

# 로터-베어링 시스템의 횡령속도 해석을 위한 유한요소 정식화

## Finite Element Formulations of the Rotor-Bearing System for Whirl Speed Analysis

윤 성 호\*  
Yun, Seong-Ho

---

### ABSTRACT

This paper accounts for derivations and formulations of the finite element dynamic equation of the rotor-bearing system to analyze its whirling speed. It turns out to be a different form from previous researcher's because of different successive sequences of Euler angles. Correspondingly the adoption of other rotation tensor will be needed for a consistent derivation of the dynamic equation. The process of its finite element formulation with consistent mass matrix and gyroscopic matrix involves a general definition of the modal analysis or the Eigen analysis for the damped system in the inertial frame and rotating frame, respectively.

**Keywords:** rotor-bearing system, whirl speed, finite element formulation, modal analysis

---

### 1. 서 론

회전기계들은 발전기, 선박 및 차량의 추진계통, 자동화 기계, 의공학기 등 공학적으로 다양하게 사용되고 있다. 디스크와 로터가 회전할 때 유연축(flexible shaft)이 휘어지거나 질량의 불균형분포, 베어링의 불충분한 지지로 인하여 회전이 정속하지 못할 경우가 많다. 이러한 임계횡령속도(critical whirling speed)를 알아내기 위해서는 회전축의 진동모드해석이 필수적이다. 초기의 연구는 균일한 로터축을 사용하여 회전관성과 자이로스코픽 효과(gyroscopic effect)를 무시하였다(Nelson 1976; Zorzi 1980; Rao 1983). 이후에 사다리꼴 축을 이용하여 축의 전단변형을 고려하였고 고차원의 유한요소를 사용하여 해석하였다(Greenhill 1985; Mohiuddin 1994). 문제를 정의한 후에는 연구자들이 방대한 절점의 데이터를 효과적으로 줄여 저주파수에 염두에 두고 차수가 낮은 질량행렬과 강성행렬로 모달변환(modal transformation)을 시도해 왔다(Kane 1991; Khulief 1992; Mohiuddin 1999). 그러나 선행연구자들은 좌표변환을 위한 회전텐서를 표현하기 위하여 오일러 각(Euler angle)을 사용하였다. 각 연구자마다 유한회전(finite rotation)의 순서를 달리하여 주로 관성좌표계(inertial frame or fixed frame)에서 선형인 운동방정식을 유도하였다.

본 논문은 로터-베어링 시스템의 모달특성을 효과적으로 분석하기 위하여 유한요소를 이용하여 정식화를 하였다. 기존 연구자들이 선택한 오일러 각의 순서와는 다른 순서를 선택하여 유도과정에서 고차원 항을 무시했을 때 유도한 운동방정식은 기존의 것들과 상이하였다. 이에 따른 결과로서 관성좌표계와 회전좌표계

---

\* 정회원 • 금오공과대학교 기계공학부 부교수 Email: shyun@kumoh.ac.kr

(rotating frame or material frame)에서 각각의 운동방정식을 유도하였고, 각 좌표계에서 문제의 특성을 잘 나타내고 윙링속도를 예측하기 위한 고유치 문제가 정의 되었다. 또한 정식화 과정에서 분포질량행렬 (consistent mass matrix)과 자이로스코프 행렬(gyroscopic matrix)이 유도되었다.

## 2. 유한회전 좌표변환

그림 1과 같이  $B(X, Y, Z)$ 는 시스템의 관성좌표계이고  $b(x, y, z)$ 는 회전하는 디스크에 부착된 좌표계이다. 좌표축  $X$ 와  $x$ 는 변형전 로터의 중심선과 일치하며, 좌표계  $B$  또는  $b$ 에서 좌표축  $X$  또는  $x$ 에 대하여 윙링속도(whirling speed)  $\omega$ 로 회전한다. 속도에 관한 회전텐서를 구하는데 있어 오일러 각(Euler angle)을 사용할 때, 먼저 각도  $\phi_X$ 를  $X$ 축에 관하여 회전한 좌표계가  $b^1(x_1, y_1, z_1)$ 이고, 다음에 각도  $\phi_Y$ 를  $y_1$ 축에 관하여 회전한 좌표계가  $b^2(x_2, y_2, z_2)$ 이고, 마지막으로 각도  $\phi_Z$ 를  $z_2$ 축에 관하여 회전한 좌표계가  $b(x, y, z)$ 이다. 각속도를 회전좌표계에 대하여 표현하면 다음과 같다.

