

CAD 형상을 활용한 설계 민감도 해석

Shape Design Sensitivity Analysis using Isogeometric Approach

하 승 현*
Ha, Seung-Hyun

조 선 호**
Cho, Seonho

ABSTRACT

A variational formulation for plane elasticity problems is derived based on an isogeometric approach. The isogeometric analysis is an emerging methodology such that the basis functions in analysis domain are generated directly from NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) geometry. Thus, the solution space can be represented in terms of the same functions to represent the geometry. The coefficients of basis functions or the control variables play the role of degrees-of-freedom. Furthermore, due to h-, p-, and k-refinement schemes, the high order geometric features can be described exactly and easily without tedious re-meshing process. The isogeometric sensitivity analysis method enables us to analyze arbitrarily shaped structures without re-meshing. Also, it provides a precise construction method of finite element model to exactly represent geometry using B-spline base functions in CAD geometric modeling. To obtain precise shape sensitivity, the normal and curvature of boundary should be taken into account in the shape sensitivity expressions. However, in conventional finite element methods, the normal information is inaccurate and the curvature is generally missing due to the use of linear interpolation functions. A continuum-based adjoint sensitivity analysis method using the isogeometric approach is derived for the plane elasticity problems. The conventional shape optimization using the finite element method has some difficulties in the parameterization of boundary. In isogeometric analysis, however, the geometric properties are already embedded in the B-spline shape functions and control points. The perturbation of control points in isogeometric analysis automatically results in shape changes. Using the conventional finite element method, the inter-element continuity of the design space is not guaranteed so that the normal vector and curvature are not accurate enough. On the other hand, in isogeometric analysis, these values are continuous over the whole design space so that accurate shape sensitivity can be obtained. Through numerical examples, the developed isogeometric sensitivity analysis method is verified to show excellent agreement with finite difference sensitivity.

Keywords: Shape design sensitivity, Isogeometric analysis, Adjoint sensitivity analysis, NURBS

1. INTRODUCTION

1.1 등기하 해석

장래에는 CAD 기하형상과 유한요소해석이 직접 결합된 등기하 해석(Isogeometric Analysis)이 주목을 이룰 것이다. 등기하 해석(Isogeometric Analysis)은 2003년 Cho와 Roh에 의해 유사개념이 소개된 이래 2005년 Hughes *et al.* 에 의해 등기하 해석의 개념이 수학적으로 정립이 되었다. 이는 기존의 유한요소법과 무요소 기법이 결합된 형태의 구조를 가지고 있으며 CAD의 NURBS(non-uniform rational B-splines)를 사용하여 직접 해석공간의 기저함수를 만들 수 있으므로 기하학적으로 엄밀하며 형상의 수정, 개선이 용이하여 차세대 해석 기법으로 인식되어 고체, 유체, 진동 문제 등으로 빠르게 인구가 확장되어가고 있다. 특히 경계에서의 법선벡터, 곡률 등 정밀한 거동이 요구되는 형상 설계민감도 해석과 최적설계 분야에서는 매우 큰 장점이 있다. 지금까지의 형상설계는 CAD 형상에서 이산화 과정을 거쳐 응답해석 및 민감도 해석을 수행하였기 때문에 곡률 등 고차항이 절사된 형상이 해석 공간에서 사용되어 왔으나 등기하 해석은 유한요소의 h-, p- 정밀화(Refinement) 특성 외에도 NURBS의 k- 정밀화 특성을 가지며 무요소법과 유사하게 형상함수를 구성하므로 고 정밀의 형상이 필요한 경우 CAD 모델링을 거치지 않고 용이하게 구현할 수 있다.

* 학생회원, 서울대학교 조선해양공학과 박사과정 Email: hash00@snu.ac.kr

** 정회원, 서울대학교 조선해양공학과 교수 Email: secho@snu.ac.kr

1.2 노트(knot) 벡터 및 기저함수

1차원 문제에서의 노트 벡터는 파라메트릭 좌표계에서의 좌표들의 집합이다.

