

# $p$ -Version 적층모델을 통한 팻취 보강된 강판의 선형탄성파괴역학 해석

## LEFM Analysis of Patch Repaired Steel Plates by $p$ -Version Layer Model

한 상 현\* · 신 영 식\*\* · 우 광 성\*\*\*  
Han, Sang-Hyun · Shin, Young-Shik · Woo, Kwang-Sung

---

### ABSTRACT

The enhancement of the service life of damaged or cracked structures is a major issue for researchers and engineers. The hierarchical void element with the integrals of Legend polynomials is used to characterize the fracture behavior of unpatched crack as well as repaired crack with bonded composite patches by computing the stress intensity factors and stress contours at the crack tip. The numerical approach is based on the  $p$ -version degenerate shell element including the theory of anisotropic laminated composites. Since the equivalent single layer approach is adopted in this study, the proposed element is necessary to represent a discontinuous crack part as a continuum body with zero stiffness of materials. Thus the aspect ratio of this element to represent the crack should be extremely slender. The sensitivity of numerical solution with respect to energy release rate, displacement and stress has been tested to show the robustness of hierarchical void element as the aspect ratio is increased up to 2000. The stiffness derivative method and displacement extrapolation method have been applied to calculate the stress intensity factors of Mode I problem.

**Keywords** : *patched crack, equivalent single layer theory, stiffness derivative method, displacement extrapolation method, zero stiffness element*

---

### 1. 서 론

일반기구나 구조물의 제조과정 중의 미세한 결함이나 운전 중에 발생하는 균열의 존재로 인해 재료가 파괴되는 현상은 모든 기계적 파손의 약 85~90%에 이른다고 알려져 있다. 토목 분야에서는 교량 및 기타 구조물에 있어서 연결부 및 접합부 부품들에 재하 되는 반복하중에 의한 피로 균열(fatigue crack)문제는 교량 설계 또는 노후 된 구조물의 내하력 판정에 매우 중요한 부분을 차지하고 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 가장 큰 선결 과제는 균열선단에서의 응력장의 강도를 나타낼 수 있는 응력확대계수  $K$ 를 여러 방법으

---

\* 영남대학교 건설환경공학부, 석사 : naiad@ynu.ac.kr

\*\* 영남대학교 건설환경공학부, 교수 : ysshin@ynu.ac.kr

\*\*\* 영남대학교 건설환경공학부, 교수 : kswoo@ynu.ac.kr

로 구하여 이에 따른 균열제어(crack control) 계획을 어떻게 효율적으로 수행할 수 있는가에 있다.

본 연구에서는 건설분야에서 주로 실험적인 방법으로 팹취보강 분석을 해 온 것에 대하여 이론에 근거한 해석적인 방법을 모색하고자 하는 것이다. 균열이 있는 모재의 거동과 복합재료에 의한 팹취보강 후에 그 효과에 대하여 기존의 유한요소를 이용하여 모델링 할 경우 무수히 많은 요소분할을 통한 3차원 모델링 해석을 하는 대신 해석의 효율성을 위하여 요소의 개수를 줄이며 자유도를 감소시킬 수 있는  $p$ -version 유한요소로 2차원 모델링에 의한 해석을 유도하고자 한다. 또한 적층 모델을 통한 2차원 유한요소해석 중에서 퇴화 셸요소(degenerate shell element)를 고려한 등가적층해석을 수행하기 위하여 균열의 빈공간과 팹취 보강 되지 않는 영역에서의 요소 층에 대하여 Hierarchical Void Element의 적용가능성을 검토하고자 한다.

