지배적인 자유도를 선정해야 해석의 신뢰성이 확보된다. 그러므로 선정기법에 대한 연구도 많이 이루어졌으며 그 예로는 순차적 소거법(Henshell 등, 1975; Shah 등, 1982), 요소 에너지 추정에 의한 자유도 선정방법(Kim 등, 2000), 선형독립특성과 조건수(condition number)를 이용한 방법(Kim 등, 2006), 2단계 축소기법(Cho 등, 2004)등의 연구들이 있다. 순차적 소거법이 가장 높은 신뢰성을 가지나 계산 효율성에 문제점을 가지고 있다. 본 연구에서 제안하는 방법은 정확성과 효율성을 동시에 만족하는 2단계 축소기법을 기반으로 한다.

하지만 2단계 축소기법도 외력이 가진 주파수의 변화에 따라 해석의 정확성을 보장하지 못하는 경우가 발생한다. 시스템 축소 기법은 일반적으로 저차모드를 기준으로 구축되기 때문에 동하중이 가해지는 경우에 동하중의 주파수 영역에서 축소시스템의 응답이 정확해야 시간응답의 정확성을 보장할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 기존의 2단계 축소 시스템 기법에 반복적 축소 시스템 기법을 적용하여, 주파수 대역에 따른 시스템의 성능을 개선하는 방법을 제안한다.

2. 축소 시스템 기법

축소 시스템 기법을 간략하게 설명하자면 다음과 같다. 비감쇠 진동 시스템의 동적 평형 방정식은 식(1)과 같고, 이 식은 주자유도 x_p 와 부자유도 x_s 로 분할하여 식(2)와 같이 다시 표현할 수 있다.

$$[K]\{x\} - \lambda[M]\{x\} = \{0\} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{ps}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_p \\ x_s \end{Bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_{pp} & M_{ps} \\ M_{ps}^T & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_p \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

식(2)의 분할된 동적 평형 방정식에서 부자유도와 관련된 부분을 살펴보면 식(3)과 같이 표현되며, 이 관계를 통해서 식(4)의 자유도 변환행렬을 구할 수 있다.

$$K_{ps}^T x_p + K_{ss} x_s - \lambda M_{ps}^T x_p - \lambda M_{ss} x_s = 0 \quad (3)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_p \\ x_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ t(\lambda) \end{bmatrix} x_p = T x_p \quad (4)$$

식(4)의 자유도 변환행렬은 고유치의 함수 형태로 표현이 되기 때문에 정확한 관계식을 얻기 위해서는 근사화 과정이 필요하며, 지금까지 여러 가지 근사화 기법들이 제안되었다. 자세한 내용은 다음 절에서 살펴보도록 한다.

전체 시스템은 자유도 변환행렬을 통해 식(5)와 같이 축소 될 수 있고, 최종적으로 식(1)의 지배방정식은 식(6)처럼 축소된 고유치 문제로 치환된다. 이때, 축소된 강성행렬과 질량행렬은 식(7), (8)과 같다.

$$[T]^T[K][T]\{x_p\text{RIGHT}-\lambda[T]^T[M][T]\{x_p\text{RIGHT} \quad (5)$$

$$[K_R]\{x_p\text{RIGHT}-\lambda_R[M_R]\{x_p\text{RIGHT}=\{0\text{RIGHT} \quad (6)$$

$$K_R = K_{pp} + K_{ps}t + t^T K_{ps}^T + t^T K_{ss}t \quad (7)$$

$$M_R = M_{pp} + M_{ps}t + t^T M_{ps}^T + t^T M_{ss}t \quad (8)$$

2.1. 테일러 전개를 통한 변환 관계식

자유도 변환행렬의 첫 번째 근사화 기법은 식(9)와 같은 고유치항의 테일러 확장(taylor expansion)을 통한 방법이다.

$$t = -K_{ss}^{-1}K_{ps}^T + K_{ss}^{-1}(M_{ps}^T - M_{ss}K_{ss}^{-1}K_{ps}^T)\lambda + (K_{ss}^{-1}K_{ps}^T)K_{ss}^{-1}(M_{ps}^T - M_{ss}K_{ss}^{-1}K_{ps}^T)\lambda^2 + \dots \quad (9)$$