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}, \quad (1)$$

여기서 p 는 사용되는 기저함수의 차수이고, n 은 기저함수의 개수이다. 따라서 p 차의 기저함수 n 개를 사용하게 되면 총 $n+p+1$ 개의 노트 벡터가 사용된다. 만약에 노트 벡터가 파라메트릭 공간 상에 균일하게 분포되어 있으면 균일(uniform) 노트벡터, 불균일하게 분포되어 있으면 불균일(non-uniform) 노트벡터라고 한다. 그리고 한 노트값이 같은 좌표에 여러 번 반복될 수 있는데, 이때를 중복(repeated) 노트벡터라고 한다. 또한 첫번째와 마지막 노트가 $p+1$ 번 반복되면 열린(open) 노트벡터라고 한다.

등기하 해석법에서는, 해 공간의 기저함수가 CAD 형상을 표현하는데 사용된 B-spline 을 이용하여 다음과 같이 재귀적으로 구성된다.

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi), \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

위의 기저함수를 그려보면 아래의 그림 1의 (a), (b) 와 같다.

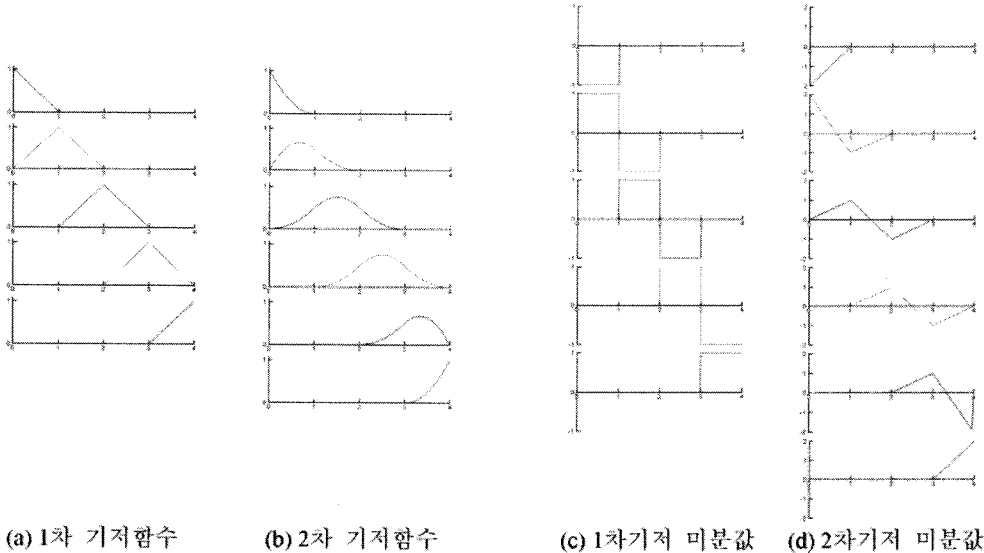


그림 1 기저함수와 미분값의 그래프

1차의 B-spline 기저함수를 사용했을 때는 위의 그림 1(a) 에서와 같이 유한요소법에서의 기저함수와 동일하다. 하지만 2차 이상의 기저함수에 대해서는 기존의 유한요소법과는 다르게 된다. B-spline 기저함수의 중요한 성질을 정리하면 다음과 같다.

- (1) $\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1$ (partition of unity)
- (2) $N_{i,p}$ is contained in the interval $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ (compact support)
- (3) $N_{i,p}(\xi) \geq 0$ (non-negative)

1.3 B-spline curves

B-spline 곡선은 B-spline 기저함수의 선형결합으로 얻어지는데, 이때 기저함수들이 계수가 조정점(control point)이 된다. n 개의 p 차 기저함수 $N_{i,p}$ 와 이에 대응하는 조정점 B_i 가 주어져 있을 때, B-spline 곡선은 다음과 같이 정의된다.

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) B_i \quad (4)$$

이 때, B-spline 곡선의 특징은 다음과 같다.

- (1) $p-1$ 차의 미분값에 대한 연속성을 가진다.
- (2) 중복된 노트나 조정점이 k 번 사용되면, 미분의 연속성이 k 차 만큼 감소한다.
- (3) 조정점들을 움직이게 되면 B-spline 곡선이 따라 변하게 된다.