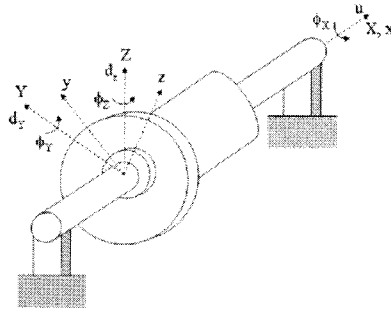


그림 1 관성좌표계 및 회전좌표계의 정의

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi_Z c\phi_Y & s\phi_Z & 0 \\ -s\phi_Z c\phi_Y & c\phi_Z & 0 \\ -s\phi_Y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_X \\ \dot{\phi}_Y \\ \dot{\phi}_Z \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서  $c$ 와  $s$ 는 각각 정현(sine)과 여현(cosine) 함수를 나타내고,  $(\cdot)$ 는 시간  $t$ 에 한 미분이다.  $\phi_X$ 는 로터가 일정한 속도  $\Omega$ 로 회전할 때의 각도이며, 이 때 비틀림 변형은 무시할 것이다. 또한  $Y$ 축과  $Z$ 축 방향의 미소 변형을 각각  $d_Y$ 와  $d_Z$ 로 나타낼 때, 관성좌표계와 회전좌표계에서 디스크 단면의 변위벡터는 각각  $\mathbf{E}_d$ 와  $\mathbf{e}_d$ 로 다음과 같다.

$$\mathbf{E}_d = [d_Y \ d_Z \ \phi_Y \ \phi_Z]^T, \quad \mathbf{e}_d = [d_y \ d_z \ \phi_y \ \phi_z]^T \quad (2a, b)$$

변위에 관한 회전텐서  $R$ 을 도입하면 2개 좌표계의 관계는 다음과 같다.

$$R = \begin{bmatrix} c\omega t - s\omega t & 0 & 0 \\ s\omega t & c\omega t & 0 \\ 0 & 0 & c\omega t - s\omega t \\ 0 & 0 & s\omega t & c\omega t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_d = R \mathbf{e}_d \quad (3a, b)$$

## 3. 운동방정식

로터-베어링 시스템은 디스크 강체, 질량이 분포된 여러 개의 로터 탄성체, 선형의 베어링으로 이루어져

있다고 가정한다. 우선 디스크 강체의 운동에너지는 디스크의 직선운동과 회전운동에 대한 에너지의 합이다. 2차 항만 고려한다면 다음과 같다. 여기서 3차항 이상의 비선형항은 무시하였다.

$$K_d = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}_d^T M_d \dot{\mathbf{E}}_d + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}_d^T J_d \dot{\mathbf{E}}_d + \Omega I_d (\phi_Z \dot{\phi}_Y - \phi_Y \dot{\phi}_Z), \quad M_d = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \quad (4a, b, c)$$

여기서  $m_d$ 는 디스크의 질량이고,  $I_d$ 는 Y축과 Z축의 관성모멘트이다. 상기 식에 오일러-라그랑지 식을 적용하면 디스크에 관한 운동방정식은 다음과 같다.

$$(M_d + J_d) \ddot{\mathbf{E}}_d - \Omega G_d \dot{\mathbf{E}}_d = \mathbf{F}_d \quad (5)$$

여기서  $G_d$ 는 자이로스코픽 효과(gyroscopic effect)에 의하여 나타나는 행렬로서 다음과 같이 표현된다.

$$G_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2I_d \\ 0 & 0 & 2I_d & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