Guyan은 부자유도 부분의 질량행렬이 전체 시스템에 가지는 영향력이 적다는 사실에 착안하여 고유치의 고차항을 무시한 자유도 변환행렬을 제안하였고(Guyan, 1963), 이때의 변환행렬은 식(10)과 같다. 하지만 이 방법은 질량 관련 부분을 소거하였기 때문에 정확도에서 문제점을 가진다. 정확도의 문제를 해결하기 위해서 식(10)의 자유도 변환행렬을 식(7)과 식(8)에 대입하여 축소된 강성, 질량행렬(K_G, M_G)을 구하고 이를 통해 식(9)에 근사화된 고유치항을 대입할 수 있다. O'callahan은 고유치 1차 항까지 포함하는 IRS기법을 제안하였고(O'callahan 등, 1989) 이는 식(11)과 같다.

$$t_s = -K_{ps}^{-1}K_{ps}^T \quad (10)$$

$$t_{IRS} = t_s + K_{ss}^{-1}(M_{ps}^T - M_{ss}t_s)M_G^{-1}K_G \quad (11)$$

2.2. 반복을 통한 자유도 변환 관계식의 개선(IIRS)

이렇게 테일러 확장을 통해 방법 외에 자유도간의 관계식을 내연적(implicit)인 형태로 변환하여 반복연산을 수행하는 방법도 있다. Friswell은 식(3)에 식(4)의 자유도 변환행렬을 대입하여 식(12)의 관계식을 얻었다(Friswell 등, 1998). 식(12)의 고유치항은 직전 반복 단계에서 구한 축소 시스템, $K_{IIRS}^{(k-1)}$ 과 $M_{IIRS}^{(k-1)}$ 을 통해서 구할 수 있다.

$$t = -K_{ss}^{-1}K_{ps}^T + K_{ss}^{-1}(M_{ps}^T + M_{ss}t)\lambda \quad (12)$$

$$t_{IIRS}^{(k)} = t_s + K_{ss}^{-1}(M_{ps}^T + M_{ss}t_{IIRS}^{(k-1)})(M_{IIRS}^{(k-1)})^{-1}K_{IIRS}^{(k-1)} \quad (13)$$

3. 2단계 축소법(Two-Level Condensation Scheme)

3.1. 기존의 2단계 축소법

축소기법에서 중요한 것은 저차 모드에 지배적인 자유도를 주자유도로 선정하는 것이다. 이를 위해 기존의 2단계 축소법을 사용하였다(Cho, 2004). 먼저 첫 단계에서는 리츠벡터(Ritz vector)를 통해서 근사화된 고유모드를 구한다. 질량직교성(M-orthonormality)을 고려하기 위해서 식(14)와 같은 그람 슈미트 과정

(Gram-Schmidt process)을 거쳐 구한다. 이렇게 구한 Ritz 벡터를 통해서 대략의 고유주파수를 예측할 수 있다. 원하는 주파수 대역까지의 리츠벡터($\{z^{(k)}\}$)를 구해서 식(15)의 각 요소의 레일리지수(Rayleigh Quotient)를 구한다. 레일리 지수는 일종의 에너지 측정의 지표로 작용하므로, 이를 통해 요소의 선정이 가능하다.

이렇게 선정된 요소에 포함된 자유도를 주자유도로 간주하여 IRS기법을 사용하여 첫 번째 축소 시스템을 구축한다. 첫 번째 단계를 통해서 구한 시스템에 순차적 소거법을 적용하여 원하는 크기의 최종적인 주자유도를 선정한다. 이로써 순차적 소거법의 정확성을 유지하면서 계산 효율성을 높일 수 있다.

$$\{x^{(i)}\} = \{x^{(i)}\} - \sum_{k=1}^{i-1} [\{x^{(i)}\} [MRIGHT]\{z^{(k)}\} RIGHT] \{z^{(k)}\} + \frac{\{x^{(k)}\}}{\{x^{(k)}\}^T [M] \{x^{(k)}\}} \quad (14)$$

$$Ra_e^i = \sum_{k=1}^r \{z^{(k)}\} RIGHT^T [K_e^i RIGHT] \{z^{(k)}\} RIGHT \quad (15)$$

3.2. 2단계 축소법의 개선

기존의 방법의 효율성은 이미 많은 연구들을 통해서 검증이 되었다. 하지만 외부 하중이 시스템에 예측한 주파수 보다 높을 경우에는 문제가 발생한다. 이러한 경우에는 보다 고차의 리츠벡터를 포함해서 2단계 축소법을 다시 적용해야 하는 단점이 존재하였다. 또한, 주자유도의 개수도 늘어나기에 최종적인 축소 시스템의 크기가 커지게 된다. 이를 개선하기 위해서 반복적 축소법을 2단계 축소법에 적용하였다. 별도의 자유도 선정 작업 없이 기존에 선정된 자유도로 구축된 시스템에서 IRS의 반복연산을 적용하여 원하는 주파수 대역까지의 정확성을 확보할 수 있다.

