일반화된 유한차분법을 이용한 균열해석

A Generalized Finite Difference Method for Crack Analysis

윤 영 철* · 김 동 조** · 이 상 호***
Yoon, Young-Cheol · Kim, Dong-Jo · Lee, Sang-Ho

ABSTRACT

A generalized finite difference method for solving solid mechanics problems such as elasticity and crack problems is presented. The method is constructed in framework of Taylor polynomial based on the Moving Least Squares method and collocation scheme based on the diffuse derivative approximation. The governing equations are discretized into the difference equations and the nodal solutions are obtained by solving the system of equations. Numerical examples successfully demonstrate the robustness and efficiency of the proposed method.

Keywords: *Taylor polynomial, Moving Least Squares method, diffuse derivative, difference equations*

1. 서 론

Nayroles 등(1992)이 분산요소법(diffuse element method)을 제안한 이후, Belytschko 등(1994)과 Liu 등(1995)이 무요소법(meshfree method)의 형태를 갖춘 Element-free Galerkin(EFG) 법과 재생커널 무요소법(Reproducing Kernel Particle Method; RKPM)을 각각 개발하였고, 그 뒤 무요소법은 유한요소법, 경계요소법과 같이 대표적인 수치해석기법의 하나로 자리매김 해오고 있다. 무요소법은 요소망(mesh) 구성을 위한 connectivity의 극복이란 측면에서 유한요소법의 대안으로 인식되고 있으나 형상함수와 그 미분 계산시 계산비용이 크고 필수경계조건 처리가 어렵다는 단점이 계속 지적되고 있다. 기존의 무요소법이 Galerkin 정식화에 근거한 유한요소법에 상응하는 수치해석기법이라면 최근에는 콜로케이션 정식화에 근거하여 유한차분법과 대응될 수 있는 해석기법들이 제안되었다(Kim과 Kim, 2003; Lee와 Yoon, 2004). 이 기법들은 무요소 근사함수의 미분계산비용을 대폭 감소시키고 경계조건처리를 단순화하는 등 기존 무요소법의 단점을 극복했다는 점에서 큰 의미를 갖는다. 본 연구는 적분방정식의 도입없이 지배 미분방정식을 직접 이산화하는 무요소법을 제시한다. 이동최소제곱법에 근거한 Taylor 전개와 콜로케이션법에 근거한 분산차분 scheme으로 구성된 일반화된 유한차분법이다. 고체역학(탄성론) 특히 균열전파문제를 정식화하고 관련된 공학문제를 해석하여, 제안된 해석기법의 강건성, 정확성, 효율성을 제시하고자 한다.

---

* 정회원 · 명지전문대학 토목과 조교수 Email: ycyoon@mjc.ac.kr
** 학생회원 · 연세대학교 사회환경시스템공학부 박사과정 Email: kdjdoc@csem.yonsei.ac.kr
*** 정회원 · 연세대학교 사회환경시스템공학부 정교수 Email: lee@yonsei.ac.kr

2. 이동최소제곱법에 근거한 Taylor 전개에 따른 분산 차분식

미분 가능한 함수 $u(\boldsymbol{x}) \in C^m(\bar{\Omega})$가 주어졌을 때, 한 점 $\bar{\boldsymbol{x}}$를 기준으로 $u(\boldsymbol{x})$의 Taylor 급수 전개식은 다음과 같다.

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\beta| \le m} \left(\frac{\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}}{\rho} \right)^{\beta} \frac{\rho^{|\beta|}}{\beta!} D_{\boldsymbol{x}}^{\beta} u(\bar{\boldsymbol{x}}) + R_m(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) \tag{1}$$

여기서 $R_m(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})$ 은 잔차항이다. $D_{\boldsymbol{x}}^{\beta}\left(:= \partial_{x_1}^{\beta_1} \partial_{x_2}^{\beta_2} \cdots \partial_{x_n}^{\beta_n}\right)$는 multi-index로 표현된 미분연산자이다. 잔차항을 제외한 Taylor 급수의 다항식 부분을 'Taylor 다항식' 이라 부른다. 무요소법에서 일반적으로 정의하는 국소근사함수(local approximation)

$$u_{\bar{\boldsymbol{x}}}^m(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}_m^T \left(\frac{\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}}{\rho} \right) \boldsymbol{a}(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{2}$$