외력  $\mathbf{F}_d$ 는 주로 분포 질량의 불균형에 의한 힘에서 기인하고 외부적인 가진력은 무시한다고 가정한다. 디스크의 질량중심은 회전좌표계에서  $(y_d, z_d)$ 가 회전 중심으로부터  $\delta$ 만큼 떨어져 있다고 가정하면 이에 해당하는 불균형력(unbalance force)은 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{F}_d = m_d \sqrt{y_d^2 + z_d^2} \Omega^2 [c \Omega t \quad s \Omega t \quad 0 \quad 0]^T \quad (7)$$

식 (3b)로 부터 속도  $\dot{\mathbf{E}}_d$ 와 가속도  $\ddot{\mathbf{E}}_d$ 는 다음과 같이 구해지고,  $\dot{R} = \omega H$ 의 관계식을 이용한다.

$$\dot{\mathbf{E}}_d = \omega H \mathbf{e}_d + R \dot{\mathbf{e}}_d, \quad \ddot{\mathbf{E}}_d = 2\omega H \dot{\mathbf{e}}_d + R(\ddot{\mathbf{e}}_d - \omega^2 \mathbf{e}_d) \quad (8a, b)$$

식 (4)의 앞에  $R^T$ 를 곱하고 식 (8a, b)를 이용하면 회전좌표계에 관한 운동방정식은 다음과 같다.

$$(M_d + J_d) \ddot{\mathbf{e}}_d + \omega \{2(M_d + J_d) - k G_d\} \dot{\mathbf{e}}_d - \omega^2 \{(M_d + J_d) + k G_d\} \mathbf{e}_d = \mathbf{f}_d \quad (9)$$

여기서  $\mathbf{f}_d = R^T \mathbf{F}_d$ 이고  $k = \Omega/\omega$ 로서 디스크의 회전각과 윙링각과의 비이다. 식 (9)와 (4)를 비교하면 좌표변환시 식 (9)의 세 번째식이 나타나는데 이는 시스템에 탄성력을 더해 주는 효과를 가진다. 이를 자이로스코픽 탄성력(gyroscopic elastic force)이라고 부른다.

로터의 길이가  $\ell$ 인 유한요소는 축방향의 위치  $X$  또는  $x$ 에서 로터 단면의 탄성변형 벡터는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\mathbf{E}_r = \left[ d_Y \quad d_Z \quad \frac{\partial d_Z}{\partial x} \quad -\frac{\partial d_Y}{\partial x} \quad u \right]^T \quad (10)$$

만일 로터의 축방향 변위를 고려하면 식 (10)의 벡터  $\mathbf{E}_r$ 에  $u$ 가 포함되었고, 식 (10)은 시간  $t$ 뿐만 아니라 공간  $x$ 의 함수이다. 형상함수  $N_i (i = 1 \sim 6)$ 를 도입하면 2개 절점간의 변위는 다음과 같이 구해진다.

$$\mathbf{E}_r = N V \quad (11)$$

$$V = [d_{Y1} \quad d_{Y2} \quad \phi_{Z1} \phi_{Z2} \quad d_{Z1} \quad d_{Z2} \quad \phi_{Y1} \quad \phi_{Y2} \quad u_1 u_2]^T \quad (12)$$

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & -N_3 & -N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1' & N_2' & -N_3' & -N_4' & 0 & 0 \\ -N_1' & -N_2' & -N_3' & -N_4' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \quad (13)$$

형상함수 행렬에서 첫 번째와 두 번째 행은 횡방향 변위를, 세 번째와 네 번째 행은 회전 변위를 나타낸다. (·)은 공간좌표  $x$ 에 관한 미분이고,  $\xi = x/\ell$ 일 때 형상함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, N_2 = \ell(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), N_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ N_4 &= \ell(-\xi^2 + \xi^3), N_5 = 1 - \xi, N_6 = \xi \end{aligned} \quad (14a\sim f)$$