4. 수치예제

본 연구에서 제안한 개선된 2단계 축소법을 그림 1에서의 간단한 외팔관 모델을 이용하여 검증해 보았다. 전체 절점 수는 297개이고, 요소의 개수는 256개, 전체 자유도는 1782개이다. 사용된 요소는 하이브리드 판 요소(Aminpour, 1992)이다. 먼저, 리츠벡터를 통해서 대략의 고유진동수를 가능한 다음 3Hz의 주파수까지의 벡터를 생성하였다. 이는 저차 10개 모드까지를 고려한 것으로 총 40개의 리츠벡터가 요구되었다. 40개의 리츠벡터를 통해 요소를 선정하였고, 요소의 개수는 전체 요소의 25%인 65개를 선정하였고, 최종적으로는 40개 자유도를 주 자유도로 선정하였다. 이는 전체 시스템을 2%로 줄인 결과이다.

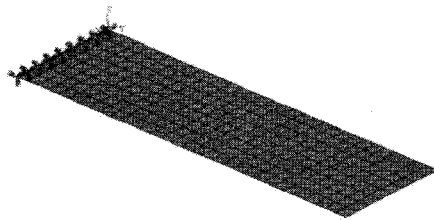


그림 1 외팔관 모델

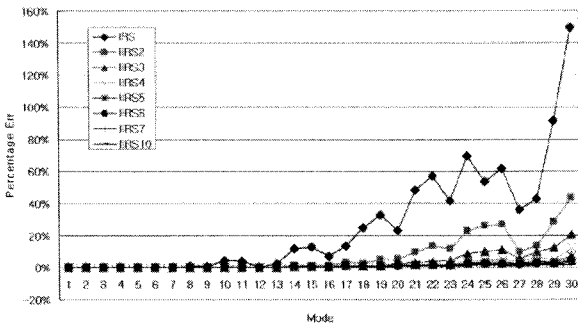
$$(4m \times 16m, t = 0.01m, E = 210GPa, \nu = 0.33, \rho = 7800Kg/m^3)$$

전체 시스템과 축소된 시스템을 가지고 모달 해석(Modal analysis)을 수행하고 그 결과를 비교하였고, 식 (16)을 이용해 백분율 오차를 구하였다. 전체 시스템에서의 고유진동수와 축소된 시스템의 고유진동수의 백분율 오차를 계산하였다. 표 1은 전체 시스템의 고유치 해석 결과이다.

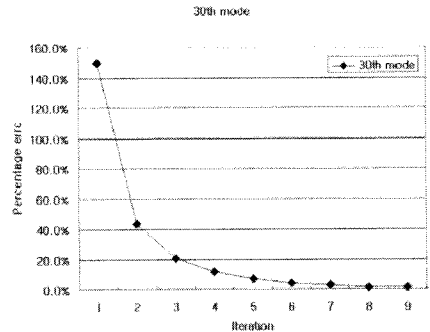
$$Error_{\lambda} = \frac{(\lambda_{Reduced} - \lambda_{Full})}{\lambda_{Full}} \times 100 \quad (16)$$

표 1 전체 시스템의 고유 진동수(저차 30개 모드, 단위:Hz)

Mode	Nat. Frq.	Mode	Nat. Frq.	Mode	Nat. Frq.	Mode	Nat. Frq.
1	0.0333448	9	2.162572	17	5.2297925	25	8.715154
2	0.2085621	10	2.867586	18	5.2717091	26	8.834535
3	0.2640876	11	3.022918	19	5.4395863	27	9.716128
4	0.585936	12	3.551583	20	6.3013137	28	9.957914
5	0.8162745	13	3.85994	21	6.6014899	29	10.13779
6	1.1539182	14	4.040167	22	6.9725261	30	10.30978
7	1.4368327	15	4.06892	23	7.4793794		
8	1.9158728	16	4.485686	24	8.1581002		



(a) 반복연산에 따른 백분율 오차 변화



(b) 30번째 모드에서의 반복에 따른 오차변화

그림 2 고유치 퍼센트 오차

축소 시스템의 정확도는 그림2.(a)의 IRS로 표현된 그래프와 같은 정확도를 가진다. 저차 10개 모드에서는 1% 이내의 높은 정확도를 가진 반면에 10차 모드 이후에 정확도를 보장하지 못한다. 이는 만약 10Hz에 해당하는 가진 주파수를 가지는 외부하중이 가해졌을 때의 해석의 결과의 신뢰도에 문제를 일으킨다.