## 2. 유한요소

### 2.1 퇴화 셸요소

평판 또는 셸 구조물은 3차원 고체요소를 이용하여 모델링 할 수 있으나 셸의 두께에 비하여 가로 폭과 세로 폭의 비가 크기 때문에 일반적으로 셸요소를 이용하여 해석을 수행한다. 그러나 3차원 고체요소의 자유도 조건을 중립면 기준으로 설정된 셸요소의 절점과 절점에서의 수직벡터를 이용하여 5-자유도 셸의 자유도 조건으로 감차(dimension reduction) 또는 퇴화(degenerate)시키면, 3차원 고체요소의 응력-변형률 거동과 동일한 효과를 나타내는 2차원 퇴화 셸요소가 유도된다. 따라서 2차원 퇴화 셸요소로도 충분히 3차원 고체요소의 효과를 나타낼 수 있는 것이다. 이러한 퇴화원리는 Ahmad(1970)에 의해 제안되어 셸 구조물의 해석에 널리 이용되어 왔다. 이 요소에는 두 가지 가정이 필요하다. 즉, 첫째로, 변형 전 중립면에 수직인 선은 변형 후에도 직선을 유지하나 수직일 필요는 없다. 둘째로, 중립면에 수직인 응력은 무시한다. 전단변형률(transverse shear strains)은 두께에 걸쳐 일정하게 분포한다고 가정한다. 또한, 두께방향의 변형은 없는 것으로 본다. 첫 번째 가정에 의해 한 절점당 자유도는 5자유도가 되며 임의의 절점  $k$ 에서 3개의 중립면 직선 변위( $u_k^{mid}, v_k^{mid}, w_k^{mid}$ )와 2개의 회전변위( $\beta_{1k}, \beta_{2k}$ )로 구분할 수 있다. 요소의 기하학적 형상을 정의하기 위해서는 각 절점의 상면과 하면을 전체좌표계로 나타내는 방법과 중립면에서의 절점의 좌표와 그 절점에 대응하는 두께로 나타내는 방법이 있다. 한편, 기하형상(geometry)을 표현하기 위해 그림 2.1에 나타난 절점좌표계(nodal coordinates)가 사용되는데 식 (1)과 같이 정의할 수 있다.

$$x_i = \sum_{k=1}^{N_i} \Psi_k(\xi, \eta) x_k^{mid} + \sum_{k=1}^{N_i} \Psi_k(\xi, \eta) \frac{h_k}{2} \zeta \bar{v}_{3k}^i \quad (1)$$

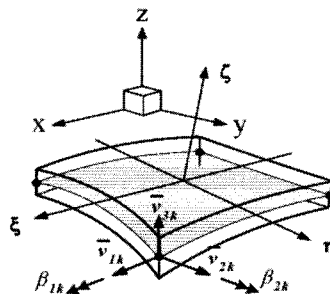


그림 1 5자유도  $p$ -수렴 퇴화평판요소

그림 1과 같이 적층평판의 각 층단면에서의  $x$ 방향,  $y$ 방향의 변위  $u, v$ 는 중립면을 중심으로 선형적인 거동을 한다.  $z$ 방향 변위  $w$ 는 두께방향 위치에 관계없이 일정한 상수 값을 나타낸다. 이러한 가정에 기초하여

요소의 변위장을 중립면에서의 변위장에 종속시켜서 나타내면 자유도의 감소와 효율성 측면에서 장점이 있다. 한편, 전체좌표계  $x, y, z$ 의 변위장은 회전변위( $\beta_{1k}, \beta_{2k}$ )로 부터 영향을 받는 직선변위 성분을 고려하여 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$u_i = \sum_{k=1}^{N_c} \Psi_k(\xi, \eta) u_{ik}^{mid} + \sum_{k=1}^{N_c} \Psi_k(\xi, \eta) \zeta \frac{h_k}{2} \begin{bmatrix} \bar{v}_{1k} \\ -\bar{v}_{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서,  $i$ 는 전체좌표계의  $x, y, z$  방향,  $u_{ik}^{mid}$ 와  $[\beta_{1k}, \beta_{2k}]$ 는 임의의  $k$ 절점 중립면에서의 직선변위 벡터와 회전변위 벡터,  $h_k$ 는  $k$ 절점에서의 평판두께,  $\Psi_k(\xi, \eta)$ 는 적분형 Legendre 형상함수,  $\bar{v}_k$ 는 절점  $k$ 에서 중립면에 수직방향의 절점좌표계 성분을 전체좌표계 방향으로 투영한 벡터성분이다.  $[v_k, -v_k]$ 는 절점에서 정의되는 좌표계방향으로의 단위벡터이다.  $\xi, \eta, \zeta$ 는 형상함수가 정의되는 정규좌표계를 의미하며, 정규영역에서 모든 강성도 매트릭스와 하중벡터가 계산된다. 그리고 우변 첫 번째 항은 Membrane작용에 의한 것이고, 두 번째 항은 휨작용에 의한 것이다.  $N_c$ 는 모서리 절점의 개수로 4가 되고, 반면에  $N_e$ 는 형상함수의 차수  $p$ 에 따른 요소내의 전체 절점수이다. 주어진 절점  $k$ 에서 전체변위에 대한 기여는 식 (3) 같이 표현된다.