식 (12)와 (13)을 벡터로 표시하여 축약적으로 표현하면 다음과 같다. 또한 식 (15)를 이용하여 로터의 운동에너지  $K_r$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{2 \times 1} \\ \boldsymbol{\phi}_{2 \times 1} \\ \mathbf{u}_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_Y \\ A_Z \\ B_Y \\ B_Z \\ u \end{bmatrix} \mathbf{V}_{10 \times 1} = \begin{bmatrix} A_{2 \times 10} \\ B_{2 \times 10} \\ \Gamma_{1 \times 10} \end{bmatrix} \mathbf{V}_{10 \times 1} \quad (15)$$

$$K_r = \frac{1}{2} \int_0^\ell (\dot{\mathbf{V}}^T \mathbf{A}^T M_r \mathbf{A} \dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{V}}^T \mathbf{B}^T J_r \mathbf{B} \dot{\mathbf{V}} + 2I_r \dot{\phi}_x^2) dx + \int_0^\ell \Omega I_r (\phi_Z \dot{\phi}_Y - \phi_Y \dot{\phi}_Z) dx \quad (16)$$

여기서  $m_r$ 과  $I_r$ 는 로터의 단위 길이 당 질량과 관성모멘트를 각각 나타내고 있다.

$$M_r = \begin{bmatrix} m_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} \quad (17)$$

로터의 굽힘에 의한 변형에너지  $P_b$  및 축방향 변형에너지  $P_a$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P_b = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI_r \mathbf{V}^T \boldsymbol{\phi}''^T \boldsymbol{\phi}'' \mathbf{V} ds \quad (18)$$

$$P_a = \frac{1}{2} \int_0^\ell EA \mathbf{V}^T \boldsymbol{\phi}'^T \boldsymbol{\phi}' \mathbf{V} ds \quad (19)$$

이에 해당하는 라그랑지안 상수(Lagrangian constant)  $L(=K_r - P_a - P_b)$ 은 다음과 같다.

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{V}}^T (M_{rt} + J_{rr}) \mathbf{V} + \ell I_r \dot{\phi}_x^2 + \dot{\mathbf{V}}^T \mathbf{A} \mathbf{V} - \frac{1}{2} \mathbf{V}^T (K_b + K_a) \mathbf{V}, \quad G_r = \mathbf{A}^T - \mathbf{A} \quad (20a, b)$$

상기 식에 오일러-라그랑지 식을 적용하면 로터에 관한 운동방정식이 얻어진다.

$$(M_{rt} + J_{rr}) \ddot{\mathbf{V}} - \Omega G_r \dot{\mathbf{V}} + (K_b + K_a) \mathbf{V} = \mathbf{F}_r \quad (21)$$

여기서 첫 번째와 세 번째 항은 대칭행렬이고 두 번째 항은 빗대칭행렬(skew symmetric matrix)으로 자이로스코프 영향을 보여주고 있다.

$$\begin{aligned} M_{rt} &= \int_0^\ell \mathbf{A}^T M_r \mathbf{A} dx, \quad J_{rr} = \int_0^\ell \mathbf{B}^T J_r \mathbf{B} dx, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} \Omega I_r \int_0^\ell (\mathbf{B}_Y^T \mathbf{B}_Z - \mathbf{B}_Z^T \mathbf{B}_Y) dx \\ K_b &= \int_0^\ell EI_r \boldsymbol{\phi}''^T \boldsymbol{\phi}'' ds, \quad K_a = \int_0^\ell EA \boldsymbol{\phi}'^T \boldsymbol{\phi}' ds \end{aligned} \quad (22a\sim e)$$

축방향에서 절점 1과 2와의 질량분포가 선형으로 변한다고 가정하고 디스크와 같이 질량분포에 의한 로터의 불균형력  $\mathbf{F}_r$ 은 다음과 같다.

$$\mathbf{F}_r = \int_0^\ell m_r \Omega^2 \begin{bmatrix} N_1 N_2 N_3 N_4 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 N_2 - N_3 - N_4 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} c\Omega t & -s\Omega t \\ s\Omega t & c\Omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_r(x) \\ z_r(x) \end{Bmatrix} dx \quad (23)$$