그림 1의 (c), (d) 는 그림 1의 (a), (b) 에서 사용되었던 1차와 2차 B-spline 기저함수에 대한 미분값을 나타낸 그림이다. 1차 기저함수를 미분하게 되면 불연속한 미분값이 생기나 2차 기저함수의 경우에는 연속한 미분값을 얻게 된다. 따라서 변형도(strain)나 응력(stress)과 같이 변위장을 미분해서 얻을 수 있는 값에 대해서도 연속적인 해석 결과를 얻을 수 있다.

1.4 h-refinement

h-refinement 는 기존의 노트 벡터에 노트를 추가(knot insertion)하는 것을 의미한다. 기존의 유한요소법에서 해석의 정확도를 높이기 위해서 요소망을 재구성(remesh)하듯이, 등기화 해석법에서는 h-refinement 를 사용하게 된다. 주어진 노트벡터 $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ 와 조정점 $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 에 대해서 새로운 노트 $\bar{\xi} \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$ 를 추가한다고 할 때, 새로운 노트벡터 $\bar{\Xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \bar{\xi}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ 와 $n+1$ 개의 조정점 $\{\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_{n+1}\}$ 은 다음의 식에 의해서 구성된다.

$$\bar{B}_i = \alpha_i B_i + (1 - \alpha_i) B_{i-1} \quad (5)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq k-p \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i}, & k-p+1 \leq i \\ 0 & k+1 \leq i \leq n+p+2 \end{cases} \quad (6)$$

실제로 h-refinement 의 결과는 아래의 그림 2와 같다.

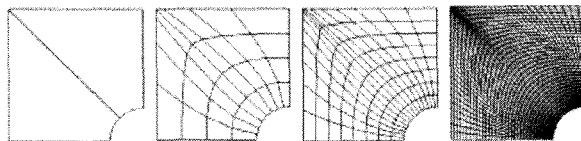


그림 2 h-refinement

1.5 B-spline surface

주어진 조정점 $\{B_{i,j}\} \quad i=1,2,\dots,n, \quad j=1,2,\dots,m,$ 과 노트벡터 $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+p+1}\},$ $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$ 에 대해서, B-spline 곡면은 아래와 같은 텐서곱으로 나타난다.

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) B_{i,j} \quad (7)$$

여기서 $N_{i,p}(\xi)$ 와 $M_{j,q}(\eta)$ 는 각각 ξ, η 방향으로의 기저함수이다. 수치적분을 위해서 $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$ 구간이 기존의 유한요소법에서의 요소(element) 역할을 하게 된다.

2. ISOGEOMETRIC ANALYSIS

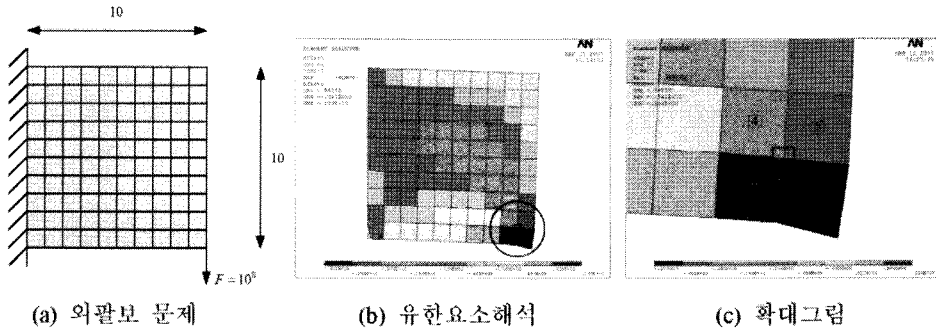


그림 3 문제 정의와 유한요소해석

위의 그림 3(a)와 같이 한쪽 변이 고정된 사각 평판 문제에 대해서 유한요소법과 등기하 해석법으로 해의 정확도를 비교하고 응력의 연속성을 살펴보자. 그림 3(b)는 모델 (a)에 대해서 변형 후의 모양에 전단 응력(τ_{xy})을 나타낸 것이고, 그림 3(c)는 검은색 원으로 표시한 응력 변화가 심한 부분을 확대해 놓은 것이다. 그림에서도 알 수 있듯이, 유한요소법에서는 응력들간의 연속성이 보장되지 않는다. 따라서 이를 해결하기 위해서 응력의 변화가 심한 부분이나 응력 집중이 일어나는 곳에서는 요소를 매우 작게 나누거나, 또는 주변 요소들의 응력값을 이용하여 평균화하는 별도의 과정이 필요하게 된다.