$$u_k = \Psi_k \delta_k \quad (3)$$

## 2.2 Equivalent Single Layer Theories (등가단층평판이론, ESLT)

ESLT은 다층의 적층 평판을 하나의 단층 평판으로 바꾸어 해석하는 것으로 적층평판의 전체의 변위나 응력해석은 가능하나 적층간의 변위 및 응력의 해석은 부정확하다. 대개 면내 변위를 두께방향에 따라 선형분포로 가정하나 비선형 분포로 가정하느냐에 따라 1차 혹은 고차 전단변형이론이 된다. 고차전단변형이론에서는 가정된 변위계의 미지 변수를 줄이기 위해 단순화법을 많이 사용한다. 우선 semi-inverse method로 두께 방향의 전단응력을 가정함으로 가능하게 하는 방법이다.

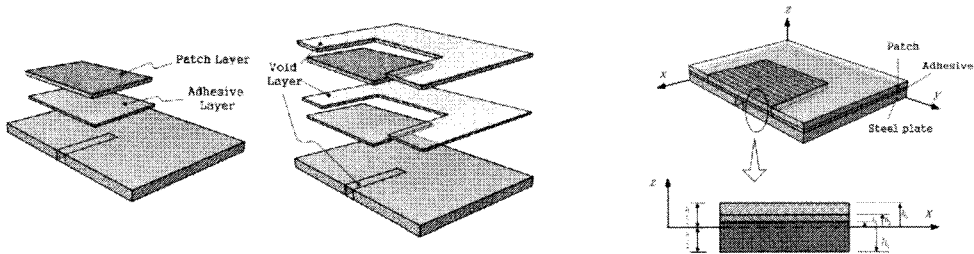


그림 2 균열보강판의 적층모델과정과 적층평판의 가학적적인 형태

## 3. Sensitivity

### 3.1 Hierarchical Void Element

Hierarchical Void Element란 무강성 요소(Zero stiffness element)로서 탄성계수가 zero에 가까운 요소이다. 이 Void Element는 적층모델에서 랫칭 보강시 균열의 빈 공간을 채우는 요소로 사용되며 비보강 층요소 등의 요소를 표현하기위한 요소이다. Void Element의 유한요소 해석에 적용성을 검토하기위하여 유한요소 입력데이터의 민감도(Sensitivity)에 대한 조사가 필요하며 그 적용타당성을 보이고자 한다. 우선 Void Element의 강건성(Robustness) 대하여 요소의 Aspect ratio, Skewness, Tapered ratio, Poison ratio( $\nu \approx 0.5$ ) 등을 검토할 수 있으나 본 연구에서 요구되어지는 균열에 대한 해석 조건으로 인하여 요소의 형상비(Aspect ratio)에 따른 사

용성과 재료물성치(탄성계수)에 따른 사용성에 대해서만 적용하도록 하겠다.