는 잔차항을 배제한 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 를 기준점으로 하는 Taylor 다항식이다. 이 때 $\boldsymbol{a}(\bar{\boldsymbol{x}})$ 는 다항식기저 $\boldsymbol{p}_m\left(\frac{\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}}{\rho}\right)$에 대한 미지벡터이다. 식(1)과 식(2)는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\boldsymbol{p}_m^T \left(\frac{\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}}{\rho} \right) \boldsymbol{a}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \sum_{|\beta| \le m} \left(\frac{\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}}{\rho} \right)^{\beta} \frac{\rho^{|\beta|}}{\beta!} D_{\boldsymbol{x}}^{\beta} u(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{3}$$

또한 미지계수벡터 $\boldsymbol{a}(\bar{\boldsymbol{x}})$ 는 Taylor 다항식의 α 차 미분계수 $D_{\boldsymbol{x}}^{\alpha} u(\boldsymbol{x})$ 와 다음과 같은 관계가 있다.

$$\frac{\alpha!}{\rho^{|\alpha|}} \left(\boldsymbol{e}_{\alpha}^T \cdot \boldsymbol{a}(\bar{\boldsymbol{x}}) \right) = D_{\boldsymbol{x}}^{\alpha} u(\boldsymbol{x}) \Big|_{\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}}} = D_{\boldsymbol{x}}^{\alpha} u(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{4}$$

여기서 $\boldsymbol{e}_{\alpha}$ 는 α 차 성분이 1인 단위벡터이고, $\frac{\alpha!}{\rho^{|\alpha|}}$ 는 미지계수벡터의 α 차 성분과 Taylor 다항식의 α 차 미분계수를 연관시켜주는 scaling factor이다. 이 때 차수는 lexicographic 순서를 따른다.

Taylor 다항식 식(3)을 $\boldsymbol{x}$에 대해 미분하고 $\bar{\boldsymbol{x}}$에서 $\boldsymbol{x}$로의 극한을 취하면 원하는 차수의 미분계수를 얻을 수 있는데 실제 Taylor 다항식의 미분계수는 이동최소제곱법(Moving Least Squares Method)을 통하여 계산한다. 결과적으로 grid의 구성이 필요하고 근사함수를 갖고 있는 못한 기존의 유한차분법과 달리 적절히 배치된 절점만으로 근사함수와 그 미분을 간단히 계산할 수 있다. 이렇게 계산된 미분근사를 '분산미분' 이라 부른다.

분산미분이 Taylor 다항식에서 계산될 수 있음을 다음과 같이 설명할 수 있다.

$$\lim_{\bar{x}\to x} D_x^{\alpha}\left\{\sum_{|\beta|\le m}\left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right)^{\beta}\frac{\rho^{\beta}}{\beta!}D_x^{\beta}u(\bar{x})\right\} = \lim_{\bar{x}\to x}\left\{\sum_{|\alpha|\le|\beta|\le m}\left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right)^{\beta-\alpha}\frac{\rho^{\beta-\alpha}}{(\beta-\alpha)!}D_x^{\beta}u(\bar{x})\right\} \tag{5}$$

윗 식의 우변에서 $\bar{x}$ 에서 x 로의 극한을 취할 때 $\alpha=\beta$ 인 경우를 제외하고 $\left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right)^{\beta-\alpha}$ 는 모두 '0' 이 되므로, 식(5)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lim_{\bar{x}\to x}\left\{D_x^{\alpha}u(\bar{x})\right\} = D_x^{\alpha}u(x) \tag{6}$$

최종적으로 m차까지의 Taylor 다항식의 분산미분들을 모두 모으면 식(7)과 같다.

$$\begin{pmatrix} D^{(0,\cdots,0)}u(x) \\ \vdots \\ D^{(0,\cdots,m)}u(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{m!}{\rho^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lim_{\bar{x}\to x} D_x^{(0,\cdots,0)}u(\bar{x}) \\ \vdots \\ \lim_{\bar{x}\to x} \frac{\rho^m}{m!} D_x^{(0,\cdots,m)}u(\bar{x}) \end{pmatrix} = S_m a(x) \tag{7}$$

여기서 S_m 은 m차 다항식 기저의 미분과 Taylor 다항식의 미분계수를 연관시켜주는 scaling factor 행렬이다. 결국 $a(x)$ 의 lexicographic 순서상의 α 번째 성분은 Taylor 다항식의 미분계수이면서 α 차 분산미분을 나타낸다.