따라서 기존의 TLCS로 구성된 축소 시스템에 추가적인 IIRS 연산을 적용하였다. 그림 (a)의 IIRS2에서 IIRS10의 그래프는 반복연산의 횟수를 증가시킨 축소 시스템의 고유치 백분율 오차이다. 그림 2.(b)는 원하는 10Hz대역의 고유진동수인 30차 모드의 정확도이다. 반복연산의 횟수가 증가함에 따라 정확도가 획기적으로 증가하는 것을 확인할 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 기존의 2단계 축소법에 반복적 축소 기법을 적용하여 정확성을 높이는 연구를 수행하였다.

기존의 2단계 축소법은 요소 당 에너지 예측을 통해 자유도 선정으로 초기 시스템을 구축하였기에 정확성과 함께 시스템 구축 단계에서 리츠벡터를 통한 고유주파수에 대한 예측이 가능하였다. 또, 순차적 소거법이 가지는 정확성과 함께 전산 효율성을 동시에 얻을 수 있었다. 여기에 고주파의 외력이 가해지는 시간응답 해석과 같은 상황에 대비하여, 반복 연산을 통해 시스템이 가지는 고주파 영역에서의 정확도를 조절하는 방안에 대하여 살펴보았다. 특히 이전의 기법에서는 정확도 확보를 위해 보다 큰 크기의 축소 시스템을 구축하여야 했으나, 반복 연산을 통해 시스템 크기를 최소한으로 줄일 수 있게 되었다.

또한, 기법의 효율성을 수치예제를 통해 검증하였다. 외팔판 모델에서 10차 모드 이하의 오차를 2% 이내로 조절한 축소 시스템에 반복 연산을 적용하여 30차 모드에서의 오차를 1% 이내로 줄이는 것을 확인하였다. 이로써 고주파에서의 정확도 문제를 해결하였고, 상황에 따라 정확도를 조절하는 방안을 제시되었다.

이러한 성과를 기반으로 현재 과도응답 해석을 통해서 향상된 정확성의 효율성에 대한 검증과 부구조화 기법과의 연계를 통해서 기법의 실용성을 증가시키는 연구가 진행 중에 있다.

후기

본 연구는 국방과학연구소와 서울대학교 비행체 특화 센터의 지원을 통해 수행되었습니다.

참고문헌

- Aminpour, M.A.** (1992), Direct Formulation of a Hybrid 4-Node Shell Element with Drilling Degrees of Freedom, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, pp.997-1013
- Cho, M., Kim, H.G.** (2004), Element-Based Node Selection Method for Reduction of Eigenvalue problem, *AIAA Journal*, Vol. 42, No. 8, pp.1677-1684
- Friswell, M.I., Garvey, S.D. and Penny, J.E.T.** (1998), the convergence of the iterated IRS method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 211, No. 1, pp. 123-132
- Guyan, R.J.** (1965), Reduction of stiffness and mass matrices, *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 2, pp.380
- Henshell, R.D., Ong, J.H.** (1975), Automatic masters from eigenvalues economization, *Journal of Earthquake Equation and Structural Dynamic*, Vol. 3, pp.375-383
- Kim, H., Cho, M.** (2006), Improvement of Reduction Method Combined with Sub-domain Scheme in Large scale Problem, *International Journal for numerical methods in engineering*, Vol. 70, No. 2, pp.206-251
- Kim, K.O., Kang, M.K.** (2001), Convergence Acceleration of iterative Modal Reduction methods, *AIAA Journal*, Vol. 39, No. 1, pp. 134-140
- Kim, K.O., Choi, Y.J.** (2000), Energy method for selection of degrees of freedom in condensation, *AIAA Journal*, Vol.38, No.7, pp.1253-1259
- O'callahan, J.** (1989), A Procedure for an improved reduced system (IRS) model, *Proceedings of 7th International Modal Analysis Conference*, pp.17-21
- Shah, V.N., Raymund, M.** (1982), Analytical selection of masters for the reduced eigenvalue problem, *International Journal for Numerical Method In Engineering*, Vol.18, No.1, pp.89-98
- Zhang, D.W., Li, S.** (1995), Succession-level approximate reduction (SAR) technique for structural dynamic model, *Analysis conference(Nashville,TN)*, Union college press, Schenectady, NY, pp.435-441