### 3.2 민감도 검토

기하형상과 모델링형상은 그림 3에서 나타내고 있으며 1/4 모델링 하여 해석하였다. H/W=2(H=200mm, W=100mm)인 두께 t=1mm의 중앙균열판에 인장력  $\sigma_0=0.1$  MPa이 작용하는 경우에 대하여 균열공간을 Void element로 모델링하여 해석하였다. 요소의 개수는 4개로 하였으며 해석값에 대하여 정확성을 높이고자 p의 차수는 8차로 고정시켰다. 모재의 재료물성치는 탄성계수  $E_p=200$  GPa이며 포아슨비  $\nu=0.3$ 으로 설정하였다.

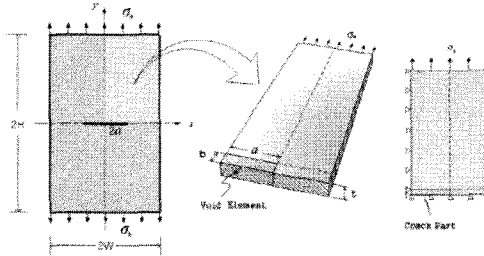
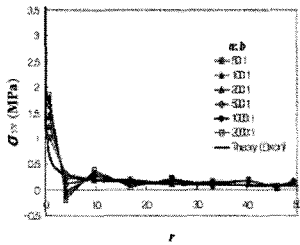
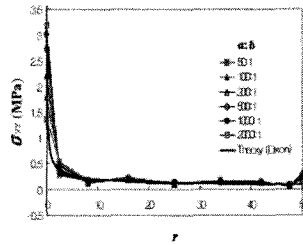


그림 3 H/W=2인 중앙균열판의 기하형상과 유한요소모델링형상(1/4모델)

Void element의 사용성 검토에 있어서 우선 기하형상에 대한 검토를 분석하였다. 균열공간의 표현에 있어서 형상비(a/b)에 따른 해석한 결과로 Gauss 적분점을 이용한 유한요소 해석에서 균열선단에 방향으로의 거리 r 지점의 y방향 응력  $\sigma_{yy}$ 을 그림 4에서 나타내었으며 Lobatto 적분점을 이용하여 해석한 응력 값에 대하여 그림 4의 그래프로 도식화하였다. Gauss 수치적분에 의한 해석값은 응력증감(Stress gradient)이 크기 때문에 Lobatto 수치적분이 적당하다고 판단된다. 그림 4에서 보는바와 같이 형상비 a/b가 작을수록 응력특이현상이 나타나는 균열선단부위에 대한 응력값이 다소 작은값으로 표현되는 것을 볼 수 있다. 반면에 형상비 a/b가 증가 될수록 응력특이현상을 잘 표현하고 있으나 몇몇의 적분점에서 음의 값이 나타나 형상비 a/b의 한계성을 보이고 있다. 하지만 Robinson이 형상비 a/b에 대하여 변위에 대한 적합성으로 a/b=7을 제안하고 있으며 응력에 대한 적합성을 a/b=5로 제안하고 있어서 h-version에 비하여 상대적으로 큰 범위를 가질 수 있는 것을 알 수 있다. 해석결과를 검토 해 본바 형상비 a/b는 Gauss 수치적분에서는 100~500사이가 적당하며 Lobatto 수치적분에서는 100~2,000이상 까지 적당하다고 판단된다.



(a) Gauss 적분



(b) Lobatto 적분

그림 4 형상비에 따른 응력변화

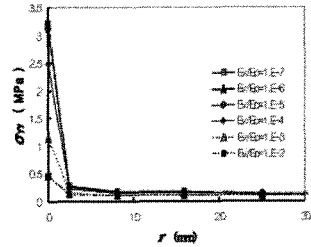


그림 5 탄성계수비에 따른 응력변화

Void element는 강성이 zero에 가까운 요소이나 유한요소 해석에 있어서 zero인 강성을 입력할 경우 해석이 수행되지 않게 된다. 따라서 강성을 zero에 어느 정도나 가깝게 표현하느냐에 따라서 무강성 요소로서의 수치 해석 결과값에 영향을 미치지 않는지에 대하여 검토해 보았다. 그림 5는 균열선단 방향으로 거리 r인 수치 적분 점의 응력  $\sigma_{yy}$ 를 모재의 탄성계수  $E_p$ 와 Void element의 탄성계수  $E_v$  비율에 따른 변화를 나타내었다.  $E_v/E_p =$

$1.0 \times 10^{-6}$  이후로부터 일정한 값들로 나타나기 시작하였다.