3. 콜로케이션법에 근거한 분산 차분식의 이산화

고체역학 문제에서 지배방정식은 변위 u 및 체적력 b 를 이용하여 다음과 같이 표현한다.

$$(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot u)+\mu\nabla^2 u=-b \quad \text{in } \Omega \quad \text{(평형방정식)} \tag{8}$$

$$\sigma\cdot n=\bar{t} \quad \text{on } \partial\Omega_t \quad \text{(자연경계조건)} \tag{9}$$

$$u=\bar{u} \quad \text{on } \partial\Omega_u \quad \text{(필수경계조건)} \tag{10}$$

여기서 $\nabla^2(=\nabla\cdot\nabla)$ 는 Laplace 연산자이며, n 은 자연경계 $\partial\Omega_t$ 에서의 단위수직벡터이고, $\bar{t}$ 은 규정된 표면력이다. 평형방정식에 구성방정식을 적용하여 자연경계조건 식(9)는 다음과 같다.

$$2\mu(\varepsilon)\cdot n+\lambda(tr\varepsilon)I\cdot n=\bar{t} \quad \text{on } \partial\Omega_t \tag{11}$$

여기서 $I=\delta_{ij}e_i\otimes e_j$ 이며, λ 및 μ는 Lamé 상수이고, $tr(\varepsilon)$ 는 변형율텐서의 trace를 의미한다.

유한차분법에서 차분식을 구성하는 방법과 동일하게 콜로케이션법의 잔차(residual)의 개념을 이용하여 위에서 정리한 미분방정식에 대한 차분식을 구성할 수 있다. 차분식 구성시 근사함수의 미분은 식 (7)의 분산미분을 사용하고 이를 '분산차분식' 이라 부른다. 식 (8)-(10)의 미분

방정식을 분산차분식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\left\| L\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}_I)+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}_I)\right\|_{L^\infty}=0,\ I\in\Lambda_{int}\ \text{ and }\ \boldsymbol{x}_I\in\Omega \tag{12}$$

$$\left\| B_t\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}_J)-\bar{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x}_J)\right\|_{L^\infty}=0,\ J\in\Lambda_t\cup\Lambda_C\ \text{ and }\ \boldsymbol{x}_J\in\partial\Omega_t \tag{13}$$

$$\left\| B_u\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}_K)-\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_K)\right\|_{L^\infty}=0,\ K\in\Lambda_u\ \text{ and }\ \boldsymbol{x}_K\in\partial\Omega_u \tag{14}$$

이때, L, B_t, B_u는 지배방정식과 자연경계, 필수경계에 대한 분산미분 연산자이다.

본 연구에서 사용하는 분산미분에 의한 차분법은 유한차분법의 차분식과 달리 근사함수(approximation)를 갖고 있다. 임의의 위치에서의 해와 그 미분 계산이 용이하다. 또한, 이동최소제곱법에 근거하기 때문에 grid에 의존적인 유한차분법과 달리 원하는 차수의 미분계수 또는 차분식을 손쉽게 계산할 수 있다. 따라서 본 연구에서 제시한 일반화된 차분법은 Galerkin법에 근거한 무요소법의 단점 뿐 아니라 유한차분법의 단점도 보완할 수 있는 매우 유용한 수치기법이다.

4. 수치 예제

4.1. 원공을 갖는 무한판

중심에 원공을 갖고 수평방향으로 원거리 단위하중을 받는 그림 1과 같은 무한판 문제를 고려한다. 응력에 대한 이론해는 Timoshenko와 Goodier(1970)를 참고할 수 있다. 평면응력상태를 가정했고, $E=10,000\ psi$, $\nu=0.3$이다.