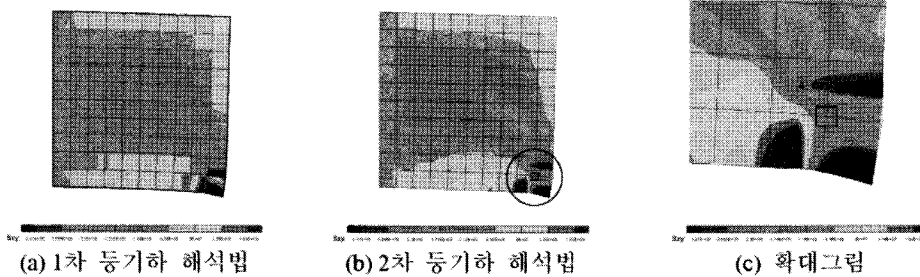


그림 4 등기하 해석법

하지만 그림 4와 같이 등기하 해석법을 사용했을 때에는, 유한요소법과는 달리 해석 영역 전체에 대해서 연속적인 응력 분포를 얻을 수 있음을 확인할 수 있다. 유한요소법과 등기하 해석법에서 요소 ① ~ ④가 공유하고 있는 절점에서의 응력값은 아래의 표 1과 같다.

표 1 유한요소법과 등기하 해석법에서의 전단응력 비교

	요소 ①	요소 ②	요소 ③	요소 ④
유한요소법	1.0283×10^9	-3.4069×10^9	-1.8315×10^9	-2.4880×10^9
등기하해석법	-1.1749×10^9	-1.1749×10^9	-1.1749×10^9	-1.1749×10^9

같은 절점에서도 선택한 요소에 따라서 응력값이 다르게 나오는 유한요소법과는 달리, 등기하 요소법에서는 같은 절점에서는 항상 같은 응력값이 나오는 보다 물리적으로 의미있는 해석 결과를 보여주고 있다.

3. SHAPE DESIGN SENSITIVITY

등기하 설계민감도는 형상이 선형적으로 변화하는 속도장에서는 기존의 설계민감도와 동일한 결과를 제공한다. 그러나 일반적인 속도장에서는 유한요소 이산화에 따른 법선벡터 및 곡률 등 고차항의 손실을 방법론적으로 방지하여 기하학적으로 엄밀한 형상이 반영됨으로써 정확한 설계민감도를 제공하여 경밀한 형상 최적설계 결과를 얻을 수 있다.

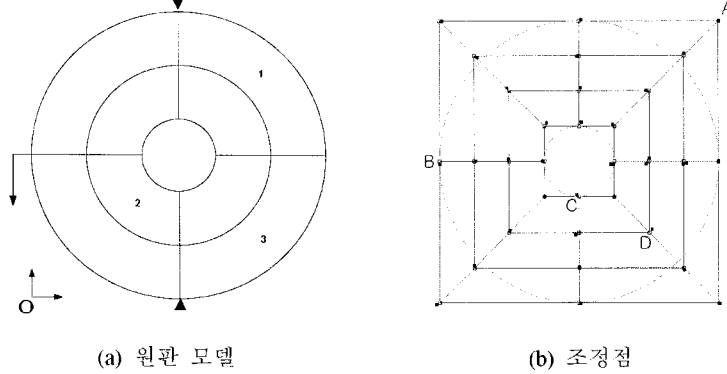


그림 5 설계 민감도 해석 모델

그림 5(a)의 원판 모델은 위, 아래가 단순 지지되고 좌측에서 수직방향의 집중하중을 받는 예제이다. 그림 5(b)에서는 형상 변형 전의 조정점(□)과 변형 후의 조정점(■)을 나타내었다. 위와 같이 조정점을 변화시켰을 때 변위에 대한 형상 설계민감도를 표 2에서 유한차분 민감도와 비교하였다.