#### 4. 수치해석 예제

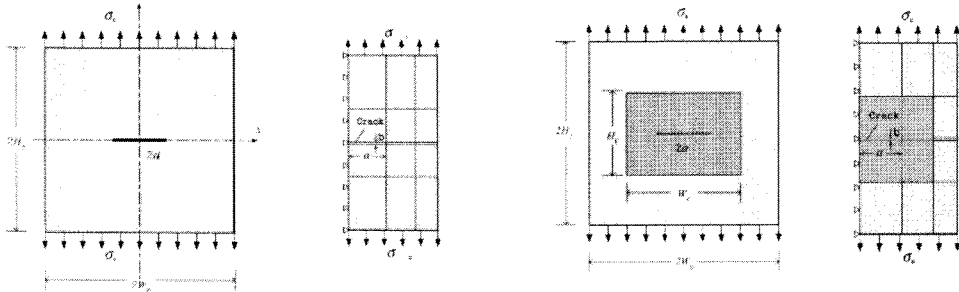


그림 7 패취보강 전후의 중앙균열판의 기하형상과 1/2 유한요소모델링 형상

수치해석 예제로 우선  $W_p=120\text{mm}$ ,  $H_p=120\text{mm}$ ,  $t_p=3\text{mm}$  인 알루미늄 판에 대하여 균열폭  $a=12\sim 72\text{mm}$  따른 유한요소해석 실시하였다.  $E_p=72000\text{MPa}$ ,  $\nu=0.33$ 이며 Void element의 형상비  $a/b$ 는  $100\sim 600$ 으로 하고 탄성계수비는  $E_p/E_p=1.0 \times 10^{-6}$ 로 입력하였으며 인장력  $\sigma_0=70\text{MPa}$  을 작용하여 해석하였다. 패취 보강된 중앙 균열판 해석에 있어서 패취보강재와 접착제(Adhesive)에 대한 기하형상 값 및 재료물성치는 표 1에 정리해 두었다. 그림 8는 패취 보강전후의  $a/W_p=0.5$ 에 대한 응력분포를 나타내었다. 수치해석의 결과값을 분석하여 응력확대계수를 구하는 방법에서 변위의삽입 중에 하나인 COD법으로 균열길이에 따른 응력확대계수  $K_I$ 의 값을 Point Matching Approaches로 구하여 기존의 연구자에 의한 수치들과 이론값들을 함께 비교해보았다.

표 1 복합재료 패취의 기하형상 값 및 재료물성치  
• Geometric dimension (단위 mm)

	$W_f$	$H_f$	$t$
Boron epoxy	180	90	$t_f = 1$
Adhesive	180	90	$t_a = 0.2$

• Material properties (E, G 단위의 MPa)

Material	$E_2$	$E_1, E_3$	$G_{12}, G_{23}$	$G_{13}$	$\nu$
Boron epoxy	208000	25400	7240	4940	0.17
Adhesive	970				0.3

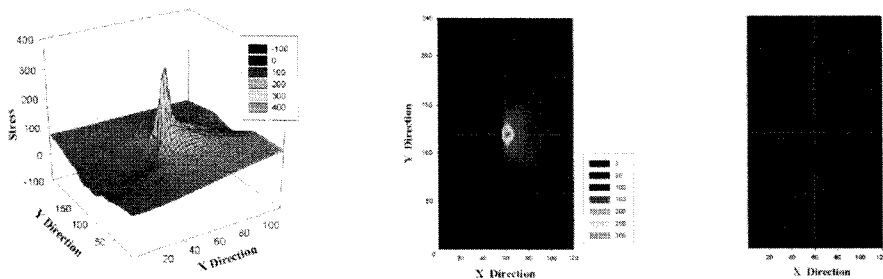


그림 8 패취보강 전후의 중앙균열판의 응력분포도( $a/W_p=0.5$ )