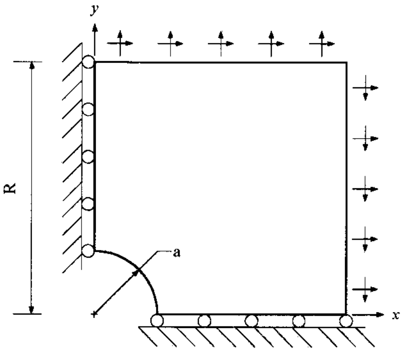


그림 1 원공을 갖는 무한판과 (1/4 모델, $a=1$, $R=5$)

원공은 $x=0$, $y=a$에서 응력집중계수 3의 크기를 갖는 응력집중을 유발시킨다. 그림 2(a)를 보면, 계산된 응력의 profile이 이론해와 잘 일치하고 있다. 68개, 224개, 806개의 절점 모델을 각각 풀어 수렴률 조사했다. 2차, 3차, 4차 Taylor 다항식을 사용하는 경우에 변위에 대한 L_2놈과 에너지 놈 오차의 수렴률을 그림 2(b)에 도시하였으며, 다항식의 차수가 높아질수록 수렴률이 높아지는 것을 볼 수 있다. 본 연구에서 제시한 해석기법이 매우 높은 수렴률을 보인다는 것을 알 수 있다.

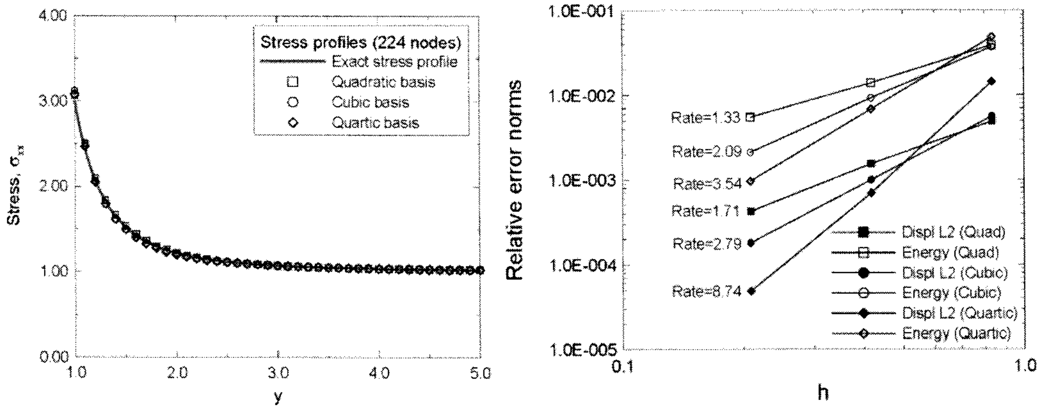
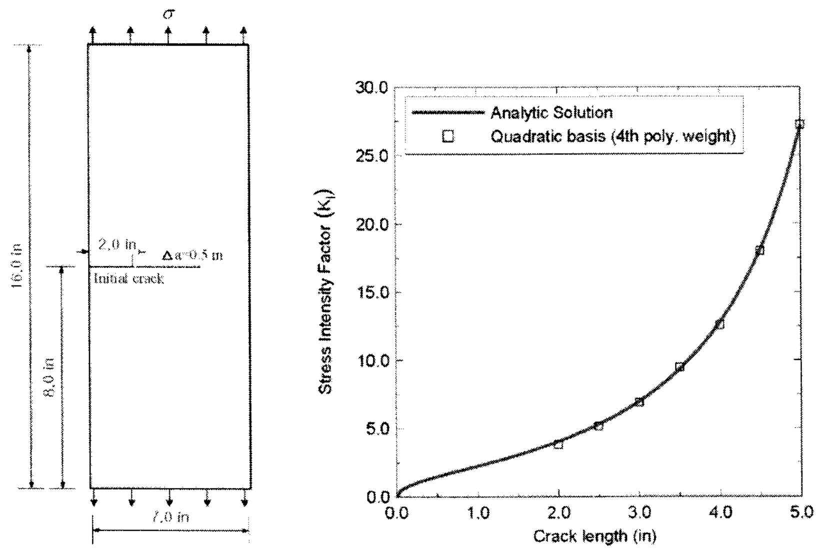


그림 2 원공주변 응력과 수렴률 (a) 응력분포도 (224개의 절점 사용) (b)변위와 에너지 놈에 대한 상대오차의 수렴률 (2차, 3차, 4차 다항식 기저 사용)