표 2 등기하 해석법에서의 변위 설계 민감도 비교

자유도	유한차분법	직접미분법	정확도(%)
A_x	-2.90521E-03	-2.89470E-03	100.36
A_y	5.84325E-03	5.83051E-03	100.22
B_x	1.99090E-03	1.98226E-03	100.44
B_y	-2.04763E-03	-2.03467E-03	100.64
C_x	2.47518E-03	2.46382E-03	100.46
C_y	-6.22087E-04	-6.19405E-04	100.43
D_x	1.13147E-03	1.12500E-03	100.58
D_y	-9.19343E-04	-9.12851E-04	100.71

그리고 위의 변위 설계민감도를 이용하면 변형도(strain) 과 응력(stress) 의 설계민감도를 식 (8)을 이용해서 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)' &= \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)' + \nabla \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^T \mathbf{V} = \frac{\partial z'}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i} V_j \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{z} - \nabla z^T \mathbf{V}) + \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i} V_j = \frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{z}) - \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i} V_j - \nabla z^T \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i} V_j \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{z}) - \nabla z^T \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_i}\right)
 \end{aligned} \tag{8}$$

마찬가지로 응력에 대한 형상 설계민감도를 표 3에서 유한차분 민감도와 비교하였다. 표 2와 3에서 보듯이, 변위와 응력에 대한 형상 설계민감도가 높은 정확도로 얻어지고 있음을 확인하였다.

표 3 등기하 해석법에서의 응력 설계 민감도 비교

요소	응력	유한차분법	직접미분법	정확도(%)
1	σ_{11}	7.95275E+06	7.84934E+06	101.32
	σ_{22}	8.71851E+06	8.67061E+06	100.55
	σ_{12}	5.29689E+06	5.39419E+06	98.20
2	σ_{11}	-2.23610E+07	-2.24328E+07	99.68
	σ_{22}	-1.95225E+07	-1.95652E+07	99.78
	σ_{12}	2.89378E+07	2.90516E+07	99.61
3	σ_{11}	-1.30891E+07	-1.32284E+07	98.95
	σ_{22}	2.18210E+06	2.07578E+06	105.12
	σ_{12}	1.86852E+06	1.75601E+06	106.41

4. CONCLUSION

본 논문에서는 등기하 해석법을 이용하여 응답 및 설계민감도 해석을 수행하였다. 등기하 해석법에서는 CAD 형상에서 사용되는 B-spline 함수가 그대로 기저함수로 사용되고, 기저함수의 계수로 쓰이는 조정점에 자유도가 부여된다. 또한 등기하 해석법은 주어진 해석 모델을 기하학적으로 정확하게 묘사할 수 있으며, 해석의 정확도를 높이기 위한 요소망 재구성을 h-refinement 를 통해서 쉽게 처리할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 유한요소 해석처럼 수치해석이 절점에서 이루어지는 것이 아니라, B-Spline 의 조정점에서 이루어진다. 그러므로 영역의 이산화 (Discretization) 과정이 형상 구성단계에서 이루어지고 해석 과정에서 연속체를 이산화하지 않는 장점이 있어서 형상 설계민감도 해석에서 기하 모델의 법선 벡터나 곡률 정보를 정확하게 구현할 수 있다는 장점이 있다. 이를 형상 최적 설계에 적용한다면 보다 엄밀한 최적 형상을 얻어낼 수 있을 것으로 기대된다.

REFERENCES

- M. Cho, H. Roh (2003) Development of geometrically exact new shell elements based on general curvilinear coordinates, *International Journal for numerical methods in engineering* 56(1), pp.81-115.
- T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, Y. Bazilevs (2005) Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194, pp.4135-4195.
- J.A. Cottrell, A. Reali, Y. Bazilevs, T.J.R. Hughes (2006) Isogeometric analysis of structural vibrations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195, pp.5257-5296.
- E.J. Haug, K.K. Choi, V. Komkov (1986) Design sensitivity analysis of structural systems, *Academic Press*, New York.
- K. K. Choi and W. Duan (2000) Design sensitivity analysis and shape optimization of structural components with hyperelastic material, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 187, pp. 219-243.
- H.Y. Roh, M. Cho (2004) The application of geometrically exact shell elements to B-spline surfaces, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193, pp. 2261-2299.