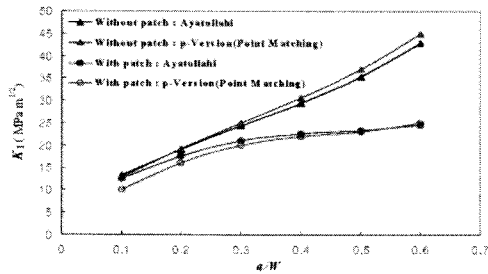


그림 9 패치보강 전후의 응력확대계수  $K_I$ 의 비교

그림 9는 중앙 균열판의 패치 보강 전후에 대하여 응력확대계수의 변화를 나타내고 있으며 기존의 연구자의 해석값과 비교하여 나타내었다. 그림에서 보는바와 같이 적층해석프로그램에서 결과값이 적은 오차를 나타내고 있음을 알 수 있다.

## 5. 결론 및 고찰

본 연구는 기존의 수치해석적 방법에서 응력특이 발생하는 균열문제에서 Hierarchical Void element의 적용으로 유한요소 해석에 있어서 자유도 감소를 유도하여 보다 효율적인 해석을 도모하고자 적층모델을 통한 해석을 유도하였고 중앙 균열판에 대하여 패치 보강 전후의 모델을 해석해본 결과 다음과 같은 측면을 생각해 볼 수 있다. 첫째로 Void element의 사용하요 패치 보강되지 않는 중앙 균열판에 대하여 형상비  $a/b$ 가 100~2000이상의 값에서도 수렴성을 보였으며 패치 보강된 모델링 해석에서는  $a/b=100\sim400$ 정도의 범위에 대하여 적합성을 보였다. 다음으로는 불연속부인 균열부를 연속체로 모델링하기 위해 사용되는 Void element는 탄성계수를 0에 가까운 값으로 가정하였다. 탄성계수가 0에 근접할수록 해의 수렴성을 보였으며 해석과정에서 문제가 발생하지 않았으며 수렴구간에 들어가는 탄성계수 값으로 다음의  $0 \leq E_v \leq (1.0 \times 10^{-6})E_p$  값을 제안하고자 한다. 둘째로 응력계수의 산정에 있어서 패치 보강되지 않은 중앙균열판에 대하여 COD법 및 ERR법에 의해 구해진  $K_I$  값에 대하여 기존의 연구자에 의해구해진 값에 대한 상대오차가  $\pm 5\%$ 로 미만으로 나타나고 있으며 패치보강된 모델에 대해서는 상대오차가  $\pm 5\sim 10\%$ 정도를 보이고 있어 적층모델을 통한 패치보강된 해석의 유효성을 확인 할 수 있었다. 마지막으로 패치보강된 중앙균열판의 해석결과에 대하여  $K_I$ 값 최대43%의 보강 효과를 보였다.

Hierarchical Void element의 적용으로 3차원 고체요소 모델링을 통한 균열보강 해석이 2차원 요소화 하여 해석을 효율을 도모하였다. 또한 적층모델 유한요소 프로그램의 적합성을 보였으며 향후에는 프로그램 내에 아직 적용되지 않은 곡선 면이나 원형경계에 대한 Transfinite Mapping과 요소중간의 형상함수의 적용으로 원공이 있는 판의 해석과 곡면이 있는 헬구조의 해석 등 다양한 구조물의 보강 해석이 가능해질 것으로 기대되어진다.

## 참고문헌

M.R. Ayatollahi, R. Hashemi, (2007) Computation of stress intensity factor ( $K_I$ ,  $K_{II}$ ) and  $T$ -stress for cracks reinforced by composite patching, Composite Structures, Vol.78, pp.602~609.

홍중현, 조준형, 우광성, (2002) p-Version 유한요소법에 의한 적층 경사평판의 기하 비선형 해석, 대한토목학회 논문집 22(2-A), pp.355~364.