4.2. 인장하중을 받는 균열의 성장

그림 3(a)와 같이 인장하중 ($\sigma_y = 1\,psi$)을 받는 판부재에 존재하는 편측균열이 성장하는 경우를 고려한다. (평면응력, $E = 3\times10^7\,psi$, $\nu = 0.25$) 응력확대계수는 교차적분법(Moran과 Shih, 1987)을 이용해서 계산했다. 계산시 선단주변에 절점이 좀 더 집중되는 적응적 절점배치를 사용하였다. 균열이 $a = 2.0\,in$에서 $a = 5.0\,in$까지 성장할 때, 계산된 응력확대계수는 그림 3(b)와 같이 이론해와 잘 일치하고 있다.



(a) (b)

그림 3 편측균열을 갖는 직사각형 판 (a) 인장하중을 받는 편측균열 (b) 균열길이의 함수로 표현된 모드 I 응력확대계수(이론해는 Tada 등(1973) 참조)

5. 결론

절점이 적절하게 배치된 해석영역 내의 국부 영역에 대해 다항식기저 벡터를 이용하여 Taylor 전개식을 구성할 수 있다. Taylor 전개식에서 잔차항을 제거한 Taylor 다항식의 계수는 고려하는 함수값의 근사함수 및 그 미분값을 포함한다. 이 계수들은 이동최소제곱법을 이용하여 한꺼번에 구할 수 있으며 분산미분이라 명명했다. 지배 미분방정식의 이산화를 위해 콜로케이션법의 잔차식에 분산미분을 적용하여 분산 차분식을 구성하였고, 해석대상 내의 각각의 절점에 대해 분산 차분식을 모아 시스템 매트릭스를 구성했다. 이 시스템을 풀면 절점해를 얻게 되고, 이 절점해를 이용하여 임의의 위치에서 변위와 응력(또는 변형률)을 계산할 수 있다.

기존의 유한차분법과 달리 임의의 위치에서 근사함수와 그 미분값을 자유롭게 계산할 수 있다. 응력확대계수를 구하기 위해서는 균열선단 주변의 임의의 위치에서의 응력값이 필요한데, 본 해석기법으로 자유롭게 그 값을 계산할 수 있다. 본 해석방법은 Galerkin법에 근거한 무요소법의 관점에서 보면 적분식 구성(계산비용)과 경계조건 처리에 대한 단점을 보완할 수 있고, 기존의 유한차분법이 grid에 매우 의존적이고 근사함수식이 없어 임의의 위치에서 함수값의 계산이 어려웠던 단점을 훌륭히 보완해 준다. 주어진 수치예제를 통해 탄성론 문제뿐만 아니라 균열과 같이 불연속면과 응력의 특이성을 갖는 문제에서도 높은 정확도를 갖는 해를 얻을 수 있음을 보였다. 본 해석기법은 그 밖의 다양한 특수 공학적 문제에도 성공적으로 적용될 수 있을 것으로 기대된다.

감사의 글

이 논문은 2005년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구(KRF-2005-041-D00778)이며 이 논문의 일부는 2007년도 교육인적자원부 BK21사업의 일환인 연세대학교 사회환경시스템공학부 미래사회기반시설 산학연공동사업단의 지원을 받아 연구되었으며, 이에 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌

Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L. (1994) Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp.229~256.

Kim D. W., Kim Y-S. (2003) Point collocation methods using the fast moving least square reproducing kernel approximation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56, pp.1445~1464.

Lee S-H, Yoon Y-C. (2004) Meshfree point collocation method for elasticity and crack problem, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61, pp.22~48.

Liu, W. K., Jun, S. and Zhang, Y. (1995) Reproducing kernel particle methods, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 20, pp.1081~1106.

Moran, B. and Shih, C. F. (1987) Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance, *Engineering Fracture Mechanics*, 27, pp.615~641.

Nayroles, B., Touzot, G. and Villon, P. (1992) Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements, *Computational Mechanics*, 10, pp.307~318.

Tada, H., Paris, P. C. and Irwin, G. R. (1973) The stress analysis of cracks handbook, *Del Research Corporation.*