로터의 단면에서  $(y_1, z_1)$ 과  $(y_2, z_2)$ 는 각각 절점 1과 2에서 질량중심의 편심량을 나타내며 요소에 걸쳐 선

형적으로 다음과 같이 변한다고 가정한다.

$$y_r(\xi) = [1 - \xi \ \xi][y_1 \ y_2]^T, \quad z_r(\xi) = [1 - \xi \ \xi][z_1 \ z_2]^T \quad (24a, b)$$

디스크의 운동방정식이 식 (9)처럼 유도되었던 방법을 똑같이 식 (21a)에 적용하면 회전좌표계에 관한 로터의 운동방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$(M_{rt} + J_{rr})\ddot{\mathbf{v}} + \omega\{2(M_{rt} + J_{rr}) - kG_r\}\dot{\mathbf{v}} + [(K_b + K_a) - \omega^2\{(M_{rt} + J_{rr}) + kG_r\}]\mathbf{v} = \mathbf{f}_r \quad (25)$$

베어링의 운동방정식 유도하기 위하여 감쇠행렬은  $C_g$ 와 스프링 강성행렬은  $K_g$ 이고 베어링 지지는 선형적으로 거동한다고 가정한다.

$$C_g\dot{\mathbf{E}}_g + K_g\mathbf{E}_g = \mathbf{F}_g \quad (26)$$

베어링의 회전좌표계에 관한 로터의 운동방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$c_g\dot{\mathbf{e}}_g + k_g\mathbf{e}_g = \mathbf{f}_g, \quad \mathbf{e}_g = [d_y \ d_z]^T \quad (27a, b)$$

여기서  $F$ 는 단위행렬이고,  $c_g$ 와  $k_g$ 는  $Y$ 와  $Z$  방향에서의 감쇠계수와 스프링계수를 나타낸다. 식 (5), (21), (26)를 통합하면 관성좌표계에 관한 전체 시스템에 관한 운동방정식이 다음과 같이 성립한다.

$$M_s\ddot{\mathbf{E}}_s - \Omega G_s\dot{\mathbf{E}}_s + K_s\mathbf{E}_s = \mathbf{F}_s \quad (28)$$

여기서 사용한 계수 행렬들은 다음과 같다. 이 식은 오일러 각 순서를 달리하여 유도한 방정식과 상이함을 알 수 있다(Mohiuddin 1994).

$$M_s = \begin{bmatrix} M_d + J_d & 0 & 0 \\ 0 & M_{rt} + J_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_s = \begin{bmatrix} G_d & 0 & 0 \\ 0 & G_r & 0 \\ 0 & 0 & -C_g/\Omega \end{bmatrix}, \quad K_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_b + K_a & 0 \\ 0 & 0 & K_g \end{bmatrix}, \quad (29a \sim e)$$

$$\mathbf{E}_s = [\mathbf{E}_d^T \ \mathbf{V}^T \ \mathbf{E}_g^T]^T_{(16 \times 1)}, \quad \mathbf{F}_s = [\mathbf{F}_d^T \ \mathbf{F}_r^T \ \mathbf{F}_g^T]^T$$

식 (9), (25), (27a)를 통합하면 회전좌표계에 관한 전체 시스템에 관한 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$M_s\ddot{\mathbf{e}}_s + \omega\{2M_s - kG_s\}\dot{\mathbf{e}}_s + [K_s - \omega^2\{M_s + kG_s\}]\mathbf{e}_s = \mathbf{f}_s \quad (30)$$

여기서 변위와 힘 벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{e}_s = [e_d^T \ v^T \ e_g^T]^T_{(16 \times 1)}, \quad \mathbf{f}_s = [f_d^T \ f_r^T \ f_g^T]^T \quad (31a, b)$$

### 3. 휠링속도 해석

감쇠가 있는 시스템의 일반적인 고유치해석은 1차의 상태 벡터  $\mathbf{S}$ 를 도입하여 관성좌표계와 관련된 식 (28)을 다음과 같이 표현할 수 있다(Meirovitch 1967).

$$P\dot{\mathbf{S}} + Q\mathbf{S} = \mathbf{R} \quad (32)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & M_s \\ M_s - \Omega G_s & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -M_s & 0 \\ 0 & K_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = [0^T \ \mathbf{F}_s^T]^T, \quad \mathbf{S} = [\dot{\mathbf{E}}_s^T \ \mathbf{E}_s^T]^T \quad (33a \sim d)$$

여기서 0은 크기가  $16 \times 16$ 의 행렬임을 주의하라.  $\mathbf{S} = \boldsymbol{\Phi}e^{\lambda t}$ 를 이용하여 식 (32)에서 모달해석을 수행하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 0 - I/\lambda & I \\ -K_s^{-1}M & \Omega K^{-1}G - I/\lambda \end{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0} \quad (34)$$

베어링의 감쇠행렬  $C_g$ 나 스프링 강성행렬  $K_g$ 의 요소구성에 따라서 원형 또는 타원형의 세차형상 (precession mode)을 가진다. 또한 회전좌표계를 이용할 때 식 (30)에서 모달해석을 수행할 수 있다. 특히

원형모드를 가지면 2개의 평면이 90° 위상차가 있고 일정한 모드  $\Phi_c$ 를 가지므로 식 (30)은 다음과 같이 표현되어 고유치인 횡령속도와 모드를 구할 수 있다.

$$K_s \Phi_c = \omega^2 \{M_s + kG_s\} \Phi_c \quad (35)$$

#### 4. 결론

본 논문은 로터-베어링 시스템의 모달특성인 횡령속도를 효과적으로 분석하기 위하여 유한요소를 이용하여 정식화를 하는 과정에서 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 기존 연구자들이 선택한 오일러 각의 순서와는 다른 순서를 선택하여 유도과정에서 고차원 항을 무시했을 때 유도한 운동방정식은 기존의 것들과 상이하였다.
- (2) 이에 따른 결과로서 관성좌표계와 회전좌표계에서 운동방정식을 유도하였고, 각 좌표계에서 문제의 특성을 잘 나타내고 횡령속도를 예측하기 위한 고유치 문제가 정의 되었다. 또한 정식화 과정에서 분포질량 행렬(consistent mass matrix)과 자이로스코프 행렬(gyroscopic matrix)이 유도되었다.
- (3) 향후 오일러 각에 대한 유한회전 표현식을 다른 것으로 대체하여 회전텐서 매개변수가 불변화량이 되는지 검토되어야 한다.

#### 참고문헌

- Nelson, H. D., McVaugh J. M. (1976) The dynamics of rotor-bearing systems using finite element, *ASME Journal of Engineering for Industry*, 98, pp.593~600.
- Zorzi E. S., Nelson, H. D (1980) The dynamics of rotor-bearing systems with axial torque-a finite element approach, *Journal of Mechanical Engineering Design*, 102, pp.158~161.
- Rao J. S. (1983) Rotor Dynamics, *John Wiley & Sons*, New York.
- Greenhill L. M. Brickford J. D., Nelson, H. D (1985) A conical beam finite element for rotor dynamic analysis, *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 107, pp.421~430.
- Mohiuddin M. A., Khulief Y. A. (1994) Modal characteristics of rotors using a conical shaft finite element, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 115, pp.125~144.
- Kane K., Torby B. J. (1991) The extended modal reduction method applied to rotor dynamic problems, *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 113, pp.79~84.
- Khulief Y. A. (1992) On the finite element dynamic analysis of flexible mechanisms, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 97, pp.23~32.
- Mohiuddin M. A., Khulief Y. A. (1999) Coupled bending torsional vibration of rotors using finite element, *Journal of Vibration and Vibrations*, 223, pp.297~316.
- Meirovitch R. (1967) Analytical Methods in Vibrations, *The Macmillan Company*